

Національний університет біоресурсів і природокористування
України

КОНСТРУЮВАННЯ ЦЕНТРОЇД НЕКРУГЛИХ КОЛІС НА ОСНОВІ ДЕФОРМАЦІЇ ЕЛІПСА

Зубчасті зачеплення з некруглими колесами знаходять своє застосування в різних приладах і механізмах. Для конструювання вихідної (ведучої) центроїди використовується рівняння в полярній системі координат, яке описує цілу групу характерних замкнених кривих. Ціле число n , яке входить до рівняння, впливає на форму вихідної центроїди, яка має n виступів і впадин, рівномірно розташованих через рівні проміжки полярного кута. Ведена центроїда, яка розшукується за отриманими рівняннями на основі її кочення по ведучій без ковзання, теж має подібну форму з числом t виступів і впадин. Пара центроїд задається числами n для ведучої кривої і t для веденої кривої. Поєднання цих двох чисел дає різні пари центроїд. Якщо $n=t$, то ведуча і ведена центроїди будуть конгруентними. Такий випадок вигідний тим, що обидві центроїди мають однакову форму і виготовляються за однаковою схемою, що зменшує трудомісткість робіт. При $n=t=0$ центроїдами будуть конгруентні кола, при $n=t=1$ – конгруентні еліпси із центрами обертання у фокусах.

Важливою ознакою розробленого підходу є те, що підінтегральний вираз, отриманий на основі рівності відповідних дуг обох центроїд, можна проінтегрувати. Це дозволяє отримати параметричні рівняння веденої центроїди в кінцевому вигляді.

Ключові слова: центроїди, полярна система, міжцентрова відстань, параметричні рівняння.

Постановка проблеми. В різноманітних механізмах і машинах для передачі обертального руху між паралельними осями застосовуються циліндричні зубчасті колеса, у яких центроїдами є кола. Ці кола відіграють роль вихідних даних, на основі яких відбувається проектування зубів зачеплення. В статті розроблений аналітичний опис конструювання веденої центроїди для заданої ведучої. Максимально спрощений процес конструювання, який дозволив би простою заміною сталих, які впливають на форму ведучої центроїди, отримати параметричні рівняння веденої.

Ціль статті. Розробити аналітичний опис конструювання центроїд некруглих коліс на основі узагальненого рівняння групи замкнених кривих в полярній системі координат.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання геометричного опису та розрахунку некруглих зубчастих коліс досить широко висвітлено в працях Ф.Л. Литвина [2, 3]. Для зубчастої передачі із круглими колесами центроїдами є основні кола, для еліптичних і овальних передач – відповідно еліпси і овали, для зубчастих коліс довільної «нетрадиційної» форми – замкнуті або незамкнуті плоскі криві [4]. Про застосування зубчастих зачеплення із пар конгруентних еліпсів і механізму, що його реалізовує, йдеться у статті [5].

Основна частина. Моделювання дуг кривих, які утворюють центроїди, зручно здійснювати в полярній системі координат. Початком координат (полусом) однієї кривої, заданої радіус-вектором $\rho = \rho(\alpha)$ є точка O , і другої, заданої радіус-вектором $\rho_1 = \rho_1(\varphi)$ є точка O_1 . Міжцентрова відстань OO_1 вибрана таким чином, що при нульовому значенні полярних кутів α і φ криві дотикалися одна до одної в точці T (рис. 1). Якщо функції ρ і ρ_1 будуть парними (а саме такі функції ми будемо розглядати), то при від'ємних значеннях полярних кутів полярні радіуси матимуть ті ж самі значення, що і при додатних кутах і крива буде симетричною (на рис. 1 симетрична вітка зображена штриховою лінією).

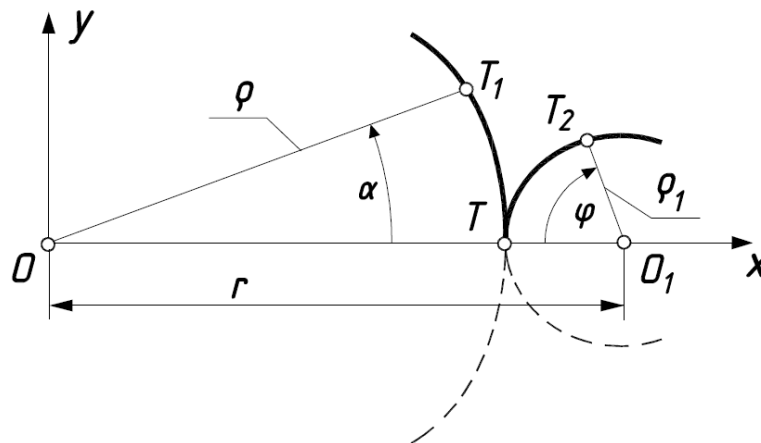


Рис. 1. Графічна ілюстрація до моделювання кривих із спільною точкою дотику при їх зовнішньому контакті

При умові кочення без ковзання кривої $\rho = \rho(\alpha)$ по кривій $\rho_1 = \rho_1(\varphi)$ довжини дуг TT_1 і TT_2 повинні бути рівними. При $\alpha = \varphi = 0$ можна записати: $\rho + \rho_1 = r$, де через r позначена міжцентрова відстань OO_1 . Поставимо умову, щоб ця рівність виконувалася для всіх відповідних точок обох кривих. Тоді можна записати: $\rho_1 = r - \rho$. Запишемо параметричні рівняння кривих:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \alpha; \\y &= \rho \sin \alpha.\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= (r - \rho) \cos \varphi + r; \\y_1 &= (r - \rho) \sin \varphi.\end{aligned}\tag{2}$$

