

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАМКНЕНОГО ПЛОСКОГО КОНТУРУ З ЗАСТОСУВАННЯМ РАЦІОНАЛЬНИХ КУБІЧНИХ КРИВИХ

*Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”*

*В статті описано спосіб геометричного моделювання замкненого плоского контуру з застосуванням раціональних кубічних кривих. При моделюванні була поставлена задача скласти контур з мінімальною кількості сегментів кривих не вище третього порядку.*

*В якості прикладу виконана апроксимація профіля лопатки турбіни. Для цього плоский замкнений контур лопатки розбито на дві частини. Верхня та нижня частини апроксимуючого контуру в точках перегину профіля лопатки мають спільні дотичні. Верхня частина контуру, обмежена точками перегину, складається з двох сегментів раціональних кривих третього порядку, які в спільній точці мають однакову кривину. Сегмент першої кубічної кривої проходить через три точки заданого контуру лопатки турбіни, причому в цих точках має спільні з заданим контуром дотичні. Переміщення особливої точки першої кубічної кривої в визначених межах дозволяє модифікувати її форму, а також провести сегмент кривої ще через одну точку заданого контуру і гарантує відсутність в межах сегменту небажаних точок - особливої точки, точок розриву та перегину. Після конструювання сегменту першої кубічної кривої визначається радіус кривини в його кінцевій точці. Сегмент другої кубічної кривої, як і сегмент першої, має з заданим контуром лопатки турбіни три спільні точки з дотичними в них. Переміщення особливої точки другої кубічної кривої в певних межах попередньо визначеної кривої забезпечує в точці стику з сегментом першої кубічної кривої задану кривину, а також гарантує відсутність в межах сегменту особливої точки, точок розриву та перегину. Нижня частина контуру профіля лопатки турбіни апроксимована сегментом кривої другого порядку, який проходить через три точки контуру лопатки, та в кінцевих точках має спільні з контуром дотичні.*

*Рівняння кривих визначені в параметричному виді в проєктивній площині і записані в афінній площині в векторно-параметричному виді.*

*Запропонований спосіб може бути використаним при моделюванні як плоских замкнених контурів, так і при моделюванні плоских обводів другого порядку гладкості, сегментами яких є раціональні кубічні криві.*

*Ключові слова: геометричне моделювання плоского контуру, радіус*

**Постановка проблеми.** В різних галузях техніки виникають задачі, пов'язані з розробкою плоских криволінійних обводів. Для вирішення задач геометричного моделювання обводів широко застосовуються сплайни, криві Без'є тощо. При моделюванні криволінійного обводу доводиться використовувати декілька кривих, які стикаються між собою.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питанню геометричного моделювання замкнених контурів, наприклад, профілів лопаток турбін, присвячені роботи [1, 2] та ін. Для опису профіля застосовують різноманітні криві: параболи, еліпси, криві Без'є та ін. Метою статті є подальший розвиток геометричного моделювання замкненого криволінійного контуру з застосуванням кубічних раціональних кривих.

**Ціль статті.** Розробити спосіб геометричного моделювання замкненого плоского контуру, складеного з мінімальної кількості складових частин, з застосуванням раціональних кривих третього порядку.

**Основна частина.** Моделювання контуру виконувалося для поперечного перерізу лопатки турбіни, зображеного в [1] (рис.1а).

Точки  $A$  та  $C$  обрані на перерізі візуально, як точки перегину. Верхня частина профілю, обмеженого точками  $A$  та  $C$ , складена з двох раціональних кривих третього порядку ( $k3п1$  та  $k3п2$  на рис.1б), які стикаються в точці  $E$ . Точка  $E$  обиралася на перерізі візуально таким чином, щоб дотичні в цій точці до обох кубічних кривих співпадали з дотичною до перерізу. Нижня частина профілю описана кривою другого порядку. В точках  $A$  та  $C$  криві, що стикаються в них, мають спільні дотичні ( $AB$  та  $CB$  відповідно), кубічні криві в точці  $E$  мають однакову кривину. Точки  $A, B, C$  та  $E$  є базовими точками проєктивної системи координат  $P^2_1$ .

