УДК 514.18

Е.А. Гавриленко[1], к.т.н.
А.В. Найдыш[2], д.т.н.
Ю.В. Холодняк[1], к.т.н.
В.А. Лебедев[2], к.т.н.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО РЯДА, ПРИНАДЛЕЖАЩЕГО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОНОТОННОЙ КРИВОЙ

[1] Таврический государственный агротехнологический университет имени Дмитрия Моторного, Украина
[2] Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого, Украина

Формирование одномерных обводов по заданным условиям – одна из наиболее востребованных задач геометрического моделирования. Задача решается вариативным дискретным геометрическим моделированием, которое предполагает формирование для исходного ряда промежуточных точек сгущения. Дискретная модель кривой состоит из точечного ряда, заданных геометрических характеристик и алгоритма сгущения.

Дискретно представленная кривая (ДПК) формируется сгущением исходного точечного ряда произвольной конфигурации по участкам, на которых возможно обеспечить монотонное изменение значений ее характеристик. Монотонные участки стыкуются в особых точках. Каждые три последовательные точки ДПК определяют прилегающую плоскость. Четыре прилегающие плоскости, проходящие через две последовательные точки, ограничивают тетраэдр. Цепочка последовательных тетраэдров, определенных на всех участках, является областью расположения гладкой кривой линии постоянного хода, интерполирующей исходный точечный ряд. Кручение на участках ДПК оценивается величиной отношения угла между соседними прилегающими плоскостями к длине соответствующей хорды сопровождающей ломаной линии. Точка сгущения назначается внутри тетраэдра расположения ДПК. В результате последовательных сгущений получим непрерывный обвод постоянного хода, в каждой точке которого существует единственное положение основного трёхгранника. Точка сгущения назначается таким образом, чтобы значения кручения в точках ДПК изменялись монотонно. Это обеспечивает регулярность значений кручения в точках обвода.

Наложение на формируемую ДПК дополнительных условий требует определения соответствующей области возможного решения внутри тетраэдра расположения ДПК.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая (ДПК), кручение, радиус кривизны, монотонность изменения характеристик.

Постановка проблемы. Формирование одномерных обводов по заданным условиям – одна из наиболее востребованных задач геометрического моделирования. Одномерные обводы могут использоваться для приближенных вычислений, построения графиков, описывающих явления и процессы, в качестве линейных элементов определителя поверхности. Условиями, определяющими обвод, является исходный точечный ряд, фиксированные геометрические характеристики, назначенные в исходных точках, заданная закономерность изменения характеристик вдоль обвода [4].

На данный момент наиболее разработаны методы моделирования одномерных обводов участками аналитически заданных кривых, состыкованных в исходных точках с обеспечением заданного порядка гладкости. Наращивание условий, накладываемых на участок обвода, требует увеличения параметрического числа формирующей его кривой. При этом неизбежно возникают особые точки: точки перемены возрастания-убывания кривизны и кручения, точки перегиба и самопересечения кривой. Неконтролируемое возникновение особых точек снижает качество получаемого решения. Особенно важен контроль возникновения особых точек при моделировании динамических поверхностей, функциональное назначение которых – взаимодействие со средой. Основное требование к линейным элементам моделей таких поверхностей – закономерное, желательно монотонное, изменение дифференциально-геометрических характеристик вдоль кривой. Задача может быть решена вариативным дискретным геометрическим моделированием [5], которое предполагает формирование для исходного ряда промежуточных точек сгущения. Дискретная модель кривой состоит из точечного ряда, заданных геометрических характеристик и алгоритма сгущения. Основная проблема вариативного подхода к формированию обводов в том, что кривая и ее характеристики не определены однозначно на всех этапах моделирования.

Разработка алгоритмов формирования одномерных обводов, не требующих аналитического представления его участков, способных обеспечить заданные геометрические свойства кривой даст эффективный инструмент решения задач геометрического моделирования.

Анализ последних исследований и публикаций. Способ формирования гладкой ДПК постоянного хода предложен в [1,3]. ДПК формируется на основе исходного точечного ряда назначением промежуточных точек сгущения. Каждые три последовательные точки определяют прилегающую плоскость (ПП). Четыре последовательные ПП, проходящие через i-ю и $i+1$-ю точки ограничивают тетраэдр. Цепочка последовательных тетраэдров, определенных на всех участках, является областью расположения гладкой кривой линии постоянного хода, интерполирующей исходный точечный ряд. Кручение на участках ДПК оценивается величиной (B_i^{φ}) отношения угла между соседними ПП (φ_i) к длине соответствующей хорды сопровождающей ломаной линии ($h_i = |i; i+1|$). Точка сгущения назначается внутри тетраэдра расположения ДПК. В результате последовательных сгущений, в пределе, получим непрерывный обвод постоянного хода, в каждой точке которого существует единственное положение основного трёхгранника. Выполнение при каждом сгущении условия $B^{\varphi}_{i-1} > B_i > B^{\varphi}_i$ обеспечивает регулярность значений кручения (B_i) в точках обвода [2].

Наложение на формируемую ДПК дополнительных условий требует определения соответствующей области возможного решения внутри тетраэдра расположения ДПК.