При конкретному значенні кута α згідно рівнянь (1) отримаємо точку на кривій, наприклад, точку T_1 (рис. 1). Для того, щоб отримати точку T_2 на другій кривій згідно рівнянь (2), потрібно підставити певне значення кута φ . Будемо вважати, що кут φ залежний від кута α , тобто $\varphi = \varphi(\alpha)$. Залежність $\varphi = \varphi(\alpha)$ знайдемо на основі рівності дуг TT_1 і TT_2 для поточного значення кута α . Похідну довжини дуги для обох кривих знаходимо за відомою формулою:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.\tag{3}$$

Для визначення похідних дуг за формулою (3) знайдемо похідні кривих (1) і (2):

$$\begin{aligned}x' &= \rho' \cos \alpha - \rho \sin \alpha; \\y' &= \rho' \sin \alpha + \rho \cos \alpha.\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}x'_1 &= \rho' \cos \varphi - \varphi'(r - \rho) \sin \varphi; \\y'_1 &= \rho' \sin \varphi + \varphi'(r - \rho) \cos \varphi.\end{aligned}\tag{5}$$

Після підстановки похідних (4) і (5) у формулу (3) одержимо вирази похідних дуг кривих:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.\tag{6}$$

$$\frac{ds_1}{d\alpha} = \sqrt{\rho'^2 + \varphi'^2 (r - \rho)^2}.\tag{7}$$

Прирівняємо вирази (6) і (7) між собою і розв'яжемо відносно залежності $\varphi = \varphi(\alpha)$:

$$\varphi = \pm \int \frac{\rho}{r - \rho} d\alpha + c,\tag{8}$$

де c – стала інтегрування.

Із рис. 4 видно, що починаючи із спільної точки дотику T , радіус-вектори ρ_1 і ρ обертаються в протилежних напрямках. В початковому положенні (при $\alpha = 0$) кут $\varphi = -\pi$. Виходячи із цієї умови знаходять вираз сталої c для конкретного випадку.

Розглянемо простий випадок. Нехай $\rho = \text{const}$. Тоді згідно (8) отримуємо вираз для кута φ :

$$\varphi = \frac{\rho\alpha}{r - \rho} - \pi.\tag{9}$$

На рис. 5 побудовано два колеса при $\rho=5$, $r=11$. Коло 1 побудовано за рівняннями (1), а коло 2 – за рівняннями (2) при підстановці в них виразу кута φ (9). Незалежна змінна (кут α) змінювався в межах $\alpha=0\dots 2\pi$.

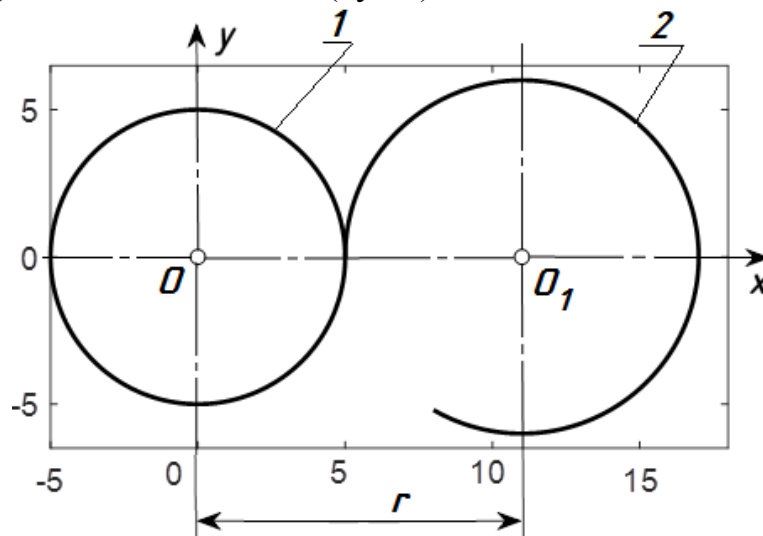


Рис. 2. Центроїди, побудовані при $\rho=5$, $r=11$ за рівняннями (1) і (2)

Як видно із рис. 2, центроїда 1 (коло радіуса ρ) є замкненим, а центроїда 2 (коло радіуса $\rho_1=r-\rho$) незамкнене. Коло 2 можна замкнути і така пара центроїд працюватиме. При цьому передавальне число, яке визначається відношенням радіусів, буде довільним. Однак для некруглих коліс процес утворення пар центроїд за такою схемою, тобто при довільній міжцентровій відстані, r є неможливим. Якщо ми хочемо, щоб при одному оберті центроїди 1 друга центроїда теж повернулася на один оберт, потрібно так підібрати міжцентрову відстань r , щоб обидві центроїди були замкненими. Це означає, що при $\alpha=2\pi$ кут φ теж має прийняти таке значення. Для кіл величину відстані r можна визначити аналітично. Для цього рівність (9) без сталої інтегрування потрібно розв'язати відносно r :

$$r = \frac{\rho}{\varphi}(\alpha + \varphi) \quad (10)$$

Із виразу (10) при $\rho=5$, $\alpha=2\pi$ і $\varphi=2\pi$ отримаємо $r=10$. Отже, $\rho_1=r-\rho=5$. Радіуси кіл рівні і передавальне число є сталим і дорівнює одиниці.

Параметричні рівняння еліпса у полярній системі координат мають наступний вигляд [6]:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \alpha}, \quad (11)$$

де p і e – дві сталі величини, від яких залежить форма еліпса. Відстань p (рис. 3) називається фокальним параметром. Стала e носить назву ексцентриситету еліпса. Ексцентриситет визначається відношенням відрізків a/c , де a – велика піввісь еліпса, c – відстань від центра еліпса до фокуса, в якому знаходиться початок координат (полнос). Якщо сполучить

довільну точку A еліпса із полюсом O , то отримаємо радіус-вектор ρ , напрям якого задається незалежною змінною (полярним кутом) α (рис. 3).