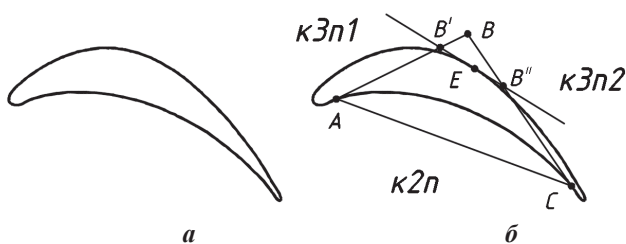


Рис.1. Поперечний переріз

Для визначення рівняння  $k3п1$  переходимо в проєктивну систему координат  $P^2_2$  з базовими точками  $EB^1AE^1$  (рис.2), де точка  $B^1$  є точкою перетину дотичної до перерізу в точці  $E$  з прямою  $AB$ , а точка  $E^1$  обрана візуально таким чином, щоб дотична в ній до перерізу співпадала з дотичною до  $k3п1$  [3].

КЗп1 при цьому проходить через точки  $E, E^I, A$ , які належать перерізу, і має дотичні  $AB^I$  та  $EB^I$  (а також дотичну в точці  $E^I$ ), які співпадають з дотичними до перерізу. При цих сталих параметрах завдання особливої (вузлової) точки  $S^I(a:b:c)$  кубічної кривої в "дозволеній" зоні [4], що гарантує відсутність в межах сегменту  $EE^IA$  точок розриву та перегину, надає можливість проведення простої дуги кривої ще через одну задану точку з одночасним моделюванням її форми (рис.2).

Рівняння такої кЗп в  $P^2$  має вигляд:

$$\rho x_0 = p + mt; \quad \rho x_1 = bt[(b-a)t - c + b]; \quad \rho x_2 = t^2(lt + n), \quad (1)$$

де  $p = c(a-b), m = 2b^2 - a(c+b), l = a(c=b), n = 2b^2 - c(a+b)$ .

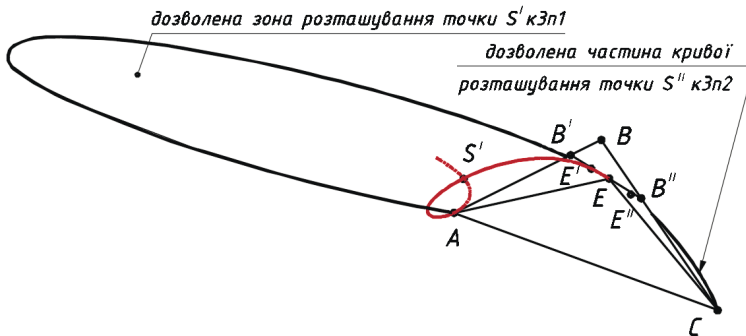


Рис. 2. Конструювання кЗп1

В  $A^3$  рівняння кривої (1), записане за допомогою формул переводу з  $P^2$  в  $A^3$  [5], має вигляд

$$r = \sum_{i=0}^2 A_i r_i x_i / \sum_{i=0}^2 A_i x_i, \quad (2)$$

де  $A_1 / A_0 = -EE^I_{EB^I} / B^I E^I_{EB^I}, A_2 / A_1 = -B^I E^I_{AB^I} / AE^I_{AB^I}, r_0 \equiv r_E,$   
 $r_1 \equiv r_{B^I}, r_2 \equiv r_A, E^I_{EB^I} = EB^I \cap AE^I, E^I_{AB^I} = EE^I \cap AB^I$ .

Після визначення радіуса кривини  $R_{кр}$  кЗп1 в точці  $E$  переходимо до конструювання кЗп2. Рівняння кривої визначається в проективній системі координат  $P^2_3$  з базовими точками  $EB^{II}CE^{II}$ , де  $B^{II}$  – точка перетину вже визначеної спільної дотичної до обох кЗп в точці  $E$  з прямою  $CB$ , а точка  $E^{II}$  обирається візуально на перерізі таким чином, щоб дотична до перерізу в цій точці була також дотичною для кривої кЗп2. КЗп2 при цьому проходить через точки  $E, E^{II}, C$ , які належать перерізу, та має дотичні  $EB^{II}$  та  $CB^{II}$  (і дотичну в точці  $E^{II}$ ), які співпадають з дотичними до перерізу.

