

## ЧОТИРИВИМІРНА КУЛЯ У ГРАФІЧНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ

*У роботі представлено метод геометричного моделювання чотирирівимірної кулі. Для цього розглянуто закономірності змінення форми проєкцій простих геометричних образів двовимірного та тривимірного просторів при обертанні. Розглянуто обертання відрізка та кола навколо осі; показано, що при обертанні форма їх проєкцій змінюється від максимального значення до виродженої проєкції. З'ясовано, що множина точок виродженої проєкції належить осі обертання, а кожен  $n$ -вимірний геометричний образ при обертанні формує собою тіло більш високої розмірності, тобто таке, що належить  $(n+1)$ -вимірному простору. Виявлені закономірності розповсюджено на 4-вимірний простір, у який поміщено кулю. Показано, що віссю обертання кулі буде вироджена проєкція у вигляді кола, а куля при обертанні змінює свої розміри від об'ємного тіла до плоского кола, далі знов збільшується, але в інший бік (тобто вивертається), а потім в оборотному порядку до початкового положення. Таке обертання більше схоже на деформацію, а така куля чотирирівимірного простору є гіперкулею.*

*Для геометричного моделювання гіперкулі та можливості її проєкційного зображення у статті використано векторну модель запропоновану П.В. Філіпповим. Визначено систему координат  $Oxyz$ . Приведено алгебраїчне рівняння гіперкулі за аналогією з тривимірним простором за визначеними координатами центру  $a, b, c, d$ . Розглянуто варіант гіперперерізу при  $t=0$ , що підтверджує рівняннями отримання двовимірної кулі тривимірного простору, точки (кулі нульового радіуса), яка збігається з центром кулі, або уявної кулі. Для варіанта  $t=d$  отримано рівняння двовимірної кулі, у якій радіус дорівнює  $R$  та координати всіх точок вздовж осі  $Ot$  дорівнюють величині  $d$ . Цікавим виявився варіант гіперперерізу  $t=k$ , при якому отримано рівняння двовимірної кулі, у якій координати всіх точок вздовж осі  $Ot$  дорівнюють величині  $k$ , а радіус дорівнює  $r_2 = \sqrt{R^2 - (k - d)^2}$ . Побудовано горизонтальні векторні проєкції гіперперерізу для різних значень  $k$ . Зроблено висновок, що сукупність горизонтальних векторних проєкцій гіперперерізів при  $t=k$  визначає еліпс.*

*Ключові слова: чотирирівимірні простори; геометричне моделювання; обертання; гіперкуля; векторна модель; гіперпереріз; векторна проєкція.*

**Постановка проблеми.** У статті розглядаються деякі теоретичні аспекти геометричного моделювання кулі у чотиривимірному просторі.

**Цілі та завдання.** Вивчення особливостей геометричних об'єктів багатовимірних просторів є актуальною задачею сучасності. Простори високих розмірностей неможна бачити, але можна відтворити у вигляді проєкцій. Метою роботи є отримання геометричної моделі чотиривимірної кулі в проєкції на тривимірний простір. Для цього потрібно виявити закономірності утворення тіл обертання у двовимірному та тривимірному просторах шляхом обертання відрізка та кола навколо осі, а також отримати графічне проєкційне зображення чотиривимірної кулі використовуючи векторну модель.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Багатовимірні простори є об'єктом дослідження геометричної науки. Але зустрінетеся з питаннями, що пов'язані з ними, можливо в багатьох галузях науки і техніки: у фізиці та механіці, у термодинаміці та фізичній хімії, у теоретичній фізиці та в астрономії, тобто там, де виникають багато параметричні залежності. Геометричні аспекти багатовимірних просторів відображено в роботах Філіппова П.В. [1]; необхідності вивчення в вищій школі основ багатовимірної геометрії присвячені роботи Соколової Л.С. [2]; розвитком та доведенням її основних положень опікуються Якуніна О.В., Михайлова Л.М. та інші. Крім того, це дуже розповсюджена тема, з якої в Інтернет ресурсах на даний час є достатньо велика кількість статей, відеоматеріалів, міркувань про те, що таке чотиривимірний простір та як уявити собі його геометричні образи. Авторами робіт є фізик Костіцин В.І., математик Щуров І. [3] тощо.

