

ОКРЕМИЙ ВИПАДОК КОНГРУЕНТНИХ ЦЕНТРОЇД НЕКРУГЛИХ КОЛІС, УТВОРЕНИХ ДУГАМИ ЛОГАРИФМІЧНОЇ СПІРАЛІ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Розглянуто кочення конгруентних кривих одна по одній без ковзання, які є дугами логарифмічної спіралі. Дві симетричні дуги утворюють замкнений контур із спільним полюсом полярної системи координат. Така фігура нагадує відомий символ серця із полюсом на лінії симетрії. В статті показано і математично доведено, що при належному виборі відстані між полюсами таких фігур вони можуть перекочуватися одна по одній, обертаючись навколо своїх полюсів. Зроблено аналітичний опис центроїд, побудовано їх зображення із спільною точкою контакту для різних кутів повороту.

Ключові слова: кочення конгруентних кривих; циліндричні поверхні; аналітичний опис центроїд; фізичні моделі центроїд.

Постановка проблеми. Кочення циліндричних поверхонь одна по одній без ковзання можна замінити аналогічним коченням центроїд – кривих поперечного перерізу цих циліндрів. Передачі, які працюють за рахунок тертя між поверхнями, називаються фрикційними. У них є суттєвий недолік: вони не можуть передати крутний момент великої потужності. Однак такі поверхні є базовими для проектування потужних зачеплень для передачі обертального руху, зокрема, зубчастих. Основою проектування зубчастих зачеплень є центроїди.

Деякі центроїди некруглих коліс досить добре вивчені. Це стосується конгруентних еліпсів, а також центроїд, однією із яких є коло із зміщеним центром обертання [1]. Для цього і для інших випадків виникають труднощі аналітичного опису розшукуваної центроїди.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичні питання побудови центроїд для зубчастих зачеплень розглянуто в праці [2] а в праці [3] детально розглянуто процес проектування центроїд некруглих зубчастих коліс. Подальший розвиток досліджень цей напрямок отримав в численних статтях [4 - 10]. Будувати центроїди можна за заданою функцією передачі обертання, як це розглянуто в працях [8, 9]. Можна одну центроїду задати, а форму іншої знаходити [1]. В цьому випадку можливе застосування чисельних методів інтегрування. Можна поставити додаткову вимогу, щоб

центроїди були конгруентними. В праці [2, стор. 298] сказано, що конгруентні центроїди у парних некруглих коліс можна отримати в порівняно рідких випадках. Деякі пари конгруентних центроїд некруглих коліс отримано в праці [10].

Формулювання цілей та завдання статті. Здійснити аналітичний опис пари конгруентних центроїд некруглих коліс, які окреслені дугами логарифмічної спіралі.

Основна частина. Рівняння логарифмічної спіралі в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho = ae^{b\alpha}, \quad (1)$$

де ρ – радіус-вектор, нахил якого до осі Ox визначається поточним значенням кута α – незалежної змінної. Координати точки задаються кутом α і відстанню ρ від точки O , тобто від полюса. Властивістю кривої є те, що всі радіус-вектори перетинають її під сталим кутом, величина якого залежить від сталої b (стала b є котангенсом означеного кута). Стала a по суті є масштабним коефіцієнтом, тобто вона впливає на збільшення або зменшення масштабу.

Розглянемо дві полярні системи, розташовані на відстані A одна від одної (рис. 1). Полюси O_1 і O_2 будемо вважати центрами обертання фігур, тобто центроїд. В такому випадку A є міжцентровою відстанню.

