

д. т. н., професор **Пилипака С.Ф.**,

psf55@ukr.net, ORCID 0000-0002-1496-4615, h-index: 5,

к. т. н., доцент **Воліна Т.М.**,

t.n.zaharova@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8610-2208, h-index: 4,

к. т. н. **Несвідомін А.В.**,

a.nesvidomin@gmail.com, ORCID 0000-0002-9227-4652,

к. т. н., доцент **Бабка В.М.**,

babkavitaliy@ukr.net, ORCID 0000-0003-4971-4285,

Національний університет біоресурсів і природокористування України,

к. т. н. **Шуляк І.С.**,

i.s.shuliak@gmail.com, ORCID 0000-0003-0609-731X

ТРАНСПОРТУВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ ВЕРТИКАЛЬНИМ ШНЕКОМ

У статті розглянуто підйом частинки транспортуючим органом у вигляді вертикального шнека, обмеженого співвісним циліндричним кожухом. При обертанні шнека частинка віддаляється на периферію і починає взаємодіяти також із циліндричним кожухом. Частинка одночасно ковзає по обох поверхнях і в абсолютному русі піднімається вгору. Її відносним рухом є ковзання по гвинтовій лінії – периферії шнека. Складено диференціальні рівняння руху частинки в проєкціях на рухому систему координат, яка обертається разом зі шнеком. Рівняння розв'язано чисельними методами і побудовано графіки кінематичних характеристик, в тому числі відносної і абсолютної траєкторій. З'ясовано граничне значення кута підйому гвинтової лінії – периферії шнека, при якому припиняється підйом частинки при заданій кутовій швидкості обертання шнека.

Ключові слова: частинка; вертикальний шнек; кутова швидкість; циліндричний кожух; траєкторія ковзання; коефіцієнт тертя.

Постановка проблеми. Робота багатьох машин пов'язана із взаємодією частинок технологічного матеріалу з їх робочими органами. Частинки матеріалу змушені обирати траєкторію ковзання по поверхні робочого органу. Поверхня робочого органу може бути рухомою, наприклад, здійснювати обертальний рух. У такому випадку рух частинки складатиметься з двох складових: відносного руху частинки (ковзання частинки по поверхні) і переносного (обертального) руху самої поверхні. Відносний рух частинки розглядається по відношенню до рухомої системи координат. Сума цих рухів дасть абсолютну траєкторію, по якій рухається частинка в нерухомій системі координат. Послідовне диференціювання

довжини траєкторії по часу дасть абсолютну швидкість і прискорення частинки.

У механіці при розв'язуванні задач динаміки матеріальної точки складаються рівняння рівноваги прикладених сил в проекціях на осі просторової системи координат. Ця система координат може бути як нерухомою, так і рухомою. У нашому випадку за таку систему прийнято рухома система координат, яка в диференціальній геометрії носить назву супровідного тригранника Френе напрямної кривої. Рух тригранника по напрямній кривій є переносним рухом, рух точки в системі тригранника – відносним.

Ціль статті. Застосувати рухомий тригранник і формули Френе для аналітичного опису складного руху матеріальної точки по периферії вертикального шнека, який обертається всередині співвісного циліндричного кожуха.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для аналітичного опису транспортування технологічного матеріалу, який складається з окремих частинок, застосовуються різні підходи. Це пояснюється складністю процесів, які відбуваються при взаємодії частинок між собою. Тому досить поширеним є розгляд транспортування окремої частинки, рух якої можна описати аналітично. Отримані закономірності певним чином можна перенести на технологічний матеріал і перевірити на практиці. Технологічним матеріалом можуть бути мінеральні добрива [1 – 3], різні суміші (зернові та інші) для сепарування і очищення [4, 5]. Рух частинок по гвинтових і подібних до них поверхнях розглянуто в працях [6 – 8], рух зерна по рухомих поверхнях висівних апаратів і інших поверхнях сільськогосподарських машин – в працях [9 – 10]. В останніх працях розмірами зернини знехтувано і вона приймається за матеріальну частинку. Можливі випадки прирівнювання до матеріальної частинки і інших тіл, якщо силами інерції від їх обертання можна знехтувати із-за малих кутових швидкостей [11]. Застосування рухомого тригранника Френе напрямної кривої для описання складного руху матеріальної точки розглянуто в праці [12].