**Основна частина.** Багатовимірні простори явлені нам в різних моделях: картинках, твердженнях, теоремах, розрахунках, а також у вигляді плоских або стереографічних проєкцій. Для можливості уявити собі об'єкти високих просторів можна проводити аналогію з процесами та правилами двовимірних та тривимірних просторів, які є доступними та зрозумілими для людини.

Спробуємо розглянути аналогію від простого до складного на прикладі формування  $n$ -вимірної моделі кулі. В основі формування  $n$ -вимірних геометричних образів лежить кінематичний спосіб утворення [4]. Для граней поверхонь звичайно використовують переміщення прямолінійного геометричного образу вздовж прямолінійного відрізка, але оскільки куля є геометричним тілом обертання, то логічно використати спосіб обертання [5] для дослідження та вивчити характерні проєкції отриманих положень геометричних образів.

Візьмемо відрізок  $AB$ , який буде обертатися в площині (двовимірному просторі), перпендикулярній до осі  $x$ . На рис. 1  $a, b, в, г$  та  $д$  показані повернені положення відрізка відповідно на  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  та  $360^\circ$ .

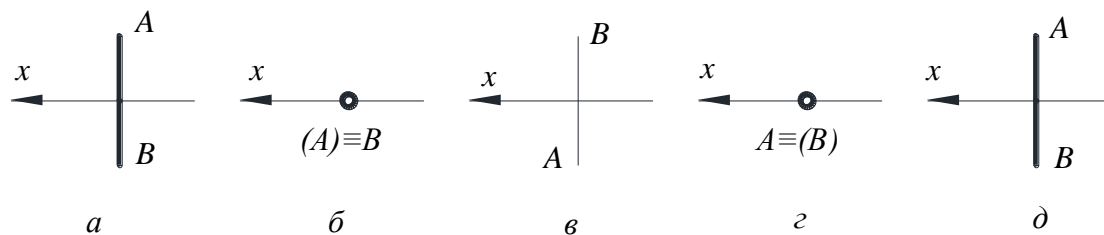


Рис.1. Проекційне зображення обертання відрізка  $AB$  навколо осі  $x$

Тобто добре видно, що при обертанні відрізка його проекція змінює довжину від максимального значення до мінімального при поверненні на  $90^\circ$  та  $270^\circ$ , тобто вироджується в точку, а після повороту на  $180^\circ$  відрізок так би мовити повертається до спостерігача оборотною стороною. Множина точок відрізка при обертанні утворює коло. Вироджена проекція відрізка належить осі обертання. Відрізок можна вважати 0-вимірною кулю, яка при обертанні утворює коло – 1-вимірну кулю.

На рис. 2 показано обертання кола  $ABCD$  у тривимірному просторі навколо осі  $y$ . Відображено проекції при поверненні на  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  та  $360^\circ$  відповідно на рис. 2  $a$ ,  $б$ ,  $в$ ,  $г$  та  $д$ . За аналогією з відрізком при обертанні на  $90^\circ$  та  $270^\circ$  коло вироджується у відрізок, а обернене на  $180^\circ$  повертається до спостерігача оборотною стороною.

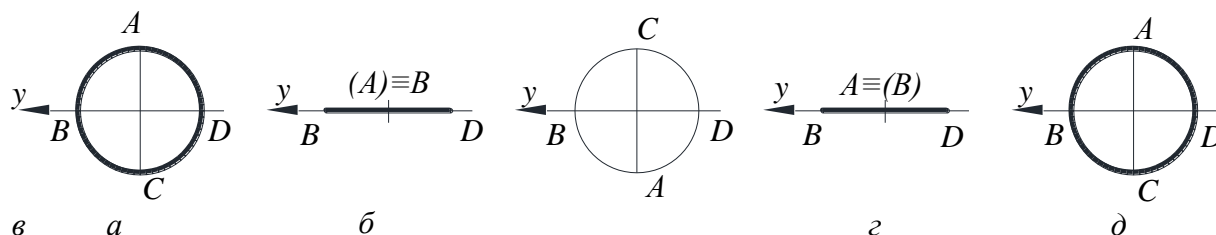


Рис.2. Обертання кола  $ABCD$  навколо осі  $y$

Потрібно відзначити, що вироджений відрізок всіма своїми точками належить осі обертання. Множина точок кола при обертанні опише кулю. Коло є 1-вимірне тіло, а куля-2-вимірне.