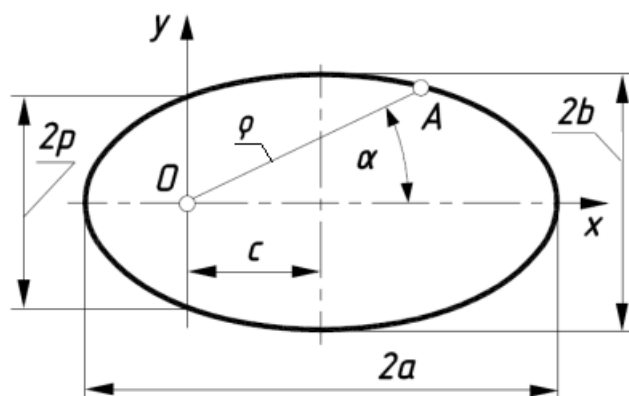


Рис. 3. Еліпс в полярній системі координат із полюсом у фокусі

Якщо в декартовій системі еліпс задається півосями a і b , то у полярній – сталими e і p . Між ними існує взаємозв'язок, за яким можна зробити перехід від сталих a і b в одній системі до сталих e і p в другій і навпаки:

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; & p &= \frac{b^2}{a}; \\ a &= \frac{p}{1 - e^2}; & b &= \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки при додатному і від'ємному значеннях кута α згідно рівняння (11) ми отримуємо рівні величини радіус-вектора ρ , то така функція є парною. Ця парність проявляється у осі симетрії еліпса (рис. 3) відносно осі Ox .

Видозмінимо рівняння (11), увівши сталу n :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos(n\alpha)}, \quad (13)$$

Після такої модифікації залежність (13) залишається парною, а криві завжди є замкненими при цілому значенні сталої n . Властивість парності проявляється у виступах кривих, число яких рівне числу n і які симетричні відносно радіус-вектора ρ , що проходить через найвіддаленішу точку. На рис. 4 побудовані криві за рівняннями (1) при підстановці в них виразу (13) при різних значеннях сталої n .

Для всіх кривих є характерними два розміри: мінімальне значення радіус-вектора w і його максимальне значення u . Із рис. 6 можна записати: $w = a - c$, $u = a + c$. Застосувавши вирази (12), знаходимо вирази для сталих w і u через фокальний параметр p і ексцентриситет e :

$$u = \frac{p}{1 - e}; \quad w = \frac{p}{1 + e}. \quad (14)$$

Для $p=0,3$ і $e=0,3$ знаходимо: $w=2,46$ і $u=4,57$. Знайдені величини є спільними для всіх кривих, зображених на рис. 4.

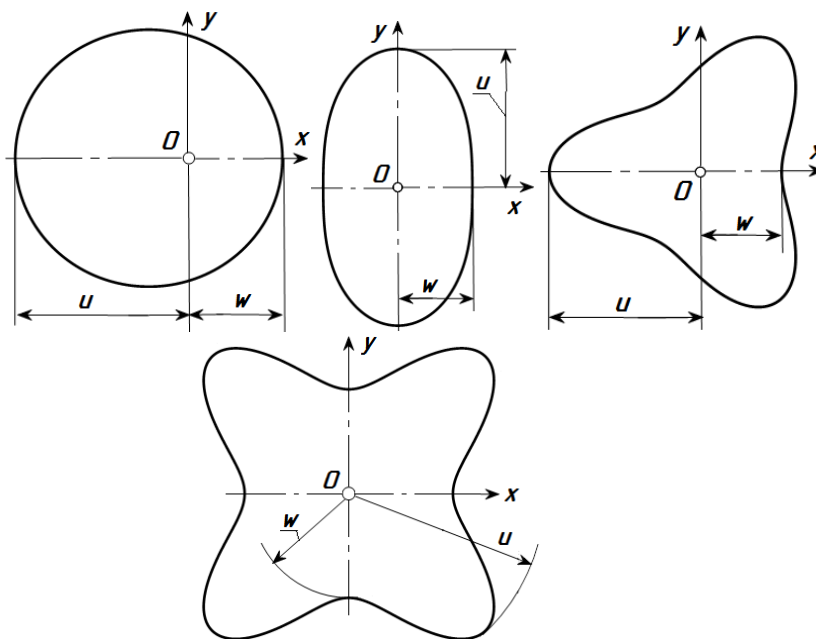


Рис. 4. Криві, побудовані за рівнянням (13) при $p=3,2$, $e=0,3$ і різних значеннях сталої n (від 1 до 4)

Застосуємо формулу (8) до узагальненого рівняння кривих (13), з якого при $n=1$ отримаємо частковий випадок – рівняння еліпса. Після підстановки (13) у (8) і інтегрування отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{\rho}{r+\rho} d\alpha = \int \frac{P}{r-er \cos(n\alpha)-p} d\alpha = \\ &= \frac{2p}{n\sqrt{r^2(e^2-1)+2pr-p^2}} \operatorname{Arctanh} \frac{(p-r-er) \operatorname{tg} \frac{n\alpha}{2}}{\sqrt{r^2(e^2-1)+2pr-p^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