Основна частина. Напрямною кривою супровідного тригранника в загальному випадку є просторова крива. Ми розглянемо частковий випадок для плоскої напрямної кривої C_e (рис. 1). Супровідний тригранник утворений взаємно перпендикулярними одиничними ортами $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$. Стична площина тригранника, утворена ортами дотичної \bar{t} і головної нормалі \bar{n} , зафарбована сірим кольором. Вона збігається із площиною μ , в якій розташована крива C_e . Точка B в системі тригранника задається координатами ρ_t, ρ_n і ρ_b .

Нехай супровідний тригранник рухається із заданою швидкістю V_e вздовж кривої C_e . В такому випадку він ще і повертатиметься на кут α , швидкість повороту якого залежатиме від швидкості повороту орта дотичної \bar{t} . На певному проміжку довжини дуги кривої Δs середня

швидкість повороту оцінюється відношенням $\Delta\alpha/\Delta s$. Границя цього відношення при прямуванні Δs до нуля носить назву кривини k кривої.

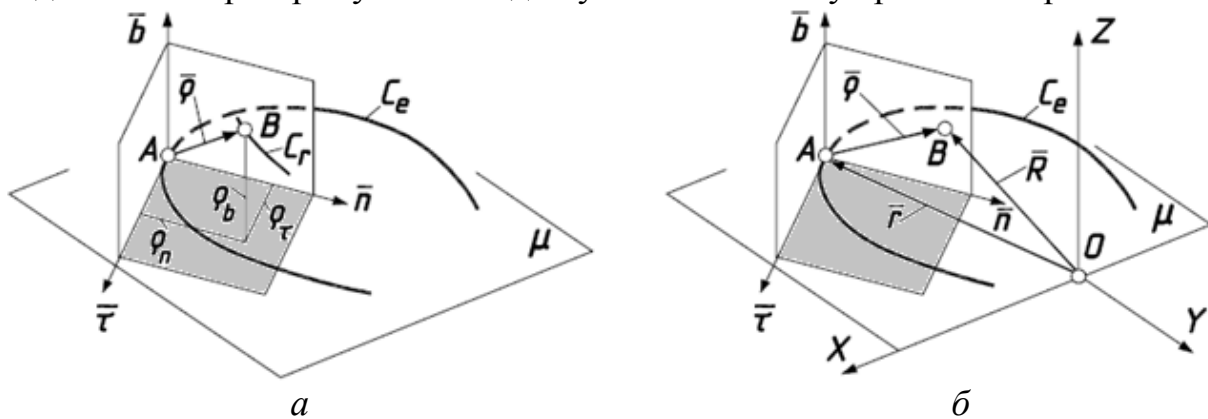


Рис. 1. Графічні ілюстрації до складного руху точки B , у системі супровідного тригранника Френе напрямної кривої C_e : а) супровідний тригранник $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ із заданою точкою B в його системі; б) нерухома $OXYZ$ та рухома $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ системи координат із зазначеними радіус-векторами точки B в них

З іншої сторони, границя відношення $\Delta\alpha/\Delta t$, де Δt – час, є величина кутової швидкості ω повороту орта дотичної $\bar{\tau}$, тобто тригранника Френе. Між кривиною k кривої і кутовою швидкістю ω повороту тригранника існує взаємозв'язок:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = kV_e \quad (1)$$

Векторне рівняння положення точки B згідно рис. 1, б запишеться:

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\rho}, \quad (2)$$

де \bar{R} – радіус-вектор розташування частинки в нерухомій системі $OXYZ$, \bar{r} – радіус-вектор розташування вершини A тригранника на кривій C_e , $\bar{\rho}$ – радіус-вектор, який задає положення частинки (точки B) в системі тригранника.