В першій полярній системі заданою кривою $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$ є логарифмічна спіраль (1). Другу криву $\rho_2 = \rho_2(\varphi)$ потрібно знайти за умови, що ці криві при обертанні навколо полюсів перекочуються одна по одній без ковзання. У вихідному положенні при $\alpha = \varphi = 0$ криві торкаються одна одної у відповідних точках кривих T_1 і T_2 (рис. 1). Сума радіус-векторів ρ_1 і ρ_2 дорівнює міжцентровій відстані A . При повороті радіус-вектора ρ_1 на кут α радіус-вектора ρ_2 повернеться на кут φ . При цьому при будь-якому значенні кута α повинна витримуватися умова: $\rho_1 + \rho_2 = A$. Звідси знаходимо вираз для ρ_2 : $\rho_2 = A - \rho_1$. Кути повороту α і φ повинні бути узгоджені між собою таким чином, щоб дуги $T_1T'_1$ і $T_2T'_2$ були рівні між собою. Будемо вважати, що кут φ буде залежним від кута α , тобто $\varphi = \varphi(\alpha)$. Знайдемо вирази для довжини дуги обох кривих і на основі рівності дуг визначимо невідому залежність $\varphi = \varphi(\alpha)$.

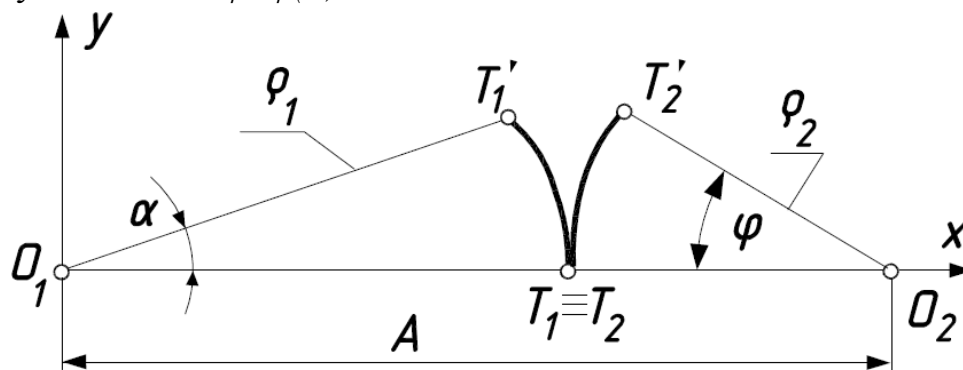


Рис. 1. Схема для визначення залежностей між радіус-векторами ρ_1 і ρ_2 та кутами α і φ

Запишемо параметричні рівняння кривих. Після переходу від рівняння (1) у полярній системі логарифмічна спіраль у декартовій системі опишеться наступним чином:

$$x_1 = ae^{b\alpha} \cos \alpha; \quad y_1 = ae^{b\alpha} \sin \alpha. \quad (2)$$

Зважаючи на те, що $\rho_2 = A - \rho_1 = A - ae^{b\alpha}$, а також на те, що радіус-вектор ρ_2 здійснює поворот на кут φ в протилежну сторону від кута α , параметричні рівняння розшукуваної кривої запишуться:

$$x_2 = (A - ae^{b\alpha}) \cos \varphi + A; \quad y_2 = -(A - ae^{b\alpha}) \sin \varphi. \quad (3)$$

Похідна довжини дуги логарифмічної спіралі (2) має наступний вираз:

$$\frac{ds_1}{d\alpha} = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} = a\sqrt{1+b^2} e^{b\alpha}. \quad (3)$$

Похідна довжини дуги кривої (3) із врахуванням, що $\varphi = \varphi(\alpha)$, запишеться наступним чином:

$$\frac{ds_2}{d\alpha} = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2} = \sqrt{a^2 b^2 e^{2b\alpha} + \varphi'^2 (A - ae^{b\alpha})^2}. \quad (4)$$

На основі рівності дуг кривих їх похідні (3) і (4) теж рівні між собою. Прирівняємо вирази (3) і (4) між собою і розв'яжемо відносно $d\varphi/d\alpha$:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{ae^{b\alpha}}{A - ae^{b\alpha}}. \quad (5)$$

Після інтегрування виразу (5) одержимо:

$$\varphi = -\frac{1}{b} \ln(A - ae^{b\alpha}) + c, \quad (6)$$

де c – стала інтегрування.