Із вище викладеного випливає, що при обертанні кожен  $n$ - вимірний геометричний образ (відрізок, коло) сформує собою тіло більш високої розмірності, тобто таке, що належить  $(n+1)$ - вимірному простору. Крім того при деяких обернених положеннях геометричний образ вироджується в більш простий, точки якого належать осі обертання. Тому зробимо висновок, що при обертанні 3-вимірної кулі вона опише 4-вимірне тіло та також буде мати вироджену проекцію у вигляді кола.

Відомо, що поверхня кулі складається із сукупності паралелей та меридіанів, проекції яких на площину уявляють собою відрізки та кола відповідно. Тому обертання кулі у тривимірному просторі (рис.3а) можна розглядати як поєднане обертання сукупності відрізків та кіл, яке було описано вище. Завдяки цьому спостерігач наочно бачить поверхню кулі.

Розташуємо кулю у 4-вимірному просторі. Вона пропаде із поля зору [6], оскільки всі точки кулі знаходяться у іншому просторі, який розташований під кутом  $90^\circ$  до тривимірного та не може бути видимим для спостерігача. Обернувшись на  $90^\circ$  куля займе положення, яке є виродженою проекцією, тобто утворить коло (рис.3б), яке і є віссю обертання кулі у 4-вимірному просторі.

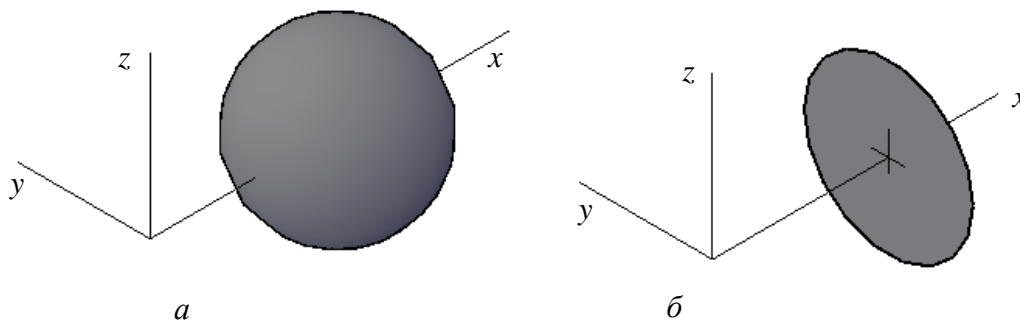


Рис. 3. Обертання кулі у 3- та 4-вимірному просторі

Розглянемо обертання кулі 4-вимірного простору у проекціях на 3-вимірний простір. За аналогією з обертанням відрізка та кола куля буде змінювати розміри своїх проекцій. Обернувшись на  $90^\circ$  куля вироджується у коло (див. рис. 3б), а при обертанні на кут  $180^\circ$  куля знов з'явиться у 3-вимірному просторі, але, так би мовити, вивернутою навиворіт. Зробивши оборот на  $360^\circ$  куля знов опиниться у 3-вимірному просторі. Отже куля при обертанні змінює свої розміри від об'ємного тіла до плоского кола, далі знов збільшується, але в інший бік (тобто вивертається), а потім в оборотному порядку до початкового положення. Таке обертання або такий рух більше схожий на деформацію, а така куля чотиривимірного простору є гіперкулею.

