УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2021.100.153-161

д. т. н., проф. **С.М. Ковальов**
snkovalov41@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7713-1768
докторант **О.В. Мостовенко**
a.mostovenko25@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3423-4126

Київський національний університет будівництва і архітектури

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ГІПЕРСФЕРИ В n-ВИМІРНОМУ ПОРСТОРІ

Дослідження властивостей різних поверхонь сприяє розширенню їх використання при розв'язанні різноманітних практичних задач тим більше, якщо такі властивості можна узагальнити на багатовиди n-вимірного простору. Найбільш досконально вивченими є властивості найпростіших поверхонь, у тому числі і властивості сфери. Саме тому найпростіші поверхні найчастіше використовуються на практиці. Кожна властивість, яка неосвітлена в існуючій літературі, розширює зазначені можливості. Тому метою даної статті є виявлення невідомих з літератури властивостей гіперсфери.

Більшість властивостей кола і сфери були відомі з давніх часів [1, 4, 5]. Узагальнено поняття сфери на багатовимірні простори базується на загальних принципах багатовимірної геометрії [3]. У роботі [4] перелічено і проаналізовано одинадцять основних властивостей сфери. У роботах [8, 10] показано, що коло можна розглядати як ізолінію, а сферу – як ізоповерхню при моделюванні енергетичних полів.

При геометричному моделюванні енергетичних полів з точковими джерелами енергії суттєву роль відіграють відстані від точок поля до заданих джерел енергії [6, 7]. У роботі [9] наведено дві схеми для визначення параметра t, який враховує вплив відстані від точок поля до точкових джерел енергії на потенціали точок поля. В окремому випадку, якщо цей параметр визначається за спрощеною схемою при $f(l)=al^2$, то формула для підрахунку потенціалу довільної точки енергетичного поля є математичною моделлю енергетичного поля, що породжується числом n точкових джерел енергії. Геометричною моделлю поля є багатовид, який можна розшарувати на однопараметричну множину ізосфер [8, 10].

Абстрагуючись від фізичної природи поля, спрощуючи рівняння для підрахунку потенціалу довільної точки енергетичного поля і узагальнюючи його на n- вимірний простір, можна сформулювати такі властивості:

Властивість 1. Гіперсферу можна розглядати як геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до n заданих точок є величиною сталою.

Властивість 2. Довільні коефіцієнти k_i при відстанях l_i впливають на параметри гіперсфери, не змінюючи тип поверхні.

Ключові слова: поверхня; сфера; гіперсфера; багато вид; властивість; простір; багатовимірний простір; відстань; точка.

Постановка проблеми. Дослідження властивостей різних поверхонь сприяє розширенню їх використання при розв'язанні різноманітних практичних задач тим більше, якщо такі властивості можна узагальнити на багатовиди n-вимірного простору. Найбільш досконально вивченими є властивості найпростіших поверхонь, у тому числі і властивості сфери. Саме тому найпростіші поверхні найчастіше використовуються на практиці. Кожна властивість, яка не освітлена в існуючій літературі, розширює зазначені можливості.

Ціль статті. Виявлення невідомих з літератури властивостей гіперсфери.

Аналіз останніх досліджень. Більшість властивостей кола і сфери були відомі з давніх часів [1, 4, 5]. Узагальнено поняття сфери на багатовимірні простори базується на загальних принципах багатовимірної геометрії [3]. У роботі [4] перелічено і проаналізовано одинадцять основних властивостей сфери. У роботах [8, 10] показано, що коло можна розглядати як ізолінію, а сферу – як ізоповерхню при моделюванні енергетичних полів.

Основна частина. При геометричному моделюванні енергетичних полів з точковими джерелами енергії суттєву роль відіграють відстані від точок поля до заданих джерел енергії [6, 7]. У роботі [9] наведено дві схеми для визначення параметра t, який враховує вплив відстані від точок поля до точкових джерел енергії на потенціали точок поля. За спрощеною схемою:

$$t_i = \frac{x_P - f(l_i)}{x_P}, \tag{1}$$

де x_P – обмеження впливу джерел енергії на потенціали точок поля;

l_i – відстань від точки поля до i- того джерела енергії.