Виходячи із умови, що при $\alpha=0$ кут $\varphi = -\pi$, знаходимо вираз сталої c , із врахуванням якої рівність (6) остаточно приймає вигляд:

$$\varphi = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{A-a}{A - ae^{b\alpha}}\right) - \pi. \quad (7)$$

Відстань A можна взяти довільно. Однак в такому випадку при повороті радіус-вектора ρ_1 на заданий кут α радіус-вектор ρ_2 повернеться на непередбачуваний кут φ , отже процес побудови другої кривої стає некерованим. Поставимо умову, щоб при повороті радіус-вектора ρ_1 на заданий кут α радіус-вектор ρ_2 теж повернувся на потрібний нам кут φ . Для цього розв'яжемо рівняння (7) відносно відстані A :

$$A = a \frac{e^{b(\pi+\alpha+\varphi)} - 1}{e^{b(\pi+\varphi)} - 1}. \quad (8)$$

Поставимо умову, щоб при повороті радіус-вектора ρ_1 на 180° радіус-вектор ρ_2 теж повернувся на 180° . Потрібно мати на увазі, що після повороту радіус-вектора ρ_1 на 180° кінцеве положення радіус-вектора ρ_2 набуде значення $\varphi=0^\circ$, оскільки на початку повороту цей кут був рівним

$\varphi = -180^\circ$ (рис. 1). Підставимо у (8) кінцеві значення кутів $\alpha = 180^\circ$ $\varphi = 0^\circ$ і отримаємо:

$$A = a(1 + e^{b\pi}). \quad (9)$$

Перепишемо вираз кута φ (7) після підстановки в нього відстані (9):

$$\varphi = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{e^{b\pi}}{1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha}} \right) - \pi. \quad (10)$$

Підставляємо вираз кута φ із (10) і відстані A із (9) у (3) і після перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned} x_2 &= a(1 + e^{b\pi}) - a(1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha}) \cos \left(\frac{1}{b} \ln \frac{e^{b\pi}}{1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha}} \right); \\ y_2 &= a(1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha}) \sin \left(\frac{1}{b} \ln \frac{e^{b\pi}}{1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

На рис. 2 (ліворуч) за рівняннями (2) і на рис. 2 (праворуч) за рівняннями (11) побудовано криві при $a=1$, $b=1$ і при зміні кута α в межах $\alpha = 0^\circ \dots 180^\circ$. Відстань A згідно формули (9) становить: $A=24,14$. Візуально криві сприймаються конгруентними. Вони такими і є. Параметричні рівняння (2) і (11) різні, хоча вони описують одну і ту ж криву. Однак процес побудови цих кривих згідно кожного рівняння різних. В одному випадку зростанню кута α відповідає рух точки по кривій в напрямі зменшення кривини, в другому – навпаки.

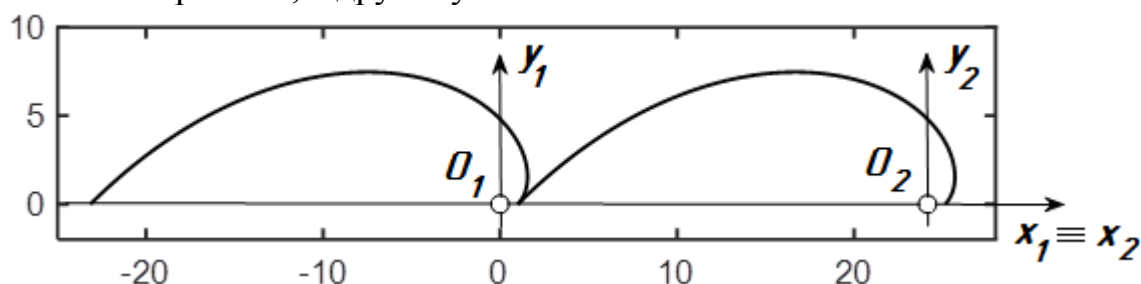


Рис. 2. Криві, побудовані за рівняннями (2) і (11)

