УДК 519.21
DOI: 10.32347/0131-579x.2020.99.200-207

к.ф-м.н. доцент **Філонов Ю.П.**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
к. ф-м. н. доцент **Наголкіна З.І.**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
Київський національний університет будівництва і архітектури

РОЗВИТОК БАГАТОРЕЖИМНОЇ НАКОПИЧУВАЛЬНОЇ МАРКОВСЬКОЇ СИСТЕМИ

Розглядаються системи, які заробляють ресурс, грошовий в економічній інтерпретації, і використовують його для функціонування і накопичень. Шукаються умови зростання накопичень, які одночасно забезпечують непозитивність керуючого марковського ланцюга. Істотним є повсюдна неоднорідність фазового простору. У фазовому просторі (загального типу) такої системи задані невід'ємна функція X, функція Z зі значеннями 1,2, ..., d, і незвідний однорідний ланцюг Маркова W_n, *n = 0,1,... . Значення* $X\,(W_n)$ *вказують рівень ресурсу системи в момент n, значення* $Z\,(W_n)$*) вказують режим,що визначається кількістю місць обслуговування, пристроїв, сервісних ліній, кількістю офісів, працівників і т.д., а також типом функціонування - ремонт, профілактика, простій роботи. Нехай* $a(w_i)$ *– середні прирости X за одиничний період для довільного набору станів* $\overline{w} = (w_1, w_2 \dots w_d)$, $Z\,(w_i) = i$, $p\,(w_i, j)$ *– ймовірність переходу зі стану* w_i *в режим* j, $P\,(\overline{w}) -$ *відповідна стохастична матриця, а* $\pi_1(\overline{w}), \pi_2(\overline{w}), \dots, \pi_d(\overline{w})$ *– стаціонарний розподіл імовірностей для неї. Нехай* $a'(w_i)$ *– значення* $a(w_i)$, *збільшене на значення* $\psi\big(X(w_i)\big)$ *довільної функції* $\psi(x) > 0$, *яка є монотоною та інтегрованою на інтервалі* $[0, \infty)$. *В достатньо загальному випадку, виходячі з інших робіт одного з авторів стверджується, що умова* $\sum_1^d \pi_i(\overline{w})\, a'(w_i) \quad 0$ *для великих* $X\,(w_i)$ *достатня для прийнятності системи в розумінні, що існує збіжність до 1 відносної долі того часу до моменту n, коли рівень X> C, (при n → ∞) з імовірністю 1 для довільно великого рівня C. Тобто, в часовому відношенні, яке прямує до 1, функціонування відбуватиметься в усе кращому фінансовому стані. Розглядаються також моделі, що використовують асимптотику і модель де відбувається погіршення якості системи випадковим чином, але поступово, до невигідних режимів і подальшого переходу до початкового вигідного режиму після режиму відновлення, і далі так само. У цьому випадку в умовах прийнятності використовуються не* *стаціонарні ймовірності а ймовірності погіршення системи. При цьому, розглядаються економічні аналогії зі страхуванням і рентабельністю.*

Ключові слова: система обслуговування; накопичувальні системи; системи з резервуванням; страховий внесок; страховий випадок; страхова виплата; математичне сподівання; умовне середнє; умовна ймовірність; ергодичні характеристики; загальний ланцюг Маркова; незвідний ланцюг Маркова; міра незвідності; ймовірності переходу; сполученість станів; стаціонарні ймовірності; непозитивність ланцюга Маркова; мінорантна множина.

Постановка проблеми. Наша система, яка в економічній інтерпретації заробляє ресурс для власного функціонування (включаючи обслуговування, зарплати, тощо), для резервування та накопичення управляється однорідним незвідним марковським ланцюгом W_n із загальним простором станів (див.[1], [2]). Основними параметрами будуть режим Z роботи та рівень (об'єм) X основного ресурсу системи, які є значеннями вимірних функцій на просторі станів. Режим визначається за кількістю місць обслуговування, пристроїв, сервісних ліній, кількістю офісів, працівників тощо, а також типом функціонування, як то - ремонт, профілактика, простій. Рівень основного ресурсу будемо интерпретувати в грошовому еквіваленті, або в формі оборотного капіталу, або у вигляді суми коштів на рахунках. Задача полягає в знаходженні умов самостійного функціонування з тенденцією до зростання добробуту всіх співробітників і власників і фірми в цілому.