Для побудови кЗп2, яка має в точці  $E$  заданий радіус кривини, визначаємо в межах «дозволеної» зони частину кривої другого порядку,

при переміщенні по якій особливій точці кЗп2 – точки  $S^{II}(a^{II}:b^{II}:c^{II})$ , маємо гарантований радіус кривини в точці  $E$  [6,7].

Переміщуючи по цій кривій особливу точку  $S^{II}$  кЗп2, модифікуємо форму сегмента шуканої кривої (рис.3). Рівняння кЗп2 при цьому аналогічні рівнянням кЗп1 (1) та (2).

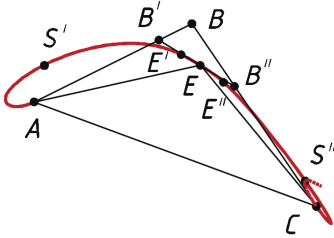


Рис. 3. Конструювання кЗп2

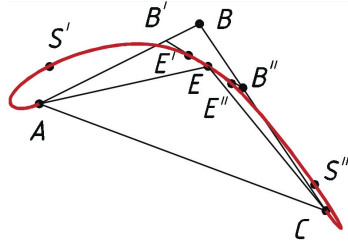


Рис.4. Апроксимація верхньої частини перерізу

Нижня частина перерізу апроксимована кривою другого порядку (к2п), яка проходить через точки  $A$  та  $C$ , має дотичні  $AB$  та  $CB$ , спільні відповідно з дотичними до кЗп1 та кЗп2 в цих точках, і проходить через точку  $E^{III}$ , обрану на перерізі таким чином, щоб в цій точці дотична до к2п співпадала з дотичною до перерізу (рис.5).

Рівняння цієї к2п в проєктивній системі координат  $ABCE^{III} P^2_4$  та в  $A^3$  відповідно мають вигляд

$$\rho x_0 = 1; \quad \rho x_1 = t; \quad \rho x_2 = t^2 \quad (3)$$

та

$$r = \sum_{i=0}^2 A_i r_i x_i / \sum_{i=0}^2 A_i x_i, \quad (4)$$

де  $A_1 / A_0 = -AE_{AB} / BE_{AB}$ ,  $A_2 / A_1 = -BE_{BC} / CE_{BC}$ ,  $r_0 \equiv r_A$ ,  $r_1 \equiv r_B$ ,  $r_2 \equiv r_C$ ,  $E_{AB} = E^{III}C \cap AB$ ,  $E_{BC} = AE^{III} \cap BC$ .

В таблицях 1-4 наведені вихідні, а також результуючі дані для апроксимуючого контуру; для обох кЗп в спільній точці  $E$  радіус кривини  $R_{кр} = 262.186$ , проєктивні координати особливих точок кЗп1 та кЗп2 дорівнюють відповідно:  $S^I$  (4.87351; -9.05513; -388.809),  $S^{II}$  (-12.7549; 18.0073; 324.262).

На рис.6 зображено вихідний переріз з накладеним на нього апроксимуючим контуром.

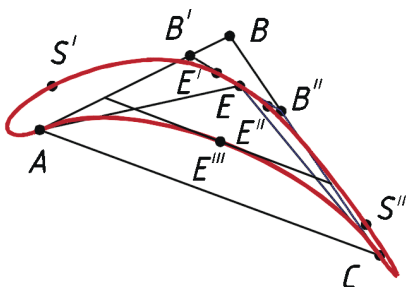


Рис.5. Апроксимація перерізу

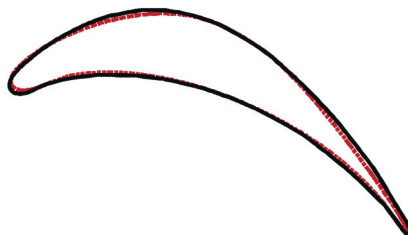


Рис.6. Суміщення перерізу та апроксимуючого контуру

Таблиця 1

Координати базисних точок

	A	B	C	E	B <sup>I</sup>	B <sup>II</sup>	E <sup>I</sup>	E <sup>II</sup>	E <sup>III</sup>
P <sup>2</sup> <sub>1</sub>	1:0:0	0:1:0	0:0:1	1:1:1					
P <sup>2</sup> <sub>2</sub>	0:0:1			1:0:0	0:1:0		1:1:1		
P <sup>2</sup> <sub>3</sub>			0:0:1	1:0:0		0:1:0		1:1:1	
P <sup>2</sup> <sub>4</sub>	1:0:0	0:1:0	0:0:1						1:1:1