Якщо $f(l)=al^2$, формула для підрахунку потенціалу довільної точки енергетичного поля має вигляд:

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i^* (x_P - al_i^2)}{x_P}, \tag{2}$$

де U_i^* – потужність i- того точкового джерела енергії;

a – додатковий параметр функції $f(l)$.

Вираз (2) є математичною моделлю енергетичного поля, що породжується числом n точкових джерел енергії. Геометричною моделлю поля є багатовид, який можна розшарувати на однопараметричну множину ізосфер [8, 10].

Абстрагуючись від фізичної природи поля, спрощуючи рівняння (2) і узагальнюючи його на n- вимірний простір, можна записати:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2+\ldots+(v-v_i)^2\right]=l, \qquad (3)$$

де i – номер заданої точки (за аналогією з номером точкового джерела енергії;

n – число заданих точок;

l – стала величина.

Рівняння (3) можна записати у вигляді:

$$\begin{gathered}x^2+y^2+z^2+\ldots+v^2-\\ -\frac{2\left(x\sum_{i=1}^{n}x_i+y\sum_{i=1}^{n}y_i+z\sum_{i=1}^{n}z_i+\ldots+v\sum_{i=1}^{n}v_i\right)}{n}+\\ +\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2+\ldots+v_i^2\right)-l}{n}=0.\end{gathered} \qquad (4)$$

Окремо запишемо рівняння гіперсфери у багатовимірному просторі:

$$(x-x_S)^2+(y-y_S)^2+(z-z_S)^2+\ldots+(v-v_S)^2=r^2, \qquad (5)$$

де x_S, y_S, $z_S \ldots v_S$ – координати центра; r – радіус.

Вираз (5) можна записати у вигляді:

$$\begin{gathered}(x^2+y^2+z^2+\ldots+v^2)-2(xx_S+yy_S+zz_S+\ldots+vv_S)+\\ +(x_S^2+y_S^2+z_S^2+\ldots+v_S^2)-r^2=0.\end{gathered} \qquad (6)$$

Порівнюючи (4) і (6) можна дійти висновку, що вираз (4) так само, як вираз(6), є рівнянням гіперсфери, де

$$x_S=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n};\, y_S=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n};\, z_S=\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i}{n};\ldots;v_S=\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i}{n} - \qquad (7)$$

координати центра гіперсфери.

Порівнюючи треті члени рівнянь (4) і (6) можна записати:

$$x_S^2+y_S^2+z_S^2+\ldots+v_S^2-r^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2+\ldots+v_i^2\right)-l}{n}. \qquad (8)$$

При підстановці (7) до (8) отримаємо величину радіуса r гіперсфери:

$$r = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2}{n^2} - \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + \ldots + v_i^2\right) - l}{n}} \qquad (9)$$

Підсумовуючи проведені дослідження можна сформулювати таку властивість.

Властивість 1. Гіперсферу можна розглядати як геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до n заданих точок є величиною сталою:

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \ldots + l_i^2 + \ldots + l_n^2 = l, \qquad (10)$$

де l_i – відстань від поточної точки гіперсфери до i-тої заданої точки.

За аналогією з доведенням властивості 1 можна сформулювати ще одну властивість.

Властивість 2. Довільні коефіцієнти k_i при відстанях l_i впливають на параметри гіперсфери, не змінюючи тип поверхні.

Тоді рівняння (10) набуває вигляду:

$$k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 l_3^2 + \ldots + k_i l_i^2 + \ldots + k_n l_n^2 = l, \qquad (11)$$

Координати центра гіперсфери у даному випадку обчислюються за формулами:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i};\ y_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i};\ z_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i};\ldots;v_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}. \qquad (12)$$

Радіус гіперсфери у цьому випадку обчислюється за формулою:

$$r = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i z_i\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[k_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + \ldots + v_i^2\right)\right] - l}{\sum_{i=1}^{n} k_i}} \qquad (13)$$

Приклад.