При підстановці у (15) $\alpha=0$ отримаємо $\varphi=0$. Отже стала інтегрування $c=-\pi$. На рис. 5,а за рівнянням (11) побудовано еліпс і за рівняннями (2) відповідну центроїду. Для побудови центроїди у рівняння (2) підставляли вирази (11) і (15) при $n=1$. Еліпс заданий сталими $p=3,2$ і $e=0,6$, а міжцентрову відстань взяли довільною: $r=11$. Центроїда вийшла незамкненою, отже така пара кривих може працювати на обмеженій ділянці – до розриву на другій центроїді. Із літератури відомо [2, 3], що другою центроїдою може бути конгруентний еліпс. В такому випадку міжцентрова відстань має бути рівною великій осі еліпса, тобто $2a$. Згідно формули (12) знаходимо: $r=2a=2p/(1-e^2)$. Підставимо цей вираз у (15) при $n=1$ і одержимо спрощений вираз кута φ :

$$\varphi = 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \pi. \quad (16)$$

Підставимо вираз кута φ (16), радіус-вектора ρ (11) і міжцентрової відстані $r=2a=2p/(1-e^2)$ у (2) і після перетворень отримаємо параметричні рівняння другої центроїди для еліпса, яка є точно таким само еліпсом (ліворуч наведемо також параметричні рівняння вихідної центроїди – за рівнянням (11) після підстановки його в (1)):

$$\begin{aligned} x &= \frac{p \cos \alpha}{1 - e \cos \alpha}; & x_1 &= p \frac{2 - (1 + e) \cos \alpha}{(e - 1)(e \cos \alpha - 1)}; \\ y &= \frac{p \sin \alpha}{1 - e \cos \alpha}; & y_1 &= -\frac{p \sin \alpha}{1 - e \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (17)$$

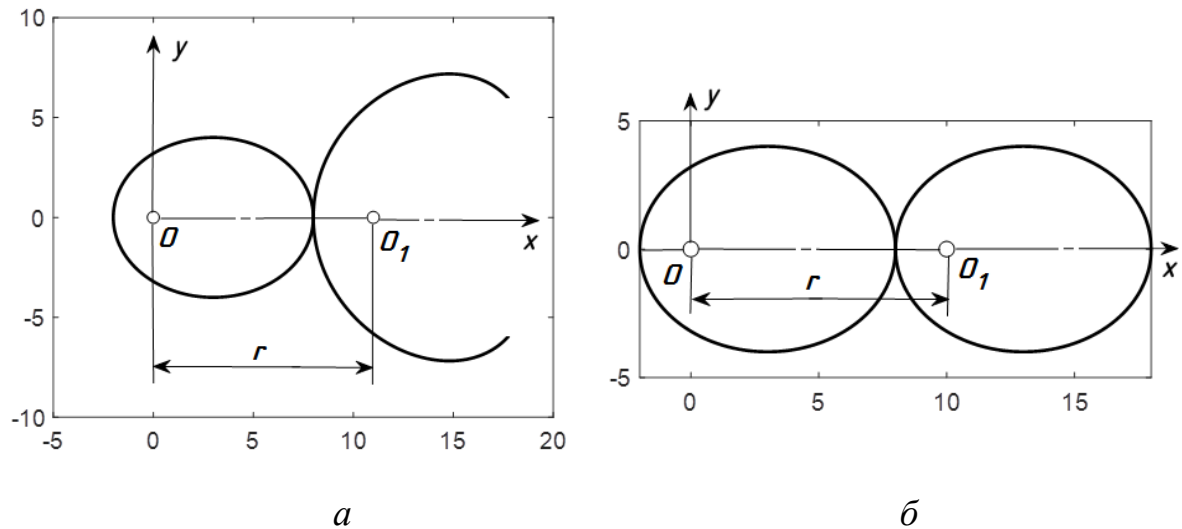


Рис. 5. Центроїди для еліпса ($p=3,2$, $e=0,6$) з різними міжцентровими відстанями r :

а) $r=11$;

б) $r=2a=2p/(1-e^2)$

На рис. 5, б побудовано два конгруентних еліпси за рівняннями (17). Слід зазначити, що відцентрова відстань уже закладена у ці рівняння. Перші і другі рівняння в цілому відрізняються, хоча вирази y і y_1 відрізняються тільки знаком. Зображення еліпсів однакові, але є принципова відмінність під час їх побудови: в одному випадку точка еліпса при зростанні кута α рухається проти годинникової стрілки, а в другому – за годинниковою стрілкою. За рівняннями (17) можна будувати конгруентні еліпси із різним співвідношенням їх осей, змінюючи сталі p і e .

Формула (16) дозволяє знаходити кут φ повороту другого еліпса при повороті першого на кут α . Це дає можливість будувати проміжні положення центроїд при їх обертанні навколо нерухомих центрів (фокусів еліпсів). Для цього вихідну центроїду (еліпс) потрібно повернути навколо її фокуса на кут α , а другу (конгруентний еліпс) – на кут φ в протилежну сторону навколо власного фокуса (рис. 6).

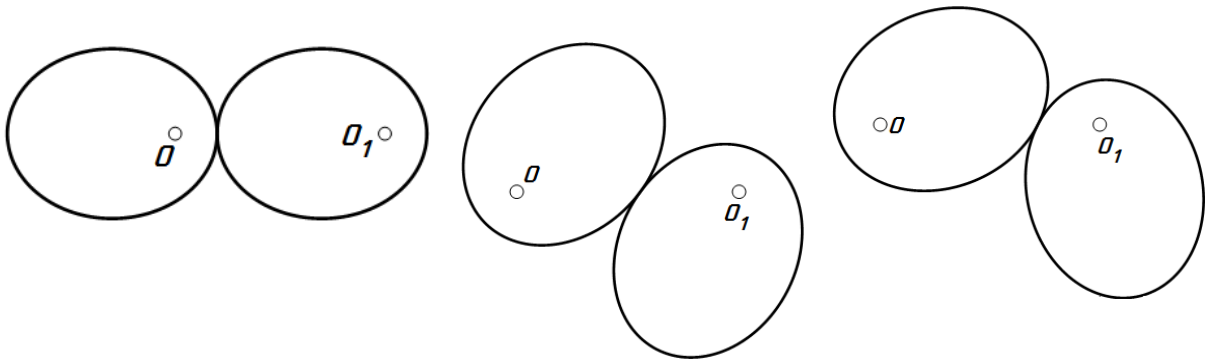


Рис. 6. Проміжні положення двох конгруентних еліпсів ($p=3,2$, $e=0,6$), що обертаються навколо своїх фокусів

Якщо вихідний еліпс буде нерухомим, то при обкочуванні по ньому рухомого еліпса фокус останнього буде описувати коло радіуса r (рис. 7).