Побудуємо ортогональне креслення та плоскі проекції такої 4-вимірної гіперкулі, використовуючи векторну модель, яку запропоновано в роботі [4]. Розташуємо гіперкулю у системі координат  $0xyz$ , в якій четверта вісь  $t$  спів напрямлена з віссю  $y$ . Припустимо, що радіус кулі дорівнює  $R$ , а центр має координати вздовж осей відповідно  $a, b, c$  та  $d$ . Тоді рівняння гіперкулі має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + (t - d)^2 = R^2. \quad (1)$$

Для можливості побудови графічних зображень розглянемо перерізи гіперкулі різними гіперплощинами.

1. **Гіперпереріз при  $t=0$ .** Тоді вираз (1) приймає вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 - d^2.$$

В такому випадку можливі декілька варіантів гіперперерізів.

- при  $R^2 > d^2$  – утворюється звичайна двовимірна куля тривимірного простору  $xuz$ , радіус якої виразиться  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ .

- при  $R^2 = d^2$  – утвориться куля нульового радіуса, тобто точка, яка збігається з центром кулі.

- при  $R^2 < d^2$  – виходить уявна куля з радіусом  $r = \sqrt{R^2 - d^2}i$ .

2. **Гіперпереріз при  $t=d$ .** Вираз (1) приймає вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Це рівняння двовимірної кулі, у якої радіус дорівнює  $R$  та координати всіх точок вздовж осі  $0t$  дорівнюють величині  $d$ .

Зобразимо графічно такий варіант. На рис. 4 вибрано систему координат  $Oxyz$ , де напрям осі  $t$  спрямовано вздовж осі  $y$ . Горизонтальна проекція центра кулі  $O_1$  має координати  $(a, b)$ , фронтальна  $O'_{12}$  – координати  $(a, c)$ , а горизонтальна векторна проекція центру  $O_2$  гіперкулі віддалена від  $O_1$  на відстань  $d$ . Розглянуто випадок, коли координати  $a, b, c$  та  $d$  мають позитивні значення. Побудовано горизонтальну, векторну та фронтальну проекції кулі  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_{12}$ ) з центрами відповідно  $O_1, O_2, O'_{12}$  та радіусом  $R$ .

Крім того на рис. 4 виконано переріз кулі  $\alpha$  горизонтальною

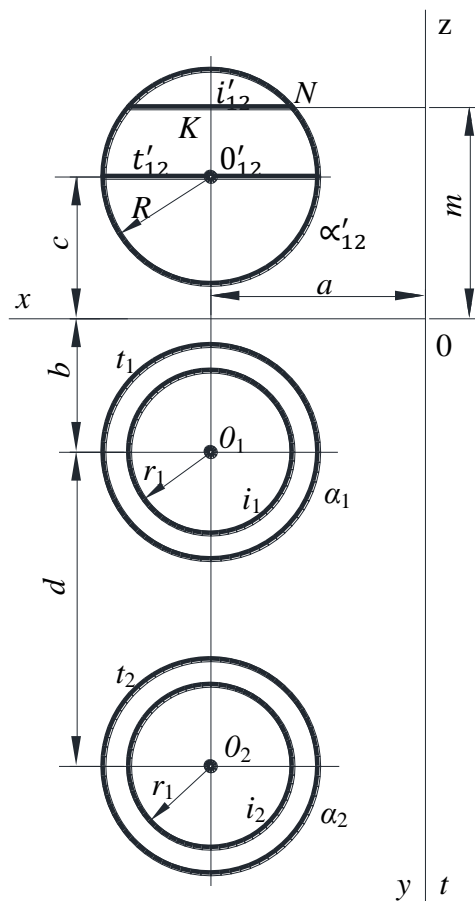


Рис. 4. Ортогональні проекції та перерізи гіперкулі горизонтальною площиною при  $t=d$

площиною  $z=c$ , який уявляє собою коло з рівнянням  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ . Фронтальна проекція перерізу вироджується в горизонтальний відрізок, а інші збігаються із проекціями кулі.