Координати ρ_τ, ρ_n і ρ_b в системі тригранника можуть бути змінними і залежними від положення його на кривій C_e , тобто залежними від довжини дуги s напрямної кривої. Отже при русі тригранника по кривій точка B рухатиметься в його системі, описуючи відносну траєкторію C_r (рис. 1, а). Сума переносного руху тригранника і відносного руху точки в системі тригранника дасть абсолютну траєкторію точки B . Розкладемо вектор $\bar{\rho}$ на орти тригранника і з врахуванням цього перепишемо векторне рівняння (2):

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\tau}\rho_\tau + \bar{n}\rho_n + \bar{b}\rho_b. \quad (3)$$

Диференціюванням рівняння (3) по часу t отримаємо вектор абсолютного прискорення. Це зручно зробити із застосуванням тригранника і формул Френе, які широко відомі у диференціальній

геометрії. Вони дозволяють просто знаходити похідні ортів $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ тригранника в проекціях на ці ж орти але у цьому випадку незалежною змінною має бути довжина дуги s – шляху, який проходить вершина тригранника, рухаючись по кривій C_e . Знайдемо взаємозв'язок між абсолютною швидкістю V_a і похідною вектора \bar{R} по змінній s :

$$\bar{V}_a = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}}{ds} \frac{ds}{dt} = V_e \frac{d\bar{R}}{ds}. \quad (4)$$

Для того, щоб отримати вираз абсолютної швидкості V_a , необхідно швидкість V_e переносного руху тригранника по кривій C_e помножити на похідну виразу (3). Продиференціюємо (3) по змінній s , маючи на увазі, що $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$ і $\rho_b = \rho_b(s)$:

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} + \left(\frac{d\bar{\tau}}{ds} \rho_\tau + \bar{\tau} \frac{d\rho_\tau}{ds} \right) + \left(\frac{d\bar{n}}{ds} \rho_n + \bar{n} \frac{d\rho_n}{ds} \right) + \left(\frac{d\bar{b}}{ds} \rho_b + \bar{b} \frac{d\rho_b}{ds} \right) \quad (5)$$

Похідні $\frac{d\bar{r}}{ds}$, $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, $\frac{d\bar{n}}{ds}$, $\frac{d\bar{b}}{ds}$ згідно формул Френе розписуються в проекціях на орти тригранника через скрут σ і кривину k напрямної кривої C_e . Напрямна крива є плоскою кривою, отже скрут $\sigma = 0$. Формули Френе для цього випадку спрощуються і мають наступний вигляд:

$$\bar{r}' = \bar{\tau}; \quad \bar{\tau}' = k\bar{n}; \quad \bar{n}' = -k\bar{\tau}; \quad \bar{b}' = 0. \quad (6)$$

Після підстановки виразів похідних (6) у (5) і групування проекцій по ортах $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{R}' &= \bar{\tau} + \bar{n}k\rho_\tau + \bar{\tau}\rho'_\tau - \bar{\tau}k\rho_n + \bar{n}\rho'_n = \\ &= \bar{\tau}(1 + \rho'_\tau - k\rho_n) + \bar{n}(\rho'_n + k\rho_\tau) + \bar{b}\rho'_b. \end{aligned} \quad (7)$$

Отже проекції абсолютної швидкості на орти тригранника з урахуванням (4) запишуться:

$$\begin{aligned} - \text{на орт } \bar{\tau}: \quad V_{a\tau} &= V_e(1 + \rho'_\tau - k\rho_n); \\ - \text{на орт } \bar{n}: \quad V_{an} &= V_e(\rho'_n + k\rho_\tau); \\ - \text{на орт } \bar{b}: \quad V_{ab} &= V_e\rho'_b. \end{aligned} \quad (8)$$

Після диференціювання абсолютної швидкості (4) по часу t при умові, що $V_e = \text{const}$, отримаємо вираз абсолютного прискорення w :

$$\bar{w} = \frac{d\bar{V}_a}{dt} = \frac{d\bar{V}_a}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{V}_a}{ds} V_e = V_e^2 \frac{d^2\bar{R}}{ds^2}. \quad (9)$$

Другу похідну $\overline{R''}$, яка входить до виразу (9), знаходимо диференціюванням векторного виразу (7) по змінній s із застосуванням формул Френе (6), маючи на увазі, що кривина $k=k(s)$ є змінною величиною. Отримані вирази групуємо по ортах тригранника і множимо на V_e^2 згідно (9). Вирази абсолютного прискорення точки B у проєкціях на орти тригранника запишуться:

$$\begin{aligned} w_\tau &= V_e^2 [\rho_\tau'' - k' \rho_n - k(k\rho_\tau + 2\rho_n')]; \\ w_n &= V_e^2 [\rho_n'' - k' \rho_\tau + k(1 - k\rho_n + 2\rho_\tau')]; \\ w_b &= V_e^2 \rho_b''. \end{aligned} \quad (10)$$