Сталій $b=1$ відповідає кут 45° , під яким крива перетинає радіус-вектори, включаючи осі координат Ox і Oy . Якщо криві, зображені на рис. 2 відобразити симетрично осі Ox , то ми отримаємо дві замкнені криві, зображені на рис. 3,а вгорі. В точках перетину симетричних кривих утворюється прямий кут. Після повного обкочування замкнених кривих одна по одній навколо нерухомих полюсів (центрів обертання) вони займуть положення, показане на рис. 3,а внизу. На решті рисунків показано окремі положення замкнених кривих (центроїд) при збільшенні кута повороту α однієї із них.

Побудова окремих положень здійснювалася за наступним алгоритмом. Центроїду (2), яку будемо вважати ведучою, повертатимемо навколо свого полюса (точки O_1) на конкретний кут α_i . Параметричні рівняння повернутої центроїди запишуться:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= ae^{b\alpha} \cos \alpha \cos \alpha_i - ae^{b\alpha} \sin \alpha \sin \alpha_i; \\ y_{1i} &= ae^{b\alpha} \cos \alpha \sin \alpha_i + ae^{b\alpha} \sin \alpha \cos \alpha_i. \end{aligned} \quad (12)$$

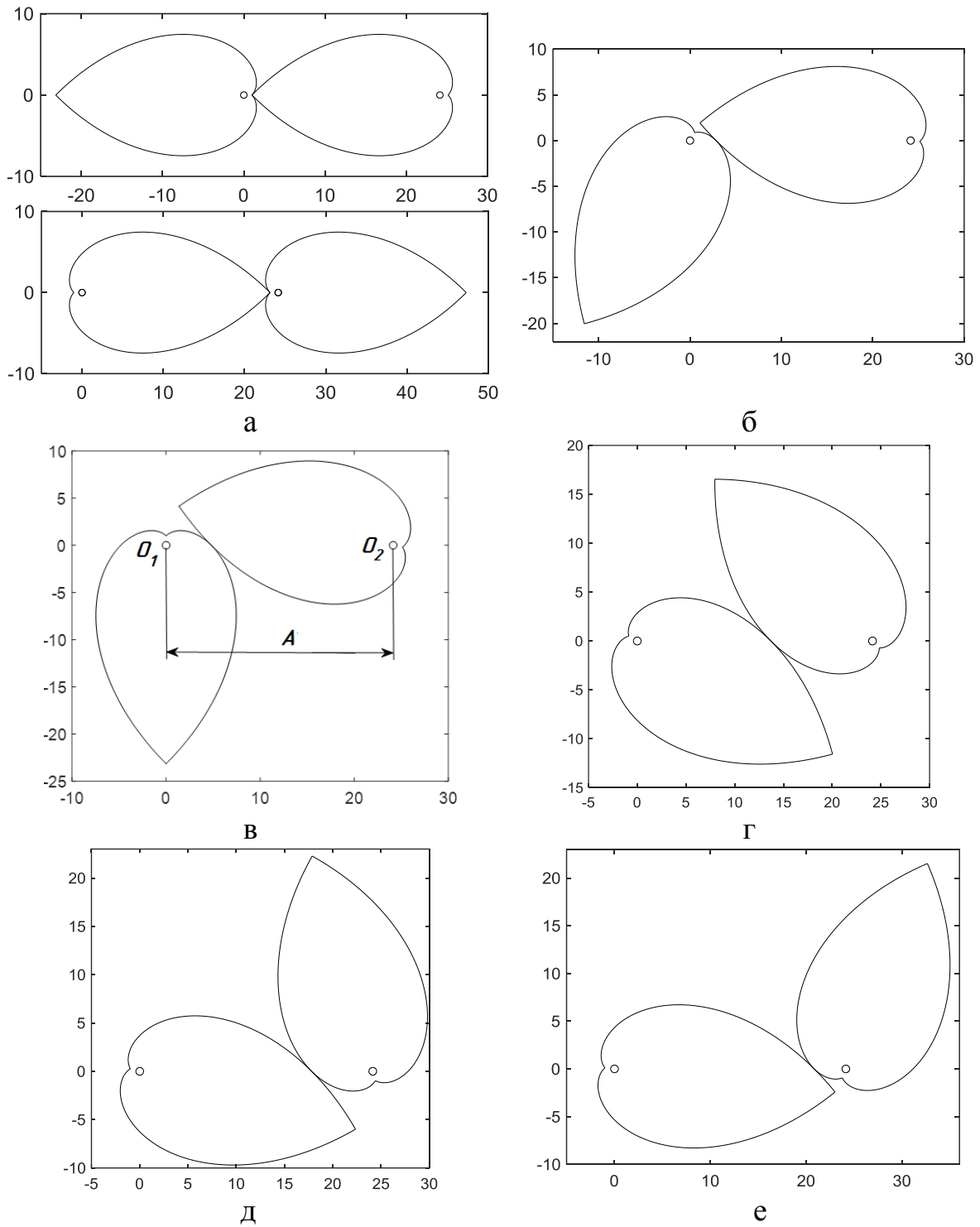


Рис. 3. Послідовні положення двох конгруентних центрів при їх взаємному коченні одна по одній з одночасним обертанням навколо нерухомих точок

Після тригонометричних перетворень рівняння (12) запишуться більш компактно:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= ae^{b\alpha} \cos(\alpha + \alpha_i); \\ y_{1i} &= ae^{b\alpha} \sin(\alpha + \alpha_i). \end{aligned} \quad (13)$$

В рівняннях (13) $ae^{b\alpha} = \rho_1$. Поворот другої центроїди здійснимо аналогічно: радіус-вектор ρ_2 повернемо на відповідний кут φ_i . При цьому слід мати на увазі, що $\rho_2 = A - \rho_1 = A - ae^{b\alpha} = a(1 + e^{b\pi}) - ae^{b\alpha} = a(1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha})$. Після повороту на кут φ_i параметричні рівняння другої центроїди за аналогією із (13) запишуться:

$$\begin{aligned} x_{2i} &= a(1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha}) \cos(\alpha + \varphi_i); \\ y_{2i} &= a(1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha}) \sin(\alpha + \varphi_i). \end{aligned} \quad (14)$$

Відповідний кут повороту другої центроїди знайдемо із формули (10) підстановкою в неї кута α_i :

$$\varphi_i = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{e^{b\pi}}{1 + e^{b\pi} - e^{b\alpha_i}} \right) - \pi. \quad (15)$$

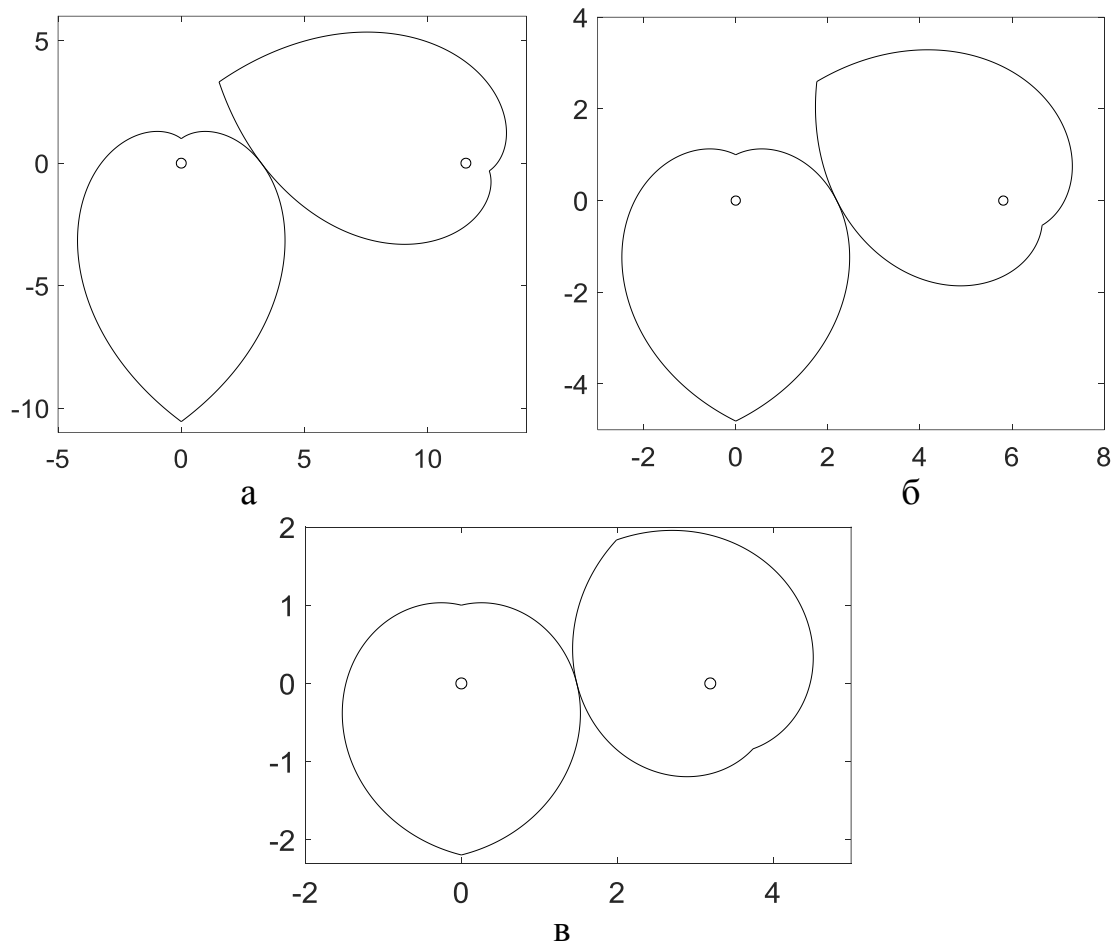


Рис. 4. Конгруентні центроїди із симетричних дуг логарифмічної спіралі, побудовані при різних значеннях сталої b :

а) $b=0,75$, $A=11,55$; б) $b=0,5$, $A=5,81$; в) $b=0,25$, $A=3,193$

Після цього параметричні рівняння другої центроїди, яка перебуває у точковому контакті із першою центроїдою, отримаємо підстановкою кута

φ_i із (15) у (14). Після цього положення повернутої другої центроїди є визначеним. Для того, щоб перша і друга центроїди торкалися одна одної в спільній точці, центроїду (14) потрібно змістити в напрямі осі Ox на величину міжцентрової відстані (9). На рис. 3, в зображено положення центроїд для $\alpha_i=90^\circ$, а також показано міжцентрову відстань A .

Центроїди, що складаються із двох симетричних дуг логарифмічної спіралі (рис. 3), мають прямі кути, утворені цими кривими в точках їх перетину. Це найменший по величині кут, при якому можливе обертання центроїд навколо нерухомих центрів з одночасним ковзанням одна по одній. При виході із положення, коли вершини цих кутів торкаються одна одної (рис. 3, а), вершина однієї кривої починає свій рух перпендикулярно до іншої, як це робить точка евольвенти при обкочуванні прямої по еволюті. При кутові, меншому за 90° , кочення фізичних моделей центроїд стає неможливим, оскільки при проходженні точки контакту вершин їх кутів буде відбуватися заклинювання. Отже, на значення сталої b вводиться обмеження: $b \leq 1$. На рис. 4 побудовано центроїди для різних значень сталої b і відповідної міжцентрової відстані при $\alpha_i=90^\circ$.

Як видно із рис. 4, по мірі зменшення сталої b форма центроїд все більше наближається до форми кола. При $b=0$ радіус-вектор ρ згідно формули (1) перетворюється у сталу величину: $\rho=a$. Отже граничною формою таких центроїд є конгруентні кола.

Висновки та перспективи. Із дуг логарифмічної спіралі можна утворити конгруентні центроїди, які можуть обертатися навколо нерухомих центрів і одночасно перекочуватися одна по одній без ковзання. В полярній системі координат дуга логарифмічної спіралі відповідає зміні полярного кута від нуля до 180° . Замкнена центроїда утворюється двома симетричними дугами. Центром обертання є полюс, тобто початок полярної системи координат. Важливою характеристикою логарифмічної спіралі є сталий кут, під яким вона перетинає всі свої радіус-вектори. Для забезпечення кочення фізичних моделей таких центроїд без заїдання в особливих точках цей кут має бути рівним 45° або більшим нього. При зростанні цього кута форма центроїди наближається до форми кола і перетворюється в нього, коли кут стає рівним 90° .

Література

1. *Падалко А.П.* Зубчатая передача с некруглым колесом / А.П. Падалко, Н.А. Падалко // *Теория механизмов и машин*, 2013. – № 2. – Т. 11. С. 89 – 96. Режим доступу: <http://tmm.spbstu.ru/22/padalko.pdf>.
2. *Литвин Ф.Л.* Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. Москва : Наука, 1968. 584 с.
3. *Литвин Ф.Л.* Некруглые зубчатые колеса / Ф.Л. Литвин. Москва : Машгиз, 1956. 312 с.

4. *B. Laczik*. Design and Manufacturing of Non-Circular Gears by Given Transfer Function. [Электронный ресурс] / *B. Laczik*. Режим доступа: <http://www.hexagon.de/pdf/noncgear.pdf>.
5. *D. Mundo*. Use of Non-Circular Gears in Pressing Machine Driving Systems / [Электронный ресурс] / *D. Mundo, G. A. Danneli*. Режим доступа: <http://www.wseas.us/e-library/conferences/udine2004/papers/483-172.pdf>.
6. *Коврегін В.В.* Аналітичний опис центроїд не круглих зубчатих коліс / *В.В. Коврегін, І.В. Маловик* // *Праці ТДАТУ*. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь : ТДАТУ, 2011. Т. 49, Вип. 4. С. 125 – 129.
7. *Легета Я.П.* Опис та побудова спряжених центроїд некруглих зубчатих коліс / *Я.П. Легета* // *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь : МДПУ ім. Богдана Хмельницького, 2014. Вип. 3. С. 87 – 92.
8. *Легета Я.П.* Геометричне моделювання центроїд некруглих зубчатих коліс за передавальною функцією / *Я.П. Легета, О.В. Шоман* // *Науковий журнал: МНУ імені В.О. Сухомлинського*. Геометричне моделювання та інформаційні технології. № 2, жовтень, 2016. С. 59 – 63.
9. *T. Hasse*. Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen. [Электронный ресурс] / *T. Hasse*. Режим доступа: http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf.

ОТДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ КОНГРУЭНТНЫХ ЦЕНТРОИД НЕКРУГЛЫХ КОЛЕС, ОБРАЗОВАННЫХ ДУГАМИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛИ

Т.А. Кресан, С.Ф. Пилипака, И.Ю. Грищенко, В.Н. Бабка
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины,
Киев

Рассмотрено качение конгруэнтных кривых одна по другой без скольжения, которые являются дугами логарифмической спирали. Две симметричные дуги образуют замкнутый контур с общим полюсом полярной системы координат. Такая фигура напоминает известный символ сердца с полюсом на линии симметрии. В статье показано и математически доказано, что при надлежащем выборе расстояния между полюсами таких фигур они могут перекатываться одна по другой, вращаясь вокруг своих полюсов.

Если одна фигура перекатывается по другой, то геометрическое место мгновенных центров вращения по отношению к неподвижной фигуры лежит на контуре этой фигуры и представляет неподвижную центроиду, а в системе подвижной фигуры образует подвижную центроиду. Подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной. Если в неподвижной и подвижной центроиды есть точки, сумма расстояний от которых до точки контакта является постоянной, то

точка подвижной центроиды опишет окружность с центром в точке неподвижной центроиды. Если эти точки взять за центры вращения обоих центроид, то качения подвижной центроиды по неподвижной можно заменить вращательным движением обеих центроид вокруг неподвижных центров. Точка контакта центроид во время их вращения находится на отрезке, соединяющем центры вращения и осуществляет определенное перемещение по нему. Если центроидами есть круги, то точка контакта является неподвижной на линии, соединяющей их центры.

Определенный интерес представляют конгруэнтные центроиды, например, круги одинакового радиуса. В таком случае изготовления обеих центроид происходит по одинаковой схеме. Если же центр вращения окружности сместить на определенную величину, то второй центроидой будет так называемое некруглое колесо, которое можно построить по известному алгоритму. Однако нахождение конгруэнтных некруглых колес представляет собой определенные трудности. Известным случаем таких колес является центроиды в виде конгруэнтных эллипсов, центры вращения которых расположены в одном из фокусов. При уменьшении эксцентриситета обоих эллипсов они приближаются к кругу и превращаются в него при нулевом значении этого показателя. В статье показано, что подобная трансформация возможна и для конгруэнтных центроид, образованных из дуг логарифмической спирали. Сделано аналитическое описание центроид, построено их изображения с общей точкой контакта для различных углов поворота.

Ключевые слова: качение конгруэнтных кривых; цилиндрические поверхности; аналитическое описание центроид; физические модели центроид

A SPECIAL CASE OF CONGRUENT CENTROIDS OF NONCIRCULAR WHEELS FORMED BY ARCS OF THE LOGARITHMIC SPIRAL

*T. Kresan, S. Pylypaka, I. Grischenko, V. Babka
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kiev*

Rolls of congruent curves one by one without sliding, which are arcs of logarithmic spiral, are considered. Two symmetrical arcs form a closed loop with a common pole of the polar coordinate system. This figure resembles a known heart symbol with a pole on the line of symmetry. The article shows and mathematically proved that with the proper choice of the distance between the poles of such figures, they can be rolled one by one, rotating around their poles.

If one figure is rolled over the other, the geometric location of the instantaneous centers of rotation with respect to the fixed figure lies on the

contour of this figure and represents a space centroid, and in the moving figure system forms a moving centroid. The moving centroid rolls without sliding over the stationary. If fixed and moving centroids have points whose distance from the contact point is constant, then the point of the moving centroid will describe the circle which center is at the point of the fixed centroid. If these points are taken as centers of rotation of both centroids, then the rolling of the moving centroid by the fixed one can be replaced by the rotational motion of both centroids around the stationary centers. The point of contact of the centroids during their rotation is in a segment that connects the centers of rotation and makes some movement on it. If the centroids are circles, then the point of contact is fixed on the line joining their centers.

Of particular interest are congruent centroids, such as circles of the same radius. In this case, the manufacture of both centroids is the same. If you shift the center of rotation of the circle at definite value, than the second centroid will be the so-called noncircular wheel, which can be built by a well-known algorithm. However, finding congruent noncircular wheels presents some difficulties. A known case of such wheels are centroids in the form of congruent ellipses whose centers of rotation are located in one of the focuses. By reducing the eccentricity of both ellipses, they approach the circle and turn into it at zero value of this indicator. The paper shows that a similar transformation is possible for congruent centroids formed from arcs of the logarithmic spiral. An analytical description of the centroids was made and their images were created with a common point of contact for different angles of rotation.

Keywords: rolling congruent curves; cylindrical surfaces; analytical description of centrodes; physical models of centrodes