Уявляє інтерес розглянути додатково переріз кулі  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_{12}$ ) площиною  $z=m$ , де величина  $m$  належить інтервалу від  $c$  до  $c+R$ . Такий переріз  $i$  ( $i_1, i_2, i'_{12}$ ) уявляє собою також коло, але радіус його дорівнює  $r_1 = \sqrt{R^2 - (m - c)^2}$ , який знайдено із трикутника  $O'_{12}KN$ . Фронтальна проекція перерізу також вироджується у відрізок, а решта проекцій зображуються колами з радіусом  $r_1$ .

3. **Гіперпереріз при  $t=k$ .** Вираз

(1) приймає вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 - (k - d)^2$$

та уявляє собою рівняння двовимірної кулі, у якої координати всіх точок вздовж осі  $0t$  дорівнюють величині  $k$ , а радіус дорівнює  $r_2 = \sqrt{R^2 - (k - d)^2}$ .

Висвітливо це графічно. На рис. 5 показано побудову гіперперерізу кулі при  $t=k$ . Порядок побудови такий. Залишимо на рисунку ортогональні проєкції та перерізи гіперкулі горизонтальною площиною при  $t=d$ , що було виконано на рис. 4, візьмемо величину  $k$  в інтервалі від  $d$  до  $d+R$  та побудуємо горизонтальну векторну проєкцію центра гіперперерізу  $O'_2$ . Величину його радіусу визначимо із прямокутного трикутника  $O'_2 O_2 F$  з гіпотенузою  $R$  та катетом  $k-d$  як величину другого катету:  $r_2 = \sqrt{R^2 - (k-d)^2}$ . Побудуємо горизонтальну векторну проєкцію  $\beta_2$  цього гіперперерізу, що уявляє собою коло з центром в  $O'_2$  та радіусом  $r_2$ .