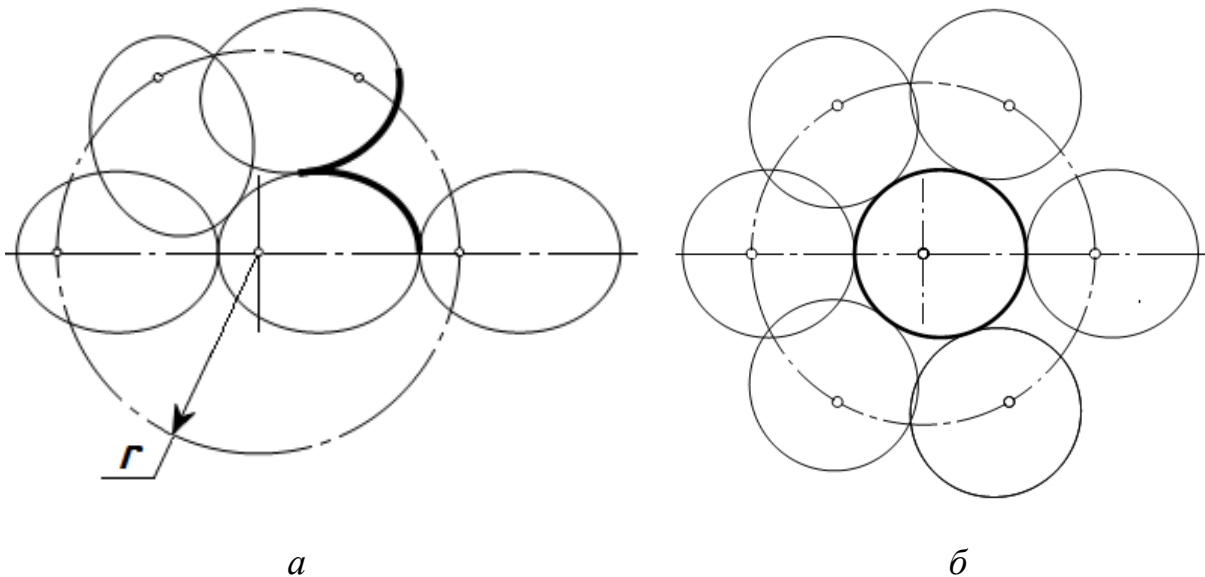


Рис. 7. Окремі положення рухомого еліпса, який котиться по нерухомому конгруентному еліпсу:

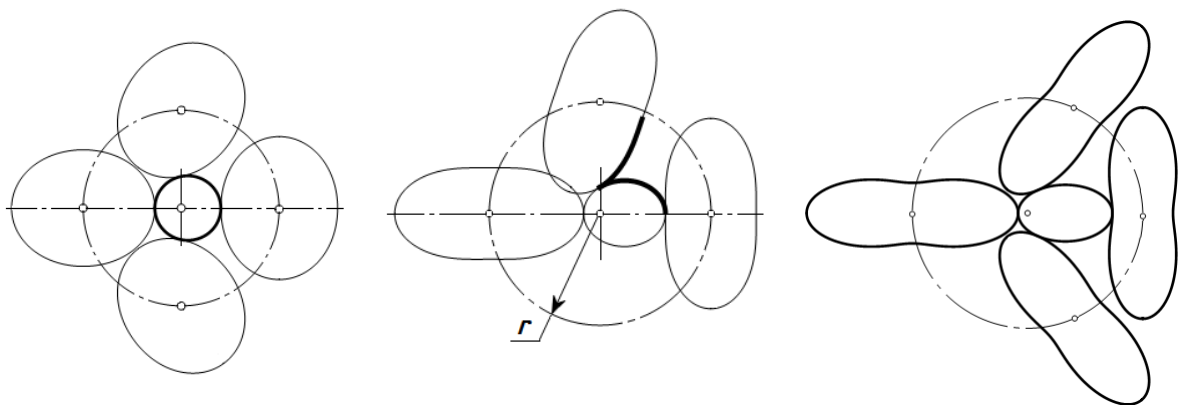
а) $p=3,2$, $e=0,6$;

б) $p=3,2$, $e=0,2$

На рис. 7, а потовщеною лінією виділені рівні дуги еліпсів, які відповідають кутів α нерухомого еліпса і кутів φ рухомого. При зменшенні ексцентриситету конгруентні еліпси наближаються до кіл (рис. 7, б).

Оскільки полярне узагальнене рівняння (13) представляє собою парну функцію, то побудована за ним крива має певну симетрію. Це дає можливість будувати неконгруентні центроїди за умови, що при повному оберті однієї з них, друга робить півоберта, два оберти або інше поєднання числа обертів. Наприклад, на рис. 8 зображено пари центроїд, одна із яких – нерухомий еліпс. Рухома центроїда побудована за умови, що при її повному обкочуванні по нерухомій центроїді вона повертається на

180°. Якщо такі центроїди будуть обертатися навколо нерухомих центрів, то при двох повних обертах еліпса друга центроїда зробить один повний оберт. На перший погляд, друга центроїда подібна до еліпса (рис. 8, а), однак вона ним не є, що видно із наступних рисунків (рис. 8, б, в).