Задано три точки $A(x_A=1;\ y_A=2)$, $B(x_B=4;\ y_B=1)$, $C(x_C=3;\ y_C=5)$ (рис. 1). Визначити координати центра S і радіус r кола a, яке є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до трьох заданих точок є величиною сталою l=90.

За формулами (7) маємо:

$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2.6667;\ y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2.6667.$$

Радіус r визначається за формулою (9):

$$r = \sqrt{\frac{(x_A + x_B + x_C)^2 + (y_A + y_B + y_C)^2}{9} - \frac{x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 + x_C^2 + y_C^2 - l}{3}} = 5.0552.$$

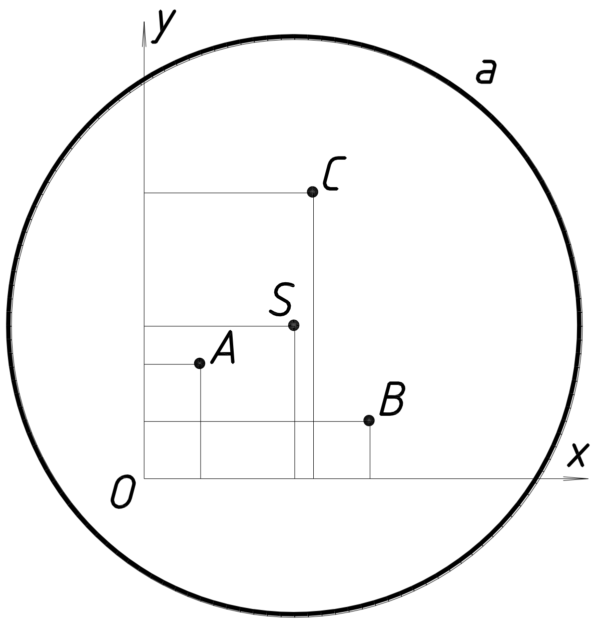

Рис. 1 Схема умови прикладу

Рівняння кола *a* має вигляд:

$$(x - 2.6667)^2 + (y - 2.6667)^2 = 5.0552^2.$$

Висновки. Аналіз різноманітних літературних джерел показав, що серед усіх наведених властивостей сфери не виявлено вищенаведених властивостей, які можна додати до їх загального числа.

Література

1. Математическая энциклопедия. Т. 5 / М.: Наука, 1977. – С. 287.
2. *Максимов Л.А.* Лекции по статистической физике / Долгопрудный, 2011. С. 35.
3. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства / Москва : Наука, 1966. С. 287.
4. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия / Москва : Наука, 1981. 344 с.
5. Энциклопедия элементарной математики. Книга третья. Функции и пределы (основы анализа) / Москва-Ленінград, 1952. С. 260 – 264.
6. *Ковалев С.Н.* Геометрическое моделирование физических полей / С.Н. Ковалев, А.В. Мостовенко // *Сучасні проблеми моделювання*: зб. наук. праць. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2019. Вип. 14. С. 101-106.

7. *Ковальов С.М.,* Мостовенко О.В. Визначення залежності між параметрами точкових джерел енергії і параметрами заданих точок енергетичного поля / *Прикладна геометрія та інженерна графіка* : Міжвідомчий наук.-техн. Збірник. Київ : КНУБА, 2019. Вип. 96. С. 37-42.
8. *Мостовенко О.В*. Ізолінії рівних потенціалів енергетичного поля на площині / *Управління розвитком складних систем*. 2019. №40. С.125 – 128.
9. *Мостовенко О.В*. Узагальнення схем для визначення параметра врахування впливу відстані від точки фізичного поля до точкового джерела енергії / Міжвідомчий науково-технічний збірник *"Прикладна геометрія та інженерна графіка"*. Випуск 98. Відповідальний редактор Ванін В. В. Київ: КНУБА, 2020 р. – 160с. DOI: 10.32347/0131-579х.2020.98. С. 104-109.
10. *Мостовенко О.В., Ковальов С.М.* Наочна геометрична модель силового поля з двома точковими джерелами енергії / *Сучасні проблеми моделювання*: зб. наук. праць. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2019. Вип. 16. С. 140-146. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/cpm_2019_16_18
11. *Мостовенко О.В.* Порівняльний аналіз графіків потенціалів енергії при різних функціях від відстані / *Сучасні проблеми архітектури та містобудування* : Наук.-техн. Збірник. Київ, КНУБА, 2019. Вип. 53. С. 297 – 304.