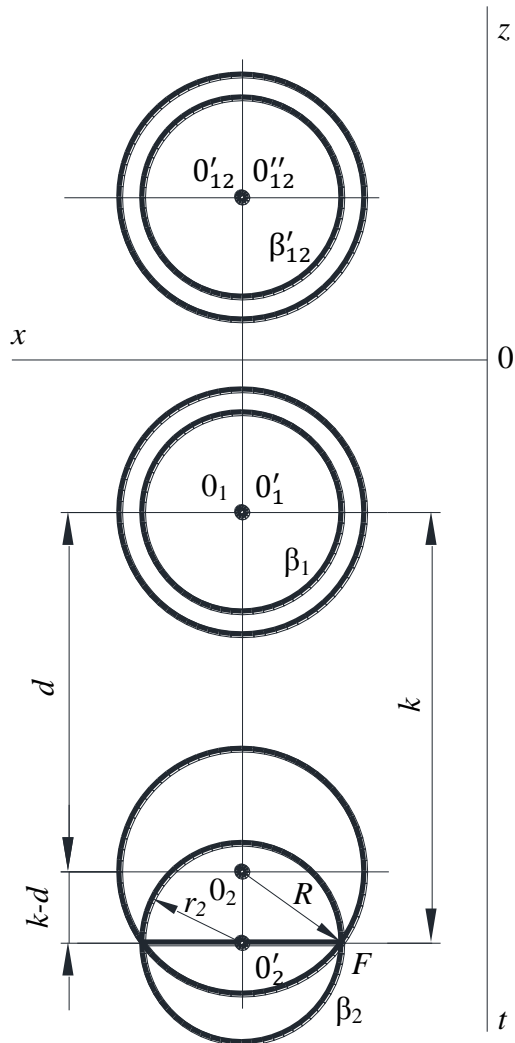


Рис.5. Гіперпереріз кулі фронтальною площиною при  $t=k$  якщо  $k>d$

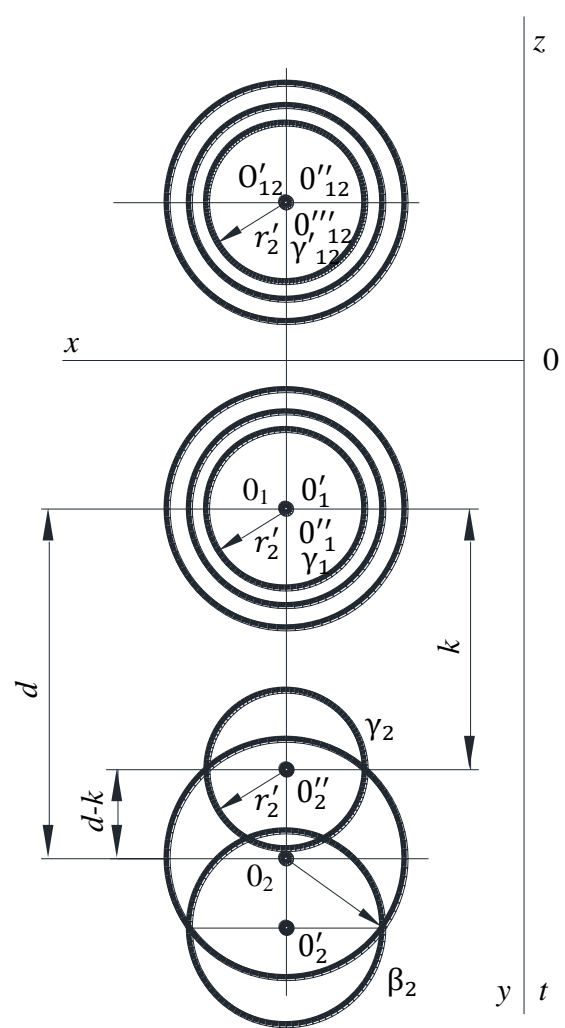


Рис.6. Гіперпереріз кулі фронтальною площиною при  $t=k$  якщо  $k<d$

Горизонтальна проєкція  $\beta_1$  гіперперерізу уявляє собою коло радіусом  $r_2$  та центром  $O'_1$ , який збігається з горизонтальною проєкцією  $O_1$ . Фронтальну проєкцію  $\beta'_{12}$  гіперперерізу також представлено колом радіуса  $r_2$ , але з центром в  $O''_{12}$ , який співпадає з центром фронтальної проєкції  $O'_{12}$ .

На рис. 6 аналогічними побудовами знайдено проєкції гіперперерізу  $t=k$  при  $k<d$ . Із цих побудов на рисунку випливає, що сукупність

горизонтальних векторних проєкцій гіперперерізу при  $t=k$  визначає еліпс, мала вісь якого проходить через точку  $O_2$  паралельно осі  $Ox$ , а велика вісь проходить також через точку  $O_2$ , але перпендикулярно до осі  $Ox$ .

### **Висновки та перспективи досліджень.**

1. У роботі досліджено обертання відрізка та кола. Зроблено висновок, що кожен  $n$ -вимірний геометричний образ при обертанні формує собою тіло більш високої розмірності, тобто таке, що належить  $(n+1)$ -вимірному простору. При деяких обернених положеннях геометричний образ вироджується в більш простий, точки якого належать осі обертання.

2. Наведено геометричне моделювання чотиривимірної кулі з використанням векторної моделі. Отримано ортогональні креслення гіперперерізів при декількох характерних значеннях параметрів. Показано, що сукупність горизонтальних векторних проєкцій гіперперерізу визначає еліпс.

3. Дослідження можуть бути продовженими та поширеними на простори більш високих розмірностей, що відкриє широкі перспективи для розвитку віртуального сприйняття світу, вдосконалення комп'ютерних технологій та пояснення деяких невідомих явищ, що відбуваються у світі.