а

б

в

Рис. 8. Пари центроїд, одна із яких є еліпсом із фокальним параметром $p=3,2$ і різним ексцентриситетом:

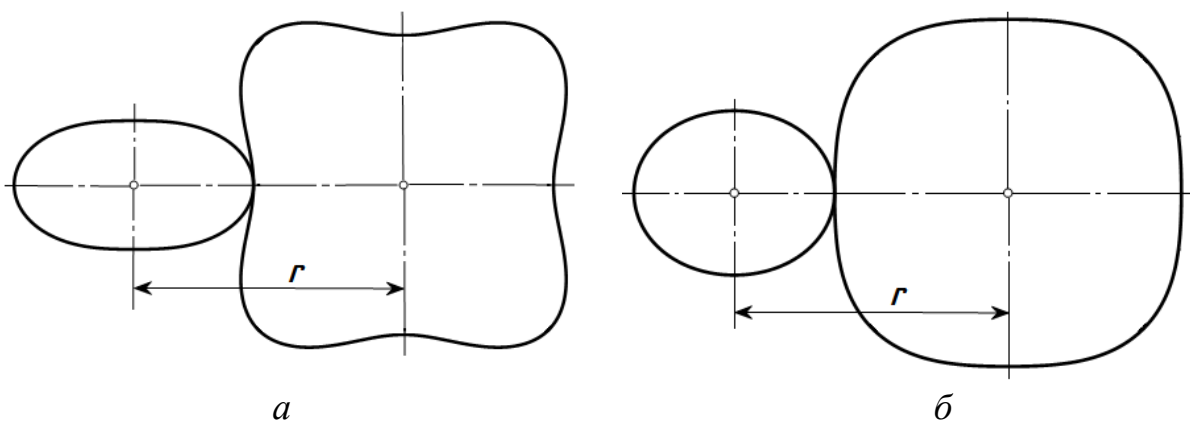
а) $e=0,2$; $r=9,9$;

б) $e=0,6$; $r=13,54$;

в) $e=0,8$; $r=21,71$

Друга центроїда побудована за рівняннями (2) при умові, що кутіві $\alpha=\pi$ у формулі (15) відповідає кут $\varphi=\pi/2$. Для цієї умови потрібно знати відповідне значення міжцентрової відстані r . Для цього рівняння (15) необхідно розв'язати відносно r , як ми це робили для центроїд, якими є кола. Однак цього зробити не вдається, тому значення r із рівняння (15) ми визначали чисельними методами при підстановці в нього $\alpha=\pi$ і $\varphi=\pi/2$. Величини знайдених міжцентрових відстаней зазначені у підрисункових написах на рис. 8. Знайдене значення r , вираз ρ (11) і вираз кута φ (15) було підставлено у рівняння (2) для побудови другої центроїди.

На рис. 9 вихідні центроїди (ведучі) побудовані за полярним рівнянням (13) при $n=2$, а ведені – за описаним алгоритмом при умові, що за два оберти ведучої центроїди ведена робить один оберт.



а

б

Рис. 9. Пари центроїд, одна із яких побудована за полярним рівнянням (13) при $n=2$ і $p=3,2$:

а) $e=0,3$; $r=10,3$;

б) $e=0,1$; $r=9,7$

На рис. 10, *б* побудована ведена центроїда яка при обкочуванні одного симетричного виступу робить половину повного оберту, тобто кут α змінюється в межах $\alpha=0\dots\pi$.

Наступна центроїда (рис. 10,в) побудована ведена центроїда, яка при обкочуванні одного симетричного виступу робить третину повного оберту. В цьому випадку маємо конгруентні центроїди і міжцентрову відстань r не обов'язково знаходити чисельними методами: її можна знайти за формулою: $r=2p/(1-e^2)$. Аналізуючи отримані ведені центроїди, бачимо, що вони подібні до тих кривих, які ми отримували за полярним рівнянням (13) при різних значеннях n , тобто теж мають симетричні виступи (рис. 4), число яких ми позначимо через m .

Отже, схема конструювання центроїд зводиться до наступного.

1. Будуємо ведучу центроїду з допомогою полярного рівняння (13) за заданими сталими p , e , n .
2. Вибираємо число m виступів веденої центроїди.
3. Чисельними методами знаходимо міжцентрову відстань r при підстановці у рівняння (15) значень $\alpha=\pi/n$ і $\varphi=\pi/m$.
4. За параметричними рівняннями (2) будуємо дугу веденої центроїди.