Referenses

1. Matematycheskaia entsyklopedyia. T. 5 / Moscow : Nauka, 1977. P. 287. (in Russian)
2. *Maksymov L.A.* Lektsyy po statystycheskoi fyzyke / Dolhoprudnyi, 2011. P. 35. (in Russian)
3. *Rozenfeld B.A.* Mnohomernye prostranstva / Moscow : Nauka, 1966. P. 287. (in Russian)
4. *Hylbert D., Kon-Fossen S.* Nahliadnaia heometryia / M Moscow. 1952. P. 260 – 264.
5. Эntsyklopedyia эlementarnoi matematyky. Knyha tretia. Funktsyy y predelы (osnovы analyza) / Moscow-L., 1952. P. 260 – 264. (in Russian)
6. *Kovalev S.N., Mostovenko O.V.* Heometrycheskoe modelyrovanye fyzycheskykh polei / Suchasni problemy modeliuvannia: zb. nauk. prats. Melitopol: Vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho, 2019. Vyp. 14. P. 101-106. (in Russian)
7. *Kovalov S.M.,* Mostovenko O.V. Vyznachennia zalezhnosti mizh parametramy tochkovykh dzherel enerhii i parametramy zadanykh tochok enerhetychnoho polia / Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika: Mizhvidomchyi nauk.-tekhn. Zbirnyk. Kyiv, KNUBA, 2019. Vyp. 96. P. 37-42. (in Ukrainian)

8. Mostovenko O.V. Izolinii rivnykh potentsialiv enerhetychnoho polia na ploshchyni / Upravlinnia rozvytkom skladnykh system. – 2019. - №40. – S.125 – 128. (in Ukrainian)
9. Mostovenko O.V. Uzahalnennia skhem dlia vyznachennia parametra vrakhuvannia vplyvu vidstani vid tochky fizychnoho polia do tochkovoho dzherela enerhii / Mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk "*Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*". Vypusk 98. Vidpovidalnyi redaktor Vanin V. V. Kyiv: KNUBA, 2020 r. 160s. DOI: 10.32347/0131-579x.2020.98. P. 104-109. (in Ukrainian)
10. Mostovenko O.V. Naochna heometrychna model sylovoho polia z dvoma tochkovymy dzherelamy enerhii [Tekst] / S.M. Kovalov, O.V. Mostovenko // Suchasni problemy modeliuvannia: zb. nauk. prats. Melitopol: Vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho, 2019. Vyp. 16. P. 140-146 (in Ukrainian)
11. Mostovenko O.V. Porivnialnyi analiz hrafikiv potentsialiv enerhii pry riznykh funktsiiakh vid vidstani / Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannia: Nauk.-tekhn. zbirnyk. Kyiv : KNUBA, 2019. Vyp. 53. P. 297 – 304. (in Ukrainian)

д. т. н., проф. **С.М. Ковальов**
snkovalov41@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7713-1768
докторант **О.В. Мостовенко**
a.mostovenko25@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3423-4126

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГИПЕРСФЕРЫ В N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследование свойств поверхностей способствует расширению их использования при решении различных практических задач тем более, если такие свойства можно обобщить на многообразия n-мерного пространства. Наиболее досконально изученными являются свойства простейших поверхностей, в том числе и свойства сферы. Именно поэтому простейшие поверхности чаще всего используются на практике. Каждое свойство, неосвещенное в существующей литературе, расширяет указанные возможности. Поэтому целью данной статьи является выявление неизвестных из литературы свойств гиперсферы.