Вирази абсолютного прискорення \overline{w} необхідно мати для складання векторного рівняння руху частинки у вигляді $m\overline{w} = \overline{F}$, де m – маса частинки, \overline{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Застосуємо отримані результати для аналітичного опису процесу транспортування частинки вертикальним шнеком, який обертається навколо своєї осі всередині співвісного циліндричного кожуха. При попаданні частинки на поверхню шнека вона починає ковзати по ньому, віддаляючись від осі під дією відцентрової сили (на рис. 2, а траєкторія ковзання зображена штриховою лінією).

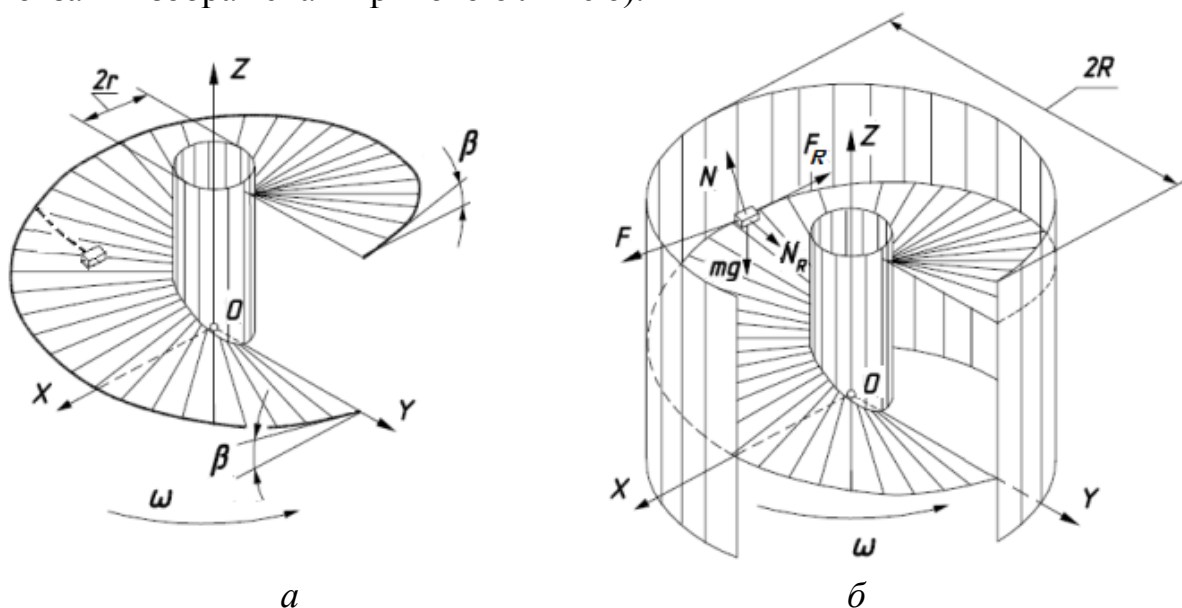


Рис. 2. Графічні ілюстрації до переміщення частинки вертикальним шнеком: а) один виток поверхні шнека із траєкторією ковзання частинки по ньому; б) прикладені до частинки сили, зумовлені дією поверхонь шнека і циліндричного кожуха

При зустрічі із циліндричним кожухом частинка починає взаємодіяти із обома поверхнями. При цьому вона змушена ковзати по гвинтовій лінії – крайці шнека із сталим кутом підйому β . Якщо обертання шнека із кутовою швидкістю ω відбувається проти годинникової стрілки, то частинка буде ковзати по гвинтовій лінії в протилежну сторону і при

цьому повинна підніматися вгору. Отже ковзання частинки по відношенню до шнека відбувається за годинниковою стрілкою, а підйом забезпечується відповідним напрямом навивки шнека (рис. 2). На частинку діють наступні сили: сила ваги mg , де $g=9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння, сила реакції поверхні шнека N , сила реакції поверхні циліндричного кожуха N_R , сила тертя F , спричинена ковзанням частинки по поверхні шнека і сила тертя F_R , спричинена ковзанням частинки по поверхні циліндричного кожуха (рис. 2, б).