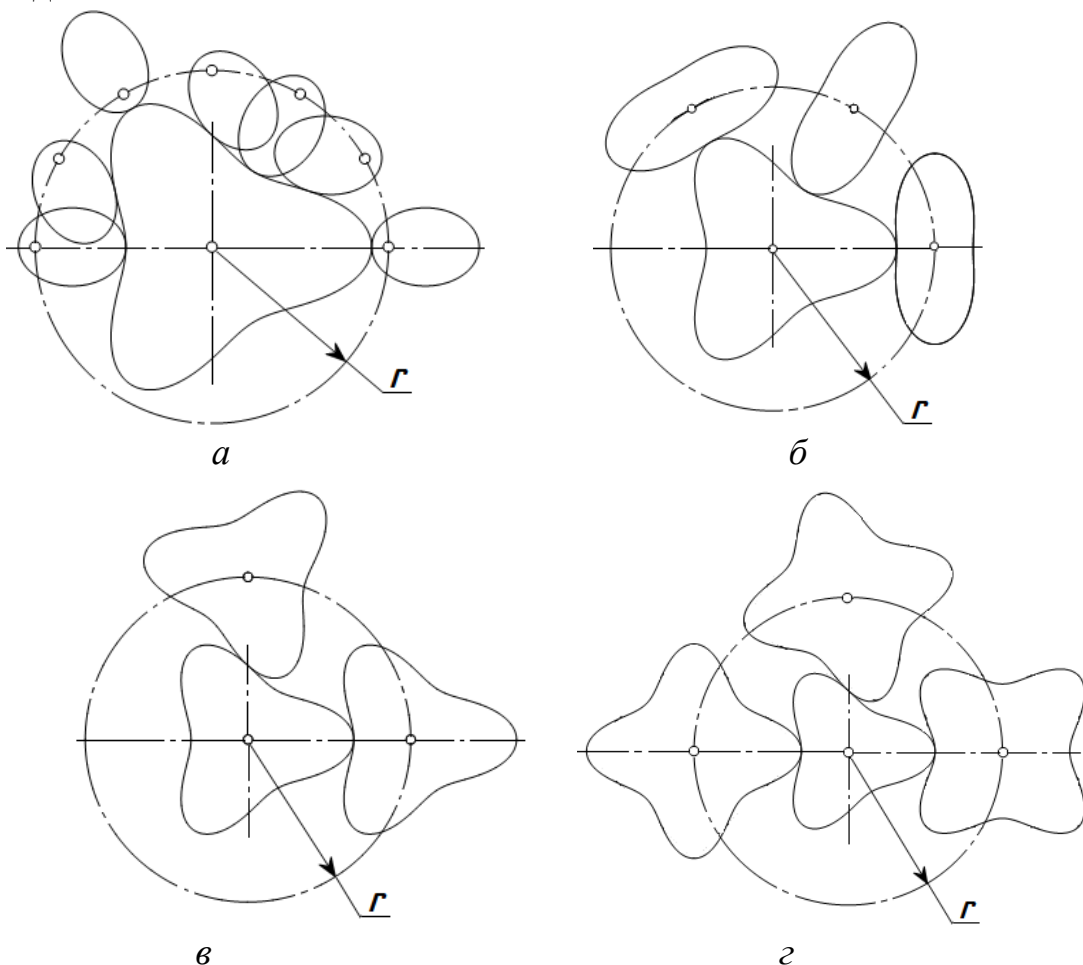


Рис. 10. Пари центроїд, одна із яких побудована за полярним рівнянням (13) при $n=3$, $p=3,2$, і $e=0,3$:

а) $r=5,054$;

б) $r=5,99$;

в) $r=7,03$;

г) $r=8,113$

Висновки та перспективи. Зубчасті зачеплення з некруглими колесами знайшли своє застосування в техніці. Це стосується механізмів, для яких передача обертального руху потребує не сталого передавального числа, а змінної передавальної функції, а також у приладах, для яких передавальна функція не важлива, а важливе повне число обертів. Основою для проектування таких зачеплень є центроїди. В роботі розглянуто проектування центроїд на основі узагальненого рівняння замкненої кривої в полярній системі координат. В залежності від сталої n , яка вказує на число рівномірно розташованих виступів із максимальним значенням полярної відстані ρ , можна отримати різні ведучі центроїди, в тому числі коло при $n=0$ і еліпс при $n=1$. Форму веденої центроїди, яка подібна до ведучої тим, що теж може мати m виступів, можна задавати числом цих виступів. При $n=m$ ведуча і ведена центроїди конгруентні. Це значно спрощує конструювання пар центроїд, оскільки форму веденої центроїди не потрібно розшукувати.

Література

1. *Легета Я.П., Шоман О.В.* Геометричне моделювання центроїд некруглих зубчастих коліс за передавальною функцією. *Науковий журнал: МНУ імені В.О. Сухомлинського. Геометричне моделювання та інформаційні технології*, 2016. № 2. С. 59 – 63.
2. *Литвин Ф.Л.* Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука, 1968. 584 с.
3. *Литвин Ф.Л.* Некруглые зубчатые колеса. М.: Машгиз, 1956. 312 с.
4. *Легета Я. П.* Аналітичний опис центроїд та побудова профілю некруглих зубчастих коліс. Сучасні проблеми моделювання, 2016. Вип. 7. С. 97-92. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/cpm_2016_7_18.
5. *Приходько А.А., Смелягин А.И.* Кинематический анализ планетарного зубчатого механизма преобразования вращательного движения в возвратно-вращательное. *Машиностроение*, 2016. № 12 [681]. С. 21 – 27. Режим доступу: <http://izvuzmash.ru/articles/1368/1368.pdf>.
6. Кривые второго порядка в полярных координатах [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://math-lessons.ru/linear_algebra/polartwocurve.htm.
7. T. Hasse. Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf.
8. *Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Бабка В.М.* Окремий випадок конгруентних центроїд некруглих коліс, утворених дугами логарифмічної спіралі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К: КНУБА, 2020. Вип. 98. С. 84 – 93.