### **Література**

1. *Филиппов П.В.* Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. – 280 с.
2. *Соколова Л.С.* Многомерная геометрия и абстрактные пространства в структуре знаний современного инженера. Гуманитарный вестник, 2019, вып. 2. URL: <http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2019-2-589>.
3. *Щуров Илья, Джасон Хайз* Многомерные пространства. URL: <https://sneg5.com/nauka/fizika-i-matematika/mnogomernye-prostranstva-3d-4d.html>.
4. *Бідніченко О.Г.* Деякі способи утворення багатовимірних тіл // SWorld Научный взгляд в будущее: вып. 6. Том 1. Одесса: КУПРИЕНКО СВ, 2017. С.4-8.
5. *Бідніченко О.Г.* Способи перетворення проєкцій: навчальний посібник [Електронне видання комбінованого використання на DVD-ROM]. Миколаїв: НУК, 2017. 94с.
6. Возможности четвертого измерения. URL: [devtools://devtools/bundled/devtools\\_app.html?remoteBase=https://chrome-devtools-frontend.appspot.com/serve\\_file/@3a97857a62ee2a8b3f6561ccd98b9e0436604cbe/&can\\_dock=true&panel=elements&dockSide=undocked](https://chrome-devtools-frontend.appspot.com/serve_file/@3a97857a62ee2a8b3f6561ccd98b9e0436604cbe/&can_dock=true&panel=elements&dockSide=undocked)

## References

1. *Filippov P.V.* (1979) Nachertatelnaia geometriia mnogomernogo prostranstva I ieio prilozheniia [Multidimensional geometry and abstract spaces in the knowledge structure of a modern engineer]. Leningrad: Leningrad University Publ. 280 p. {in Russian}
2. *Sokolova L.S.* (2019) Mnogomernaia geometriia I abstractnyie prostranstva v structure zhnaniy sovremennogo inzhenera [Multidimensional geometry and abstract spaces in the knowledge structure of a modern engineer]. Gumaniternyi visnyk. no. 2 URL: <http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2019-2-589>
3. *Schurov I., Jason Haiz* Mnogomernye prostranstva. URL: <https://sneg5.com/nauka/fizika-i-matematika/mnogomernye-prostranstva-3d-4d.html>
4. *Bidnichenko O.G.* (2017) Deiaki sposoby utvorennia bagatovymirnyh til [Some ways of forming multidimensional bodies] SWorld Nauchnyi vzgliad v bydyscheie. No.6.v.1. Odessa. Kupriienko S.V. pp. 4-8.
5. *Bidnichenko O.G.* (2017) Sposoby peretvorennia proektsiy [Ways to convert projections]. Mykolaiv: NUK. 94 p. {in Ukrainian}
6. *Vozmozhnosti chetvertogo izmereniia.* URL: [https://chrome-devtools://devtools/bundled/devtools\\_app.html?remoteBase=https://chrome-devtools-frontend.appspot.com/serve\\_file/@3a97857a62ee2a8b3f6561ccd98b9e0436604cbe/&can\\_dock=true&panel=elements&dockSide=undocked](https://chrome-devtools://devtools/bundled/devtools_app.html?remoteBase=https://chrome-devtools-frontend.appspot.com/serve_file/@3a97857a62ee2a8b3f6561ccd98b9e0436604cbe/&can_dock=true&panel=elements&dockSide=undocked)

К.т.н, доцент **Бидниченко Е. Г.**,  
[helenbidnichenko@gmail.com](mailto:helenbidnichenko@gmail.com), ORCID: 0000-0002-0548-3481  
Национальный университет кораблестроения имени адмирала  
Макарова (г. Николаев)

## ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ШАР В ГРАФИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

*В работе представлен метод геометрического моделирования четырехмерного шара. Для этого рассмотрены закономерности изменения формы проекций простых геометрических образов двумерного и трехмерного пространств при вращении. Рассмотрены вращения отрезка и круга вокруг оси; показано, что при вращении форма их проекций изменяется от максимального значения до вырожденной проекции.*

*Выяснено, что множество точек вырожденной проекции принадлежит оси вращения, а каждый n- мерный геометрический образ при вращении формирует собой тело более высокой размерности, то*



*есть такое, что принадлежит  $(n + 1)$  - мерному пространству. Выявленные закономерности распространены на четырехмерное пространство, в которое помещен шар. Показано, что осью вращения шара будет вырожденная проекция в виде круга, а шар при вращении меняет свои размеры от объемного тела до плоского круга, далее снова увеличивается, но в другую сторону (то есть выворачивается), а затем в обратном порядке до исходного положения. Такое вращение больше похоже на деформацию, а такой шар четырехмерного пространства является гипершаром.*