Формулировка целей и задач статьи. Исследовать условия формирования ДПК постоянного хода с монотонным изменением радиусов соприкасающихся окружностей и сфер.

Основная часть. Рассмотрим точечный ряд, расположенный на кривой линии l постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер монотонно возрастают в одном направлении. Кривые с указанным сочетанием характеристик будем называть монотонной. Каждые четыре последовательные точки определяют сферу – $Сф_i(i\text{-}1, i, i+1, i+2)$ и две принадлежащие ей окружности –$Окр_i(i\text{-}1, i, i+1)$ и $Окр_{i+1}(i, i+1, i+2)$ (рис. 1).

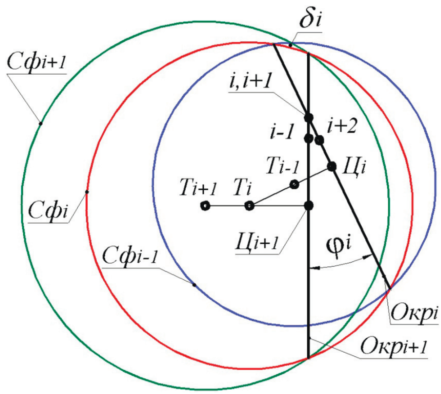

Рис.1.

На рис. 1 кривая l расположена таким образом, что взгляд наблюдателя направлен вдоль прямой $(i, i+1)$. Контуры $Сф_{i-1}$, $Сф_i$, $Сф_{i+1}$ – окружности максимального радиуса, расположенные в плоскости P_i, проходящей перпендикулярно хорде $[i, i+1]$ через ее середину. $Окр_i$ и $Окр_{i+1}$ проецируются в хорды контура $Сф_i$.

Когда расстояние между точками $i\text{-}1$, i, $i+1$, $i+2$ бесконечно мало, то они определяют соприкасающуюся сферу ($ССф_i$) и соприкасающиеся окружности ($СО_i$ и $СО_{i+1}$). Взаимное расположение центров соприкасающихся сфер ($Т_i$) и соприкасающихся окружностей ($Ц_i$) в соответствии с условием

$\left|Ц_i, T_i\right| > \left|Ц_i, T_{i-1}\right|$ означает монотонное возрастание вдоль l радиусов соприкасающихся сфер ($R_i^{сф}$), а выполнение условия $\left|Ц_i, T_i\right| < \left|Ц_{i+1}, T_i\right|$ означает возрастание радиусов кривизны (R_i).

$ССф_{i+1}$ определим прохождением через $СО_{i+1}(i, i+1, i+2)$ и бесконечно близкую точку $i+3$. Монотонное возрастание $R_i^{сф}$ означает, что точка $i+3$ расположена за пределами $ССф_i$. Точки $i+1, i+2, i+3$ определяют $СО_{i+2}$ и при этом $R_{i+2} > R_{i+1}$.

Таким образом, кривая линия постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер монотонно возрастают в одном направлении, располагается за пределами своих соприкасающихся сфер. В результате аналогичных рассуждений можно показать, что кривая постоянного хода, вдоль которой радиусы кривизны и радиусы соприкасающихся сфер возрастают в различных направлениях, расположена внутри своих соприкасающихся сфер.

При увеличении расстояний между последовательными точками, принадлежащими l, определяемые этими точками окружности и сферы ($Окр_i$ и $Сф_i$) будут пересекать кривую. $Сф_i$ пересекает l в точках i-1, i, $i+1$, $i+2$. Участки кривой $\ldots i$-1, i–$i+1$, $i+2\ldots$ расположены за пределами $Сф_i$, а участки i-1–i и $i+1$–$i+2$ – внутри нее. Из этого следует, что последовательные $Сф_{i-1}$, $Сф_i$, $Сф_{i+1}$ ограничивают область (δ_i), внутри которой расположен участок i–$i+1$ кривой l. На рис. 1 показано сечение δ_i плоскостью P_i.

Аналогичные области, определенные на остальных участках, составляют область возможного расположения ДПК. Все кривые линии, интерполирующие точечный ряд, характеристики которых соответствуют характеристикам l, находятся внутри области возможного расположения ДПК. Для кривой l область δ_i расположена за пределами $Сф_i$, а для кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в противоположных направлениях, δ_i расположена внутри $Сф_i$.

Кривую линию постоянного хода, вдоль которой радиусы кривизны и соприкасающихся сфер монотонно возрастают или убывают, будем называть монотонной. Возможны восемь различных вариантов сочетаний указанных характеристик кривой. Любую кривую линию можно рассматривать как состоящую из участков монотонных кривых.

Монотонные участки ДПК формируются назначением точек сгущения внутри области возможного по условиям задачи решения.

Выводы. Предложен способ формирования на основе точечного ряда произвольной конфигурации дискретно представленной кривой (ДПК) с регулярным изменением кручения, радиусов соприкасающихся окружностей и сфер. ДПК формируется по участкам, вдоль которых обеспечивается монотонное изменение геометрических характеристик кривой.