При обертанні шнека обертається гвинтова лінія – його крайка, а по гвинтовій лінії ковзає частинка. В загальному випадку параметричні рівняння гвинтової лінії в системі тригранника запишуться:

$$\rho_\tau = R \cos \alpha; \quad \rho_n = R \sin \alpha; \quad \rho_b = R \alpha \tan \beta, \quad (11)$$

де R – радіус циліндра, на якому розташована гвинтова лінія;

β – кут підйому гвинтової лінії;

α – кут повороту точки, яка рухається по гвинтовій лінії, навколо її осі – незалежна змінна.

Нехай напрямною кривою для тригранника буде інше коло із сталою кривиною k , тобто радіуса $1/k$ (рис. 3, а). При русі тригранника по напрямному колу точка B одночасно має ковзати по гвинтовій лінії. Щоб поєднати ці рухи, потрібно задати залежність $\alpha = \alpha(s)$, де s – довжина дуги напрямного кола. Від залежності $\alpha = \alpha(s)$ залежить форма абсолютної траєкторії точки B . Вона матиме просторову форму і не задовольнятиме вимогам роботи шнека, у якого абсолютна траєкторія не покидає поверхні циліндра радіуса R (рис. 2, б). За вимогою роботи шнека обидва кола мають бути рівними, тобто $R = 1/k$, при підйомі по гвинтовій лінії частинка має повертатися за годинниковою стрілкою і вершина тригранника має рухатися по колу (рис. 3, б).

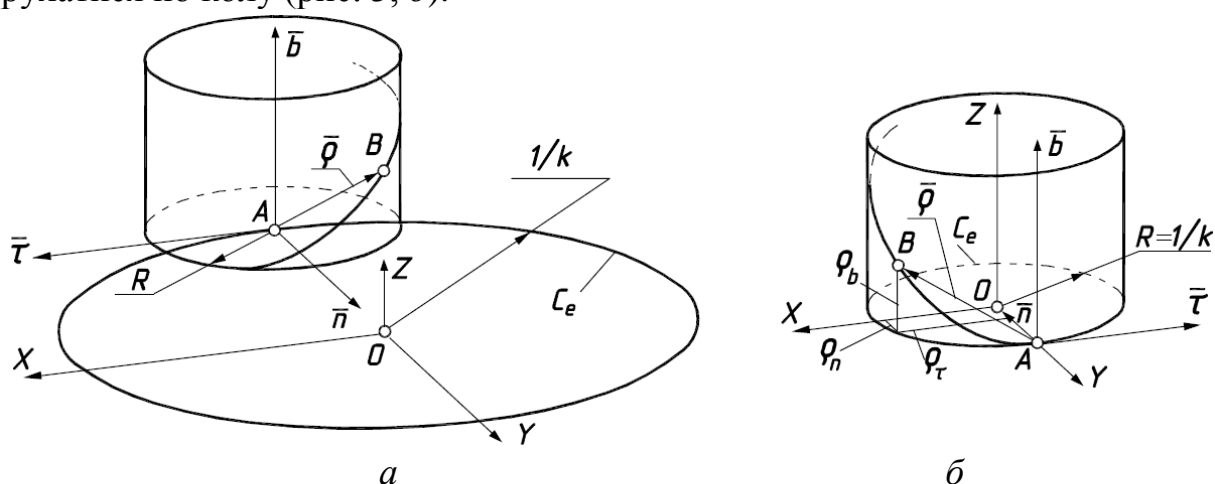


Рис. 3. Варіанти утворення абсолютної траєкторії точки B , яка в системі тригранника рухається по гвинтовій лінії: а) напрямне коло C_e і коло основи циліндра мають різні радіуси; б) напрямне коло C_e і коло основи циліндра збігаються

Цим вимогам задовольняють наступні параметричні рівняння гвинтової лінії в системі тригранника:

$$\rho_\tau = -R \sin \alpha; \quad \rho_n = R - R \cos \alpha; \quad \rho_b = R \alpha \operatorname{tg} \beta \quad (12)$$