Ціль статті. Сформулювати умови самостійного функціонування з неухильним зростанням (зрозуміло, з випадковими коливаннями, далі це уточнимо) рівня ресурсу (капіталу) багаторежимної марковської накопичувальної системи в термінах ймовірностей режимів і середніх приростів ресурсу (прибутків) в різних ситуаціях (фазових станах).

Аналіз основних досліджень і публікацій. Поведінка реальних систем в тій чи іншій мірі має випадковості, і в умовах певної стабільності на проміжках часу досліджується в основному за допомогою однорідних марковських процесів, для дискретного часу – ланцюгів. Є такі несумісні типи поведінки процесу з плином часу: ергодичність (позитивність), 0-рекурентність і транзитивність. Найбільш повно вивчена ергодичність, а що відбувається біля знайдених меж ергодичності при відсутністі повсюдно просторової однорідності процесу, вивчено набагато менше. Це відповідає ситуації, яку ми вивчаємо в цій роботі у вигляді прийнятності, про яку буде сказано далі. Наша робота заснована на роботі [3], окремий випадок якої пов'язаний з поведінкою нашої системи при наявності тільки 1-го режиму, та на роботі [4], окремий випадок якої пов'язаний з поведінкою нашої системи при наявності багатьох режимів, де простір і умови суттєво вужчі. Найбільш об'ємна праця з цієї тематики це [5]

Основна частина. Існує багато імовірнісних моделей, що передбачають необмежений розвиток деякої системи, доки не з'являться якісь обмежувальні фактори. Позначимо $X_n = X(W_n) \in [0, \infty) -$ значення ресурсу, $Z_n = Z(W_n) \in D -$ значення режиму (на даний момент (період) n= $0,1, \dots$), D ={1,2,…,d} – множина режимів. Назвемо модель (систему) *прийнятною*, якщо для будь-якого числа C відносна частка часу, коли $X_n > C$ з плином часу з імовірністю 1 прямує до 1.

Загальні позначення: $M_w\,(\dots)$ та $P_w\,(\dots) -$ умовне середнє та умовна ймовірність при умові $W_0 = w$; $\delta = X_{n+1} - X_n$- приріст ресурсу (прибуток); $a = a(w)= M_w\, \delta$- середній прибуток; $p(w, j) = P_w(Z_1 = j)$ імовірність з стану w перейти до роботи в режимі j в наступному періоді; $E_i = \{w | Z(w) = i\}$, $(i \in D)$ -множина станів, коли система працює в i-му режимі.

Нехай виконуються формальні припущення (див. [2]): сігма-алгебра фазового простору сепарабельна, ланцюг незвідний, X суттєво необмежена, множина $\{w|X < C\}$ є скінченною сумою мінорантних (small) множин при усіх достатньо великих C.

Також припускаємо обмеженість моментів $m(w) = M_w|\delta| < C$ та достатню сполученність станів: для будь-якого C існує таке $C' > C$, що суттєві (не нульової міри незвідності) підмножини в $\{w|X > C'\}$ досягаються з будь-якого стану з множини $\{w|X > C'\}$ при забороненій множині $\{w|x < C\}$. І, конкретно, існують в D простий замкнутий цикл режимів $k_1 \to k_2 \to \dots \to k_{d+1} \to k_1$, стала *e>0*, для будь якого числа *C* число C', такі, що для усіх *i= 1,2,…,d* буде $P_w(\delta < -e, Z_1 = Z_0)$ *>e* при *X(w)>C та* $P_w(Z_1 = k_{i+1}, X_1 > C)$ *>0* при *Z(w)=*$k_i, X(w) > C'$ (в твердженні 4 вважаємо що стани з D сполучаються по циклу $k_1 \to k_2 \to \dots \to k_{d+1} \to k_1$ відносно матриці P^0). Перейдемо до викладення результатів (детальне обґрунтування результатів – окрема публікація).

Результати. Далі буде використовуватись довільна обмежена спадна додатня функція $\psi(x)$ інтегровна на $[0, \infty)$, а саме $\int_0^\infty \psi(x)\, dx < \infty$.