References:

1. *Leheta Ya.P., Shoman O.V.* Heometrychne modeliuвання tsentroid nekruglykh zubchastykh kolis za peredavalnoiu funktsiieiu. Naukovyi zhurnal: MNU imeni V.O. Sukhomlynskoho. Heometrychne modeliuвання ta informatsiini tekhnolohii, 2016. № 2. P. 59 – 63.. {in Ukrainian}
2. *Litvin F.L.* Teoriya zubchatykh zaceplenij. M.: Nauka, 1968. 584 p. {in Russian}
3. *Litvin F.L.* Nekruglye zubchatye koleasa. M.: Mashgiz, 1956. 312 p. . {in Russian}
4. *Leheta Ya. P.* Analitychnyi opys tsentroid ta pobudova profilu nekruglykh zubchastykh kolis. Suchasni problemy modeliuвання, 2016. Vyp. 7. P. 97-92. Rezhym dostupu: http://nbuv.gov.ua/UJRN/cpm_2016_7_18. {in Ukrainian}
5. *Prykhodko A.A., Smeliahyn A.Y.* Kynematycheskyi analiz planetarnoho zubchatoho mekhanyzma preobrazovanyia vrashchatelnoho dvyzhenyia v vozvratno-vrashchatelnoe. Mashynostroenye, 2016. № 12 [681]. P. 21 – 27. Rezhym dostupu: <http://izvuzmash.ru/articles/1368/1368.pdf> {in Ukrainian}
6. Krivyye vtorogo poryadka v polyarnyih koordinatah [Elektronniy resurs]. Rezhim dostupu: https://math-lessons.ru/linear_algebra/polartwocurve.htm {in Russian}
7. T. Hasse. Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen. http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf. {in German}
8. *Kresan T.A., Pylypaka S.F., Hryshchenko I.Iu., Babka V.M.* Okremyi vypadok konhruentnykh tsentroid nekruglykh kolis, utvorenykh duhamy loharyfmichnoi spirali. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. K: KNUBA, 2020. Vyp. 98. P. 84 – 93. {in Ukrainian}.

К. Т. Н. **Кресан Т.А.**

tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

Национальный университет биоресурсов и природопользования
Украины

КОНСТРУИРОВАНИЕ ЦЕНТРОИД НЕКРУГЛЫХ КОЛЕС НА ОСНОВАНИИ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЛИПСА

В различных механизмах и машинах для передачи вращательного движения между параллельными осями применяются цилиндрические зубчатые колеса, в которых центроидами являются окружности. Эти окружности играют роль исходных данных, на основе которых происходит проектирования зубов зацепления. Расстояние между

центроидами определяется суммой их радиусов. При вращении одной центроиды происходит вращение другой центроиды при отсутствии скольжения. Это значит, что путь (то есть длина дуги окружности), который проходит каждая центроида, является равным. Характерным показателем такой передачи является передаточное число, определяемое отношением угловой скорости вращения одной центроиды (окружности) к другой. Передаточное число можно определить также отношением радиусов центроид, то есть кругов. Оно всегда является постоянным. Если окружности равны, то передаточное число равно единице.

Зубчатые зацепления с некруглыми колесами находят свое применение в различных устройствах и механизмах. Для конструирования исходной (ведущей) центроиды используется уравнение в полярной системе координат, описывающее целую группу характерных замкнутых кривых. Целое число n , которое входит в уравнения, влияет на форму исходной центроиды, которая имеет n выступлений и впадин, равномерно расположенных через равные промежутки полярного угла. Ведомая центроида, разыскиваемого по полученным уравнениями на основе ее качения по ведущей без скольжения, тоже имеет подобную форму с числом t выступлений и впадин. Пара центроид задается числами n для ведущей кривой и t для ведомой кривой. Сочетание этих двух цифр дает разные пары центроид. Если $n=t$, то ведущая и ведомая центроиды будут конгруэнтными. Такой случай выгоден тем, что обе центроиды имеют одинаковую форму и изготавливаются по одинаковой схеме, уменьшает трудоемкость работ. При $n=t=0$ центроидами будут конгруэнтные окружности, при $n=t=1$ - конгруэнтные эллипсы с центрами вращения в фокусах.

Важным признаком разработанного подхода является то, что подынтегральное выражение, полученное на основании равенства соответствующих дуг обеих центроид, можно проинтегрировать. Это позволяет получить параметрические уравнения ведомой центроиды в конечном виде.

Ключевые слова: центроиды, полярная система, межцентровое расстояние, параметрические уравнения.

Ph.D. Tetiana Kresan
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

CONSTRUCTION OF CENTROIDS OF NON-CIRCULAR WHEELS ON THE BASIS OF DEFORMATION OF AN ELLIPSE

Cylindrical gears in which the centroids are circles are used in various mechanisms and machines to transmit rotational motion between parallel axes. These circles play the role of the initial data on the basis of which the gear teeth

are designed. The distance between centroids is determined by the sum of their radii. When one centroid rotates, another centroid rotates in the absence of sliding. This means that the path (that is the length of the arc of a circle) that each centroid passes is equal. A characteristic indicator of such transmission is the gear ratio, which is determined by the ratio of the angular velocity of rotation of one centroid (circle) to another. The gear ratio can also be determined by the ratio of the radii of the centroids, that is circles. It is always constant. If the circles are equal, then the gear ratio is equal to one.

Gears with non-circular wheels are used in various devices and mechanisms. To construct the original (leading) centroid, an equation in the polar coordinate system is used, which describes a whole group of characteristic closed curves. The integer n , which is included in the equation, affects the shape of the original centroid, which has n protrusions and depressions evenly spaced at equal intervals of the polar angle. The driven centroid, which is searched for by the obtained equations on the basis of its rolling on the leading without sliding, also has a similar shape with the number of m protrusions and depressions. The centroid pair is given by the numbers n for the leading curve and m for the driven curve. The combination of these two numbers gives different pairs of centroids. If $n=m$, then the master and slave centroids will be congruent. This case is advantageous in that both centroids have the same shape and are made according to the same scheme, which reduces the complexity of the work. At $n=m=0$ the centroids will be congruent circles, at $n=m=1$ - congruent ellipses with centers of rotation in the foci.

An important feature of the developed approach is that the subinterval expression obtained on the basis of the equality of the corresponding arcs of both centroids can be integrated. This allows us to obtain the parametric equations of the driven centroid in the final form.

Keywords: centroids, polar system, center-to-center distance, parametric equations.