*Для геометрического моделирования гипершара и возможности его проекционного изображения в статье использована векторная модель, предложенная П.В. Филипповым. Определена система координат  $Oxyz$ . Приведено алгебраическое уравнение гипершара по аналогии с трехмерным пространством по определенным координатам центра  $a, b, c, d$ . Рассмотрен вариант гиперсечения при  $t = 0$ , который подтверждает уравнениями получение двумерного шара трехмерного пространства, точки (шара нулевого радиуса), которая совпадает с центром шара, или мнимого шара. Для варианта  $t = d$  получено уравнение двумерного шара, в котором радиус равен  $R$  и координаты всех точек вдоль оси  $Oz$  равны величине  $d$ . Интересным оказался вариант гиперсечения  $t = k$ , при котором получено уравнение двумерного шара, в котором координаты всех точек вдоль оси  $Oz$  равны величине  $k$ , а радиус равен  $r_2 = \sqrt{R^2 - (k - d)^2}$ . Построены горизонтальные векторные проекции гиперсечения для различных значений  $k$ . Сделан вывод, что совокупность горизонтальных векторных проекций гиперсечений при  $t = k$  определяет эллипс.*

*Ключевые слова: четырехмерные пространства; геометрическое моделирование; вращение; гипершар; векторная модель; гиперсечение; векторная проекция.*

Ph. D., assoc. prof **Helen Bidnichenko**  
[helenbidnichenko@gmail.com](mailto:helenbidnichenko@gmail.com), ORCID: 0000-0002-0548-3481  
Admiral Makarov National University of Shipbuilding (Mykolaiv)

## **FOUR-DIMENSIONAL BALL IN A GRAPHIC REPRESENTATION**

*The paper presents a method for geometric modelling of a four-dimensional ball. For this, the regularities of the change in the shape of the projections of simple geometric images of two-dimensional and three-dimensional spaces during rotation are considered. Rotations of a segment and a circle around an axis are considered; it is shown that during rotation the*

*shape of their projections changes from the maximum value to the degenerate projection.*

*It was found that the set of points of the degenerate projection belongs to the axis of rotation, and each  $n$ -dimensional geometric image during rotation forms a body of a higher dimension, that is, one that belongs to  $(n + 1)$  - dimensional space. Identified regularities are extended to the four-dimensional space in which the ball is placed. It is shown that the axis of rotation of the ball will be a degenerate projection in the form of a circle, and the ball, when rotating, changes its size from a volumetric object to a flat circle, then increases again, but in the other direction (that is, it turns out), and then in reverse order to its original position. This rotation is more like a deformation, and such a ball of four-dimensional space is a hypersphere. For geometric modelling of the hypersphere and the possibility of its projection image, the article uses the vector model proposed by P.V. Filippov. The coordinate system  $Oxyzt$  is defined. The algebraic equation of the hypersphere is given by analogy with the three-dimensional space along certain coordinates of the center  $a, b, c, d$ . A variant of hypersection at  $t = 0$  is considered, which confirms by equations obtaining a two-dimensional ball of three-dimensional space, a point (a ball of zero radius), which coincides with the center of the ball, or an imaginary ball. For the variant  $t = d$ , the equation of a two-dimensional ball is obtained, in which the radius is equal to  $R$  and the coordinates of all points along the  $Ot$  axis are equal to  $d$ . The variant of hypersection  $t = k$  turned out to be interesting, in which the equation of a two-dimensional sphere was obtained, in which the coordinates of all points along the  $Ot$  axis are equal to  $k$ , and the radius is  $r_2 = \sqrt{R^2 - (k - d)^2}$ . Horizontal vector projections of hypersection are constructed for different values of  $k$ . It is concluded that the set of horizontal vector projections of hypersections at  $t = k$  defines an ellipse.*

*Keywords: four-dimensional spaces; geometric modelling; rotation; hypersphere; vector model; hypersection; vector projection.*