Таблиця 2

Коефіцієнти A<sub>0</sub>/A<sub>1</sub>

	P <sup>2</sup> <sub>1</sub>	P <sup>2</sup> <sub>2</sub>	P <sup>2</sup> <sub>3</sub>	P <sup>2</sup> <sub>4</sub>
A <sub>1</sub> /A <sub>0</sub>	7.57156	0.77976	1.31673	1.04226
A <sub>2</sub> /A <sub>1</sub>	1.97377	0.0123	0.09254	1.07224

Таблиця 3

Координати базисних точок в A<sup>2</sup>

	A	B	C	E	B <sup>I</sup>	B <sup>II</sup>	E <sup>I</sup>	E <sup>II</sup>	E <sup>III</sup>	S <sup>I</sup>	S <sup>II</sup>
Координати точок в A <sup>2</sup>	42.5871; 74.9265	98.9199; 102.8045	143.3771; 37.6875	101.899; 87.8045	87.14902791; 96.97932582	114.1551815; 80.48919842	95.0738; 91.8022	110.1905; 81.9514	96.138; 71.4355	46.2577; 88.1427	139.37780328; 46.80483658

## Коефіцієнти рівняння кЗп

$$x = \sum_{j=0}^3 b_j t^{3-j} / \sum_{j=0}^3 a_j t^{3-j}; y = \sum_{j=0}^3 c_j t^{3-j} / \sum_{j=0}^3 a_j t^{3-j}.$$

кЗп1	$a_0=-0.000150624$	$a_1=0.0005316$	$a_2=-0.0038261$	$a_3=-0.0358239$
	$b_0=-0.00641465$	$b_1=0.0516297$	$b_2=-0.128249$	$b_3=-3.65042$
	$c_0=-0.0112858$	$c_1=0.0541774$	$c_2=-0.496341$	$c_3=-3.15153$
кЗп2	$a_0=-0.00343793$	$a_1=0.0060088$	$a_2=-0.0213739$	$a_3=-0.0948684$
	$b_0=-0.492921$	$b_1=0.658813$	$b_2=-3.02441$	$b_3=-9.66699$
	$c_0=-0.129567$	$c_1=0.523371$	$c_2=-1.36349$	$c_3=-8.34584$

**Висновки.** Виконана апроксимація замкненого плоского контуру двома раціональними кривими третього порядку та однією кривою другого порядку. Криві третього порядку зістиковані між собою по другому порядку гладкості, з кривою другого порядку – по першому.

**Перспективи подальших досліджень.** Може бути доцільною розробка способу геометричного моделювання подібного контуру за допомогою раціональних кривих третього порядку, які в точках перегину вихідного контуру теж мають точки перегину.

## Література

1. *Борисенко В.Д.* Геометричне моделювання обводів профілів лопаток турбін раціональними кривими Безье / В.Д. Борисенко, Д.В. Котляр // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнічний університет – Вип.4, т.46. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С.19–26.
2. *Комар В.С.* Удосконалення профілів лопаток осьового турбодетандера / В.С. Комар // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2009.– Вип. 81. – С.155–158.
3. *Коваль Г.М.* Об одном проективном способе конструирования кривой третьего порядка / Г.М. Коваль // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1987. – Вып.43. – С. 73 – 74.
4. *Коваль Г.М.* Модифікація форми кривої третього порядку переміщенням особливої точки кривої / Г.М. Коваль // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2009.– Вип. 81. – С.138–142
5. *Надолинний В.А.* Основы теории проективных рациональных поверхностей / Автореферат дисс. ... докт. техн. наук, 05.01.01. – М., 1989.–30 с.
6. *Коваль Г.М.* Конструирование рациональных кривых третьего порядка с заданными радиусами кривизны / Г.М. Коваль // К.: КПИ, 1994. –бс. – Деп. в ГНТБ Украины 22.02.94, № 400 – Ук94.
7. *Коваль Г.М.* Спосіб локальної модифікації плоского обводу