Большинство свойств окружности и сферы были известны с давних времен [1, 4, 5]. Обобщенно понятие сферы на многомерные пространства базируется на общих принципах многомерной геометрии [3]. В работе [4] перечислены и проанализированы одиннадцать основных свойств сферы. В работах [8, 10] показано, что окружность можно рассматривать как изолинию, а сферу - как изоповерхность при моделировании энергетических полей.

При геометрическом моделировании энергетических полей с точечными источниками энергии существенную роль играют расстояния от точек поля до заданных источников энергии [6, 7]. В работе [9] приведены две схемы для определения параметра t, учитывающего влияние расстояния от точек поля до точечных источников энергии на потенциалы точек поля. В частном случае, если этот параметр определяется по упрощенной схеме при $f(l)=al^2$, то формула для подсчета потенциала произвольной точки энергетического поля является математической моделью энергетического поля, порождаемого числом n точечных источников энергии. Геометрической моделью поля будет многообразие, которое можно расслоить на однопараметрическое множество изосфер [8, 10].

Абстрагируясь от физической природы поля, упрощая уравнение для подсчета потенциала произвольной точки энергетического поля и обобщая его на n- мерное пространство, можно сформулировать следующие свойства:

Свойство 1. Гиперсферу можно рассматривать как геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до n заданных точек является величиной постоянной.

Свойство 2. Произвольные коэффициенты k_i при расстояниях l_i влияют на параметры гиперсферы, не меняя тип поверхности.

Ключевые слова: поверхность; сфера; гиперсфера; многообразие; свойство; пространство; многомерное пространство; расстояние;точка.

Ph.D., prof. **Sergiy Kovalov**
snkovalov41@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7713-1768
doctoral student **O.V. Mostovenko**
a.mostovenko25@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3423-4126

Kyiv National University of Construction and Architecture

SOME PROPERTIES OF THE HYPERSPHERE IN N-DIMENSIONAL SPACE

The study of the properties of surfaces contributes to the expansion of their use in solving various practical problems, especially if such properties can be generalized to manifolds of n-dimensional space. The most thoroughly studied are the properties of the simplest surfaces, including the properties of a sphere. That is why the simplest surfaces are most often used in practice. Each property not covered in the existing literature expands the indicated possibilities. Therefore, the purpose of this article is to identify the properties of the hypersphere unknown from the literature.

Most of the properties of a circle and a sphere have been known since ancient times [1, 4, 5]. The generalized concept of a sphere into multidimensional spaces is based on the general principles of multidimensional geometry [3]. In [4], eleven basic properties of the sphere are listed and analyzed. In works [8, 10] it is shown that a circle can be considered as an isoline, and a sphere as an isosurface when modeling energy fields.

In geometric modeling of energy fields with point energy sources, an essential role is played by the distances from the points of the field to the given energy sources [6, 7]. In [9], two schemes are given for determining the parameter t, taking into account the effect of the distance from the points of the field to the point sources of energy on the potentials of the points of the field. In a particular case, if this parameter is determined according to a simplified scheme with $f(l)=al^2$*, then the formula for calculating the potential of an arbitrary point of the energy field is a mathematical model of the energy field generated by the number n of point energy sources. The geometric model of the field will be a manifold that can be foliated into a one-parameter set of isospheres [8, 10].*

Abstracting from the physical nature of the field, simplifying the equation for calculating the potential of an arbitrary point of the energy field and generalizing it to n-dimensional space, we can formulate the following properties:

Property 1. A hypersphere can be considered as a locus of points, the sum of the squared distances from which to n given points is a constant value.

Property 2. Arbitrary coefficients ki at distances li affect the parameters of the hypersphere without changing the type of surface.

Keywords: surface, sphere, hypersphere, manifold, property, space, multidimensional space, distance, point.