Модель 1 (загальна). Додаткові: позначимо $\overline{w}$ =$(w_1, w_2, \dots, w_d)$ набір станів $(w_1, w_2, \dots, w_d)$з умовою $Z(w_i) = i$, $i = 1,2, \dots, d$, перехідні ймовірності $p(w_i, j)$ режимів вважаємо елементами матриці $P(\overline{w})$, вектор $\pi(\overline{w}) = (\pi_1(\overline{w}), \pi_2(\overline{w}), \dots, \pi_d(\overline{w}))$ - це розподіл стаціонарних ймовірностей для неї. Вектор $a(\overline{w}) = (a(w_1), \dots, a(w_d))$ це набір середніх прибутків в станах з набору $\overline{w}$. Збільшимо значення функції $a(w)$ на значення функції $\psi(x)$**.** Відповідно $a'(w) = a(w) + \psi(x)$ (де $x = X(w)$) це є вектор $a'(\overline{w})$**.**

Твердження 1. Нехай виконується нерівність $\pi\ (\overline{w})a'(\overline{w}) \geq 0$ (для усіх $\overline{w}$ з достатньо великими $X(w_i)$). Тоді м.л. W_{n} непозитивний, а керована ним відповідна система прийнятна.

Модель 2 (проста зміна режимів). Нехай якість роботи системи за один період може або зберегтися, або погіршитися до слідуючого рівня (рівні відповідають режимам від 1-го до d -го).

Позначимо відповідні ймовірності переходів $\alpha(\omega) = P_w(Z_1 = i + 1) > 0$ $\left(w \in E_i, P_w(Z_1 = i) = 1 - \alpha(w)\right)$, тут $d + 1\ = 1$(*додавання по циклу),* останній режим d - режим ремонту, в якому ми ще залишаємось, або повертаємось до режиму 1 повноцінної роботи.

Твердження 2. Нехай є числа l_i, які наступним чином обмежують середні прирости ресурсу знизу (для всіх $i \in D, w \in E_i, x = X(w)$):

$a(w) \geq l_i\alpha(w) - \psi(x),\ \ \sum l_i \geq 0.$

Тоді м.л. W_n непозитивний, а відповідна система прийнятна.

Модель 2 (з асимптотикою). Це модель 2, в якій для всіх i є асимптотика, а саме, при $x \to \infty, w \in E_i$:

$$a(w) = a_i^0 + a_i^1 x^{-1} + O(x^{-2}),$$
$$\alpha(w) = \alpha_i^0 + \alpha_i^1 x^{-1} + O(x^{-2})$$

(пишемо *u = O(v)* коли $|u\,|$< *C v* для деякого $C\ > 0$)

Твердження 3. Нехай в моделі 2 з асимптотикою виконуються:

при $\alpha_{1,\dots,i}^0 > 0$

умова $\sum \frac{a_i^0}{\alpha_i^0} > 0$,або умова (для всіх i) $\sum \frac{a_i^0}{\alpha_i^0} = 0, a_i^1 \quad a_i^0\,\alpha_i^1/\alpha_i^0$;

при $\alpha_1^0 = 0,\ \alpha_{2,\dots,i}^0 > 0$

умова $a_1^0 > 0$, або умова $a_1^0 = 0,\ \frac{a_1^1}{\alpha_1^1} + \sum_{i>1} \frac{a_i^0}{\alpha_i^0} > 0$, або умова

$a_1^0 = 0,\ \frac{a_1^1}{\alpha_1^1} + \sum_{i>1} \frac{a_i^0}{\alpha_i^0} = 0,\ a_i^1 \quad a_i^0\,\alpha_i^1/\alpha_i^0$ (для всіх i).

Тоді м.л. W_n непозитивний, а відповідна система прийнятна.

Модель 3 (із довільними ймовірностями переходів режимів, але з асимптотикою для них). Нехай є стохастична матриця $P^0, (\pi_1, \dots, \pi_d)$ – стаціонарні ймовірності для неї. Для цієї матриці та деяких чисел a_i виконуються співвідношення (для всіх $i, j \in D, w \in E_i, x = X(w)$):

а) $a(w) \geq a_i - \psi(x); \sum \pi_i a_i \geq 0;$

б) $\left|p(w,j) - P_{ij}^0\right| = O(\psi(x)).$

Твердження 4. Нехай виконуються умова (а) обмеженості середніх прибутків знизу та умова (б) збіжності при $x \to \infty$ перехідних імовірностей режимів моделі 3. Тоді марковський ланцюг (м. л.) W_n непозитивний, а відповідна система прийнятна.