Монотонные участки формируются сгущением исходного точечного ряда и не требуют аналитического представления. Определение области возможного по условиям задачи расположения кривой позволяет оценивать максимальную абсолютную погрешность, с которой ДПК представляет формируемый обвод.

Литература

1. Гавриленко Е.А. Моделирование одномерных обводов по заданным условиям / Е.А. Гавриленко, Ю.В.Холодняк, А.В. Дубинина // Сучасні проблеми моделювання: Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. Вип. 9. С. 162-166.
2. Гавриленко Є.А. Програмна реалізація алгоритму моделювання одновимірних обводів по заданим геометричним умовам / Є.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк // Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво : наук. журн. / Луцький НТУ. – Луцьк, 2013. – № 13. – С. 4-9.
3. Гавриленко Е.А. Формирование геометрических характеристик монотонной кривой линии / Е.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк, В.А. Пахаренко // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2016. – Вип. 3 (58). – С. 492-496.
4. Осипов В.А. Машинные методы проектирования непрерывно–каркасных поверхностей / В.А. Осипов. – М.: Машиностроение, 1979. – 248 с.
5. Найдиш А.В. Науково-методологічні основи варіативного дискретного геометричного моделювання / А.В. Найдиш, І.Г. Балюба, В.М. Верещага, Д.В. Спірінцев // Сучасні проблеми моделювання: наукове фахове видання / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2019. – Вып.13. - С. 114-123.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО РЯДА, ПРИНАДЛЕЖАЩЕГО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОНОТОННОЙ КРИВОЙ

МОДЕЛЮВАННЯ ТОЧКОВОГО РЯДУ, ЩО НАЛЕЖИТЬ ПРОСТОРОВІЙ МОНОТОННІЙ КРИВІЙ

Є.А. Гавриленко, А.В. Найдиш, Ю.В. Холодняк, В.А. Лебедев

Формування одновимірних обводів за заданими умовами - одна з найбільш затребуваних завдань геометричного моделювання. Задача вирішується варіативним дискретним геометричним моделюванням, яке передбачає формування для вихідного ряду проміжних точок згущення. Дискретна модель кривої складається з точкового ряду, заданих геометричних характеристик і алгоритму згущення.

Дискретно представлена крива (ДПК) формується згущенням вихідного точкового ряду довільної конфігурації по ділянкам, на яких можливо забезпечити монотонну зміну значень її характеристик. Монотонні ділянки стикуються в особливих точках. Кожні три послідовні точки ДПК визначають прилягаючу площину. Чотири прилягаючі площини, що проходять через дві послідовні точки, обмежують тетраедр. Ланцюг послідовних тетраедрів, визначених на всіх ділянках, є областю розташування гладкої кривої лінії постійного ходу, яка інтерполює вихідний точковий ряд. Скрут на ділянках ДПК оцінюється величиною відносини кута між сусідніми прилягаючими площинами до довжини відповідної хорди супроводжуючої ламаної лінії. Точка згущення призначається всередині тетраедра розташування ДПК. В результаті послідовних згущень отримаємо безперервний обвід постійного ходу, в кожній точці якого існує єдине положення основного тригранника. Точка згущення призначається таким чином, щоб значення скруту в точках ДПК змінювалися монотонно. Це забезпечує регулярність значень скруту в точках обводу.

Накладення на сформовану ДПК додаткових умов вимагає визначення відповідної області можливого рішення всередині тетраедра розташування ДПК.

Ключові слова: дискретно представлена крива (ДПК), скрут, радіус кривизни, монотонність зміни характеристик.

MODELING OF A POINT SET WHICH BELONGS TO A SPATIAL MONOTONE CURVE

Eugene Gavrilenko, Andrey Naydysh, Yuliya Kholodnyak, Vladimir Lebedev

The formation of one-dimensional contours on the basis on the given conditions is one of the most popular geometric modeling problems. The problem is solved by variative discrete geometric modeling, which assumes the formation of intermediate points for the initial set of condensation points. The discrete model of the curve consists of a point sets, given geometric characteristics and a condensation algorithm.

A discretely presented curve (DPC) is formed by a condensation of the initial point set of an arbitrary configuration in areas on which it is possible to ensure a monotonic chang in the values of its characteristics. Monotone plots are joined at special points. Every three consecutive points of the duodenum define an adjacent plane. Four adjacent planes passing through two consecutive points limit the tetrahedron. The chain of consecutive tetrahedrons defined on all segments is the region of the location of the smooth curve of the constant stroke line interpolating the initial point sets. The torsion on the sections of the DPC is estimated by the value of the ratio of the angle between adjacent adjacent planes to the length of the corresponding chord of the accompanying broken line. The point of thickening is assigned inside the tetrahedron of the DPC. As a result of successive condensations, we obtain a continuous bypass of a constant stroke, at each point of which there is a single position of the main trihedron. The point of condensation is assigned in such a way that the values of the torsion in the duodenum points change monotonically. This ensures that the torsion values are regular at the points of the bypass.

The imposition of additional conditions on the DPC formed requires the definition of the corresponding region of a possible solution within the DPC arrangement tetrahedron.

Keywords: discretely presented curve (DPC), torsion, radius of curvature, monotone change of characteristics.