Для знаходження абсолютного прискорення за формулами (10) нам потрібно мати перші і другі похідні рівнянь (12). Знаходимо їх, маючи на увазі, що $\alpha = \alpha(s)$:

$$\begin{aligned} \rho'_\tau &= -R \alpha' \cos \alpha; \quad \rho''_\tau = R \alpha'^2 \sin \alpha - R \alpha'' \cos \alpha; \\ \rho'_n &= R \alpha' \sin \alpha; \quad \rho''_n = R \alpha'^2 \cos \alpha + R \alpha'' \sin \alpha; \\ \rho'_b &= R \alpha' \operatorname{tg} \beta; \quad \rho''_b = R \alpha'' \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставимо похідні (13) у (10), маючи на увазі, що $k=1/R$ і $k'=0$. Після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{V_e^2}{R} \left[(R \alpha' - 1)^2 \sin \alpha - R^2 \alpha'' \cos \alpha \right]; \\ w_n &= \frac{V_e^2}{R} \left[(R \alpha' - 1)^2 \cos \alpha + R^2 \alpha'' \sin \alpha \right]; \\ w_b &= V_e^2 R \alpha'' \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (14)$$

Для складання рівнянь руху частинки необхідно знати напрям дії всіх прикладених сил. Сила ваги mg спрямована вниз, тобто в протилежну сторону напрямку бінормалі. Проекції одиничного вектора на орти тригранника запишуться:

$$mg: \{0; 0; -1\}. \quad (15)$$

Напрямок реакції поверхні шнека N (рис. 2, б) можна знайти засобами диференціальної геометрії. Ми знайдемо її простіше, зважаючи на те, що вона одночасно перпендикулярна двом лініям: гвинтовій лінії і прямолінійній твірній поверхні шнека, тобто розташована у дотичній до циліндра площині. При русі частинки по гвинтовій лінії кут нахилу одиничного вектора N до горизонтальної площини є сталим. Його складова на горизонтальну площину рівна $\sin \beta$, а на орт \bar{b} бінормалі – $\cos \beta$. Горизонтальну складову $\sin \beta$ розкладемо на орти $\bar{\tau}$ і \bar{n} зважаючи на те, що її поворот на кут α відбувається за годинниковою стрілкою. Таким чином, проекції одиничного вектора нормалі N на орти тригранника запишуться:

$$N: \{\sin \beta \cos \alpha; -\sin \beta \sin \alpha; \cos \beta\} \quad (16)$$

Реакція N_R поверхні циліндра спрямована перпендикулярно його дотичній площині в сторону осі (рис. 2, б). Одиничний вектор в проекціях на орти тригранника запишеться:

$$N_R: \{\sin \alpha; \cos \alpha; 0\}. \quad (17)$$

Сила тертя є добутком реакції поверхні на коефіцієнт тертя. Позначимо коефіцієнт тертя частинки по поверхні шнека через f і по поверхні циліндричного кожуха через f_R . Тоді величини сил тертя, позначених на рис. 2, \bar{b} , запишуться: $F=fN$, $F_R=f_R N_R$. Тепер потрібно визначити напрям дії цих сил. Сила F спрямована в протилежну сторону вектора швидкості ковзання частинки по шнеку. Частинка ковзає по гвинтовій лінії (крайці шнека), отже напрям ковзання задається першими похідними рівнянь (12), і ці похідні наведені у (13). Їх геометрична сума, помножена на швидкість V_e , дасть величину швидкості V_r відносного руху частинки:

$$V_r = V_e \sqrt{\rho_{\tau}'^2 + \rho_n'^2 + \rho_b'^2} = \frac{V_e R \alpha'}{\cos \beta} \quad (18)$$

Напрямок одиничного вектора відносної швидкості V_r отримаємо діленням її складових на величину (18):

$$V_r: \{-\cos \beta \cos \alpha; \cos \beta \sin \alpha; \sin \beta\} \quad (19)$$

Сила F_R спрямована в протилежну сторону вектора швидкості ковзання частинки по поверхні циліндричного кожуха, який не рухається. Це означає, що вона спрямована в протилежну сторону від вектора абсолютної швидкості. Величину абсолютної швидкості V_a і проекції одиничного вектора визначаємо аналогічно:

$$V_a = V_e \sqrt{V_{a\tau}^2 + V_{an}^2 + V_{ab}^2} = \frac{V_e}{\cos \beta} \sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2} \quad (20)$$

$$V_a: \left\{ \begin{array}{l} \frac{(1 - 2R\alpha') \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2}}; \\ \frac{(1 - 2R\alpha') \cos \beta \sin \alpha}{\sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2}}; \\ \frac{R\alpha' \sin \beta}{\sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2}} \end{array} \right\} \quad (21)$$

Розпишемо векторне рівняння $m\bar{a} = \bar{F}$ в проекціях на орти $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ тригранника із врахуванням напрямів (15), (16), (17), (19) і (21) діючих відповідних сил $mg, N, N_R, F=fN, F_R=f_R N_R$:

$$\begin{aligned}
mw_\tau &= N \sin \beta \cos \alpha + N_R \sin \alpha + fN \cos \beta \cos \alpha - \\
&\quad - f_R N_R \frac{(1 - 2R\alpha') \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2}}; \\
mw_n &= -N \sin \beta \sin \alpha + N_R \cos \alpha - fN \cos \beta \sin \alpha - \\
&\quad - f_R N_R \frac{(1 - 2R\alpha') \cos \beta \sin \alpha}{\sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2}}; \\
mw_b &= -mg + N \cos \beta - fN \sin \beta - \\
&\quad - f_R N_R \frac{R\alpha' \sin \beta}{\sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2}}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Підставимо в (22) вирази абсолютного прискорення із (14) і отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь із трьома невідомими функціями: $\alpha=\alpha(s)$, $N=N(s)$ і $N_R=N_R(s)$. Розв'яжемо систему відносно α'' , N , N_R :

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \frac{\cos \beta \left[f_R (R\alpha' - 1)^2 (1 - 2R\alpha' + \cos 2\beta - f \sin 2\beta) \right]}{2R^2 \sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2}} - \\
&\quad - \frac{g \cos \beta}{RV_e^2} (\sin \beta + f \cos \beta).
\end{aligned} \tag{23}$$

$$N = m \cos \beta \left[g + \frac{V_e^2 f_R \sin \beta (R\alpha' - 1)^2}{R \sqrt{(1 - 2R\alpha') \cos^2 \beta + R^2 \alpha'^2}} \right]. \tag{24}$$

$$N_R = \frac{mV_e^2}{R} (R\alpha' - 1)^2. \tag{25}$$

Диференціальне рівняння (23) не залежить від (24) і (25), тому може бути розв'язане самостійно. Для цього потрібно застосовувати чисельні методи. Реакції поверхонь (24) і (25) знаходять після того, як розв'язано рівняння (23).

Очевидно, що при заданому куту β підйому гвинтової лінії – периферії шнека – кутової швидкості ω його обертання буде недостатньо для підйому частинки вгору. Можливий випадок, коли вона «залипає», тобто обертається разом із шнеком, не ковзаючи по ньому. В такому випадку у відносному русі вона нерухома, а у абсолютному описує коло на внутрішній поверхні циліндричного кожуха. Із рівняння (23) знайдемо, за яких умов це відбувається. Очевидно, що в цьому випадку $\alpha'=\alpha''=0$. Тоді рівняння (23) набуває вигляду:

$$(fgR - f_R V_e^2) \cos \beta + (gR + f_R f V_e^2) \sin \beta = 0. \quad (26)$$

Розв'язавши (26) відносно переносної швидкості V_e , отримаємо:

$$V_e = \sqrt{\frac{gR(\sin \beta + f \cos \beta)}{f_R(\cos \beta - f \sin \beta)}}. \quad (27)$$

Розглянемо приклад. Нехай кут підйому крайки шнека $\beta=15^\circ$, радіус циліндричного кожуха $R=0,1$ м, коефіцієнти тертя $f=f_R=0,3$. Із формули (27) отримуємо: $V_e=1,42$ м/с. Для нашого випадку кривина стала і рівна $k=1/R$, тому кутова швидкість ω теж стала і визначається згідно виразу (1): $\omega=V_e/R=14,2$ с⁻¹.

Важливим показником є швидкість V_b підйому частинки вгору. Вона є рівною складовою як абсолютної, так і відносної швидкостей у вертикальному напрямі, тобто паралельно орту \bar{b} . На основі цього можна записати:

$$V_b = V_e \rho'_b = V_e R \alpha' \operatorname{tg} \beta \quad (28)$$

Якщо шнек обертати із кутовою швидкістю $\omega=V_e/R$, де V_e знайдено за формулою (27), то кутова швидкість ковзання частинки $\alpha'=0$, отже згідно (28) переміщення частинки у вертикальному напрямі відсутнє. Про це свідчить графік $V_b=V_b(s)$, побудований за допомогою чисельного методу (рис. 4,а).

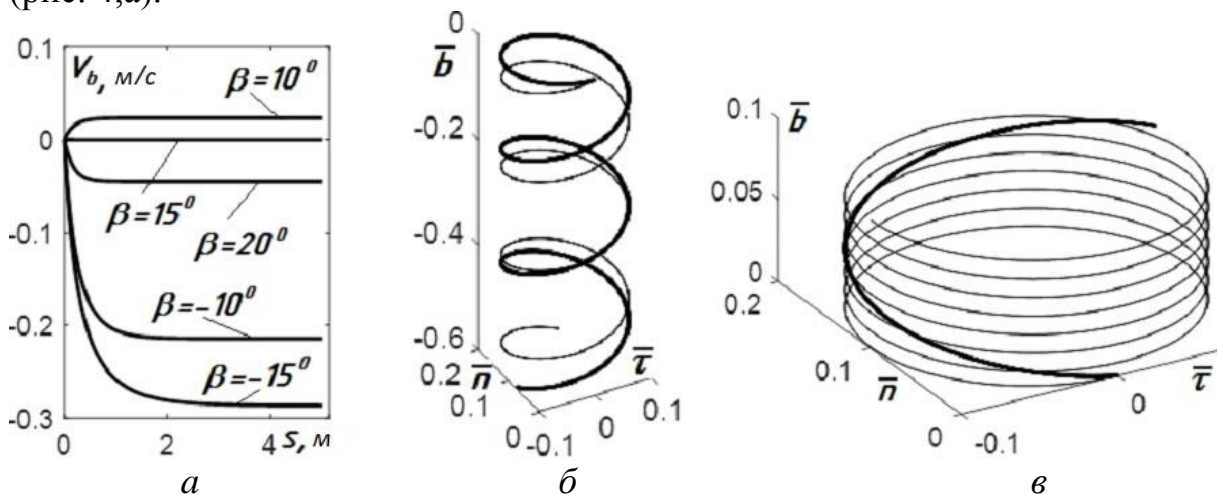


Рис. 4. Графічні ілюстрації до руху частинки при $R=0,1$ м, $f_R=f=0,3$, $V_e=1,42$ м/с: а) графіки швидкості переміщення частинки у вертикальному напрямі в залежності від значення кута β ; б) відносна і абсолютна траєкторії частинки при $\beta=-10^\circ$ (рух вниз); в) відносна і абсолютна траєкторії частинки при $\beta=10^\circ$ (рух вгору)

З нього видно, що при $\beta=15^\circ$ швидкість у вертикальному напрямі $V_b=0$. Однак при кутові $\beta=-15^\circ$ швидкість V_b зростає і з часом стає сталою, однак частинка рухається не вгору, а вниз. Це означає, що напрям навивки шнека змінився на протилежний і частинка ковзає в протилежну сторону

до напрямку його обертання, рухаючись вниз. При збільшенні кута β до 20° частинка рухається вниз незалежно від його знака (на рис. 4,а показано графік для $\beta=20^\circ$, для $\beta=-20^\circ$ графік не побудовано, оскільки її швидкість руху вниз значно зростає). Таким чином, при кутах більших від граничного значення $\beta=15^\circ$ частинка вгору рухатися не може при незмінній кутовій швидкості обертання шнека. При меншому значенні (наприклад, при $\beta=10^\circ$) частинка рухається вгору, а при зміні знака кута β – вниз. Із графіків видно, що у всіх випадках швидкість частинки з часом стає сталою. Кутову швидкість ковзання після стабілізації руху можна знайти, прирівнявши у рівнянні (23) $\alpha''=0$ і розв'язавши відносно α' . Однак таке рівняння потрібно розв'язувати чисельними методами. Наприклад, для $\beta=10^\circ$ отримуємо: $\