Висновки та перспективи. В статті отримано умови, які дозволяють реальним системам, які можуть працювати в різних режимах і керуються однорідним марковським ланцюгом у загальному фазовому просторі станів бути самодостатніми (самоокупними), і з імовірністю одиниця необмежено збільшувати свій основний ресурс (капітал), який припадає на одиницю часу. Економічні міркування. Умови додатності зважених по стаціонарним імовірностям режимів середніх прибутків типу «$\sum \pi_i a_i$» інтуїтивно сприймаються як умови, необхідні для рентабельності (в δ включаємо фіксовані страхові внески). При падінні ресурсу нижче критичного рівня (страховий випадок) збільшуємо X на страхову виплату. Для процесу системи окремі падіння ресурсу (фінансового стану) не виключаються, і навіть буде необмежена кількість розорень (при 0- рекурентності керуючого марковського ланцюга), які покриваються страховими виплатами і, оскільки частота розорень буде падати з часом (неергодичність відповідного марківського ланцюга), то страхові виплати будуть покриватися страховими внесками, тобто співпраця вигідна і страховій компанії, і прийнятність для страхової фірми означатиме перевищення доходів над витратами. Більш того, навіть при від'ємності $\sum \pi_i(\overline{w})a(w_i)$ (інтегрально обмеженої), як випливає з наших тверджень, буде зберігатися обопільна вигода. Ми припускаємо, що наш загальний підхід дозволить розглянути більше конкретних моделей, ніж наведено у статті.

Література

1. *Suhov Y., Kelbert M.* Probability and Statistics by Example: Volume 2, Markov Chains, Cambridge University Press, 2008. ISBN: 978-0-521-84767-4.
2. *Nummelin E.* General irreducible Markov chains and nonnegative operators, Cambridge University Press, London, 1984.
3. *Mikhaylenko V., Filonov Yu.* Unlimiteness by the probability system that are guided by common homogeneous Markov chain, Management of Development of Complex systems, 2015, 22 (1), 107-115.
4. *Filonov Yu.* Markov chains with finite -component state space, Theory Probab. and Math. stat., No 40, 1990, p.110-115.
5. *Meyn S. and Tweedie R.L.,* Markov chains and stochastic stability, Cambridge University Press, 2009. ISBN: 978-0-521-73182-9.

References

1. *Suhov Y., Kelbert M.* Probability and Statistics by Example: Volume 2, Markov Chains, Cambridge University Press, 2008. ISBN: 978-0-521-84767-4.

2. *Nummelin E.* General irreducible Markov chains and nonnegative operators, Cambridge University Press, London, 1984.
3. *Mikhaylenko V., Filonov Yu.* Unlimiteness by the probability system that are guided by common homogeneous Markov chain, Management of Development of Complex systems, 2015, 22 (1), p. 107-115.
4. *Filonov Yu.* Markov chains with finite -component state space, Theory Probab. and Math. stat., No 40, 1990. p.110-115.
5. *Meyn S. and Tweedie R.L.,* Markov chains and stochastic stability, *Cambridge* University Press, 2009. ISBN: 978-0-521-73182-9.

к.ф-м.н. доцент **Філонов Ю.П.**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
к. ф-м. н. доцент **Наголкіна З.І.**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
Київський національний університет будівництва і архітектури

РАЗВИТИЕ МНОГОРЕЖИМНОЙ НАКОПИТЕЛЬНОЙ МАРКОВСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматриваются системы, которые зарабатывают ресурс, денежный в экономической интерпретации, и используют его для функционирования и накоплений. *Ищутся условия роста накоплений, которые одновременно обеспечивают непозитивность управляющей марковской цепи. Существенным является повсеместная неоднородность фазового пространства. В фазовом пространстве (общего типа) такой системы заданы неотрицательная функция X, функция Z со значениями 1,2,…,d, неприводимая однородная цепь Маркова* W_n, *n=0,1,…. Значения* $X(W_n)$ *указывают уровень ресурса системы в момент n, значения* $Z(W_n)$ *указывают режим, который определяется по количеству мест обслуживания устройств, сервисных линий, количеством офисов, работников и т.д., типу функционирования как ремонт, профилактика, простой работы. Пусть* $a(w_i)$ *– средние приращения X за 1-ный период для произвольного набора* $\overline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d), Z(w_i) = i$ *состояний,* $p(w_i, j) -$ *вероятность перехода 1-ный период из состояния* w_i *в режим j,* $P(\overline{w})$ *– соответствующая стохастическая матрица, а* $\pi_1(\overline{w}), \pi_2(\overline{w}), \dots, \pi_d(\overline{w})$ *– стационарное распределение вероятностей для нее. Пусть* $a'(w_i)$ *– значение* $a(w_i)$*, увеличенное на значение* $\psi\big(X(w_i)\big)$ *произвольной функции* $\psi(x) > 0$, монотонной *и интегрируемой на интервале* $[0, \infty)$. *В достаточно общем случае на основе других работ*