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМКНУТОГО ПЛОСКОГО КОНТУРА С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ КУБИЧЕСКИХ КРИВЫХ

*Г.М. Коваль, М.В. Лазарчук*

*В статье описывается способ геометрического моделирования замкнутого плоского контура с применением рациональных кубических кривых. При моделировании была поставлена задача составить контур из минимального количества сегментов кривых не выше третьего порядка.*

*В качестве примера выполнена аппроксимация профиля лопатки турбины. Для этого плоский замкнутый контур лопатки разбит на две части. Верхняя и нижняя части аппроксимирующего контура в точках перегиба профиля лопатки имеют общие касательные. Верхняя часть контура, ограниченная точками перегиба, составлена из двух сегментов рациональных кривых третьего порядка, которые в общей точке имеют одинаковую кривизну. Первый сегмент кубической кривой проходит через три точки заданного контура лопатки турбины, причем в этих точках имеет общие с заданным контуром касательные. Перемещение особой точки первой кубической кривой в определенных пределах позволяет модифицировать ее форму, а также провести сегмент кривой через еще одну точку заданного контура и гарантирует отсутствие особой точки, точек разрыва и перегиба в пределах сегмента. После конструирования первого сегмента кубической кривой определяется радиус кривизны в его конечной точке. Сегмент второй кубической кривой, как и сегмент первой кривой, имеет с заданным контуром лопатки турбины три общие точки и касательные в них. Перемещение особой точки второй кубической кривой в пределах дуги ранее определенной кривой обеспечивает в точке стыка с сегментом первой кубической кривой заданную кривизну, а также гарантирует отсутствие в пределах сегмента особой точки, точек разрыва и перегиба. Нижняя часть контура профиля лопатки турбины аппроксимирована сегментом кривой второго порядка, который проходит через три точки контура лопатки, причем в конечных точках имеет общие с контуром касательные.*

*Уравнения кривых определены в параметрическом виде в проективной плоскости и записаны в аффинной плоскости в векторно-параметрическом виде.*

*Предложенный способ может быть использован как при моделировании плоских замкнутых контуров, так и при моделировании плоских обводов второго порядка гладкости, сегментами которых являются рациональные кривые третьего порядка.*

*Ключевые слова: геометрическое моделирование плоского контура, радиус кривизны, рациональная кубическая кривая.*

## GEOMETRIC MODELING OF A CLOSED FLAT CONTOUR WITH THE APPLICATION OF RATIONAL CUBIC CURVES

*G. Koval, M. Lazarchuk*

*The article describes the method of geometric modeling of a closed planar contour using rational cubic curves. When modeling, the task was to make a contour from the minimum number of curve segments not more than third order.*

*An approximation is made for the turbine blade profile. To do this, a flat closed contour of the blade is divided into two parts. The upper and lower parts of the approximating contour at the inflection points of the blade profile have common tangents. The upper part of the contour bounded by inflection points consists of two segments of rational third-order curves having the same curvature at a common point. The first segment of the cubic curve passes through three points of the given contour of the turbine blade, and at these points has tangents common with this contour. Moving the singular point of the first cubic curve within certain limits allows you to change its shape, as well as draw a segment of the curve through an additional point of the given contour and guarantees the absence of a singular point, break and inflection points within the of segment. After constructing the first segment of the cubic curve, the radius of curvature at the endpoint of the segment is determined.*

*The segment of the second cubic curve, like the segment of the first curve, has three common points and tangents in them with a given contour of the turbine blade. Moving the singular point of the second cubic curve within the arc of the previously defined curve provides the specified curvature at the junction with the segment of the first cubic curve, and also guarantees the absence of a singular point, break points, and inflection points within the of segment. The lower part of the turbine blade profile is approximated by a segment of a second-order curve that passes through three points of the blade profile, and at the end points shares common tangents with the contour. The equations of the curves are determined in parametric form in the projective plane, and then written in the affine plane in vector-parametric form.*

*The proposed method can be used both for modeling closed planar contours and for modeling planar contours of the second order of smoothness, the segments of which are rational curves of the third order.*

*Keywords: geometric modeling of a planar contour, radius of curvature, rational cubic curve.*