авторов утверждается, что условие $\sum_{1}^{d} \pi_i(\overline{w})\, a'(w_i) \quad 0$ *для больших X* (w_i) *достаточно для приемлемости системы в том смысле, что существует сходимость к 1 относительной доли того времени до момента* n*, когда уровень X> C, (при* $n \to \infty$ *с вероятностью 1, для произвольно большого уровня C). То есть, во временном отношении, которое стремится к 1, функционирование будет происходить во все лучшем финансовом состоянии. Рассматриваются также модели, использующие асимптотику и модель ухудшения качества системы случайным образом, но постепенно, до невыгодных режимов и последующего перехода к начальному выгодному режиму, после режима восстановления, и далее подобным образом. В этом случае в условиях приемлемости используются не стационарные вероятности, а вероятности ухудшения системы. При этом рассматриваются экономические аналогии со страхованием и рентабельностью.*

Ключевые слова: система обслуживания; накопительные системы; системы с резервированием; страховой взнос; страховой случай; страховая выплата; математическое ожидание; условное среднее; условная вероятность; эргодические характеристики; общая цепь Маркова; неприводимая цепь Маркова; мера неприводимости; вероятности перехода; сообщающиеся состояния; стационарные вероятности; непозитивность цепи Маркова; минорантное множество.

Ph. D., assoc. prof **Yuri Filonov**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
Ph. D., assoc. prof **Zoya Nagolkina**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
Kyiv National University of Construction and Architecture» (KNUCA)

DEVELOPMENT OF A MULTI-MODE ACCUMULATIVE MARKOV SYSTEM

Systems are considered that earn a resource, monetary in the economic interpretation, and use it for functioning and accumulation. The conditions for the growth of savings are sought, which simultaneously ensure the non-positivity of the governing Markov chain. The widespread inhomogeneity of the phase space is essential. In the phase space (of a general type) of such a system, a nonnegative function X, a function Z with values 1,2,…, d*, an irreducible homogeneous Markov chain* W_n*, n = 0,1,… are given. The* $X(W_n)$ *values indicate the resource level of*

the system at time n, the $Z(W_n)$ values indicate the mode, which is determined by the number of service locations, devices, service lines, the number of offices, workers, etc., the type of functioning as repair, prevention, downtime work. Let $a(w_i)$ be the average increments of X over the 1-st period for an arbitrary set набора $\overline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d)$, $Z(w_i) = i$ states, $p(w_i, j)$ is the probability of transition from the state w_i into mode j, $P(\overline{w})$ is the corresponding stochastic matrix, and $\pi_1(\overline{w}), \pi_2(\overline{w}), \dots, \pi_d(\overline{w})$ – is the stationary probability distribution for it. Let $a'(w_i)$ be the value of $a(w_i)$ increased by the value $\psi(X(w_i))$ of an arbitrary function ψ (x)> 0, monotone and integrable on the interval [0, ∞). In a fairly general case, based on other of the authors' works, it is argued that the condition $\sum_1^d \pi_i(\overline{w})\, a'(w_i) \quad 0$ for large X (w_i) is sufficient for the system to be acceptable in the sense that there is a convergence to 1 of the relative fraction of that time until the moment n, when the level X> C, (as n → ∞ with probability 1, for an arbitrarily large level C). That is, in a time relation that tends to 1, the functioning will take place in an ever better financial condition. Models are also considered that use the asymptotics and the model of deterioration of the system quality in a random way, but gradually, until unfavorable modes and the subsequent transition to the initial favorable mode, after the recovery mode, and further in a similar way. In this case, under the conditions of acceptability, it is not the stationary probabilities that are used, but the probabilities of system deterioration. It examines economic analogies with insurance and profitability.

Keywords: service system; accumulative systems; systems with redundancy; insurance premium; insured event' insurance payment; mathematical expectation; conditional mean; conditional probability; ergodic characteristics; general Markov chain; irreducible Markov chain; degree of irreducibility; transition probabilities; combination of states; stationary probabilities; nonpositivity of Markov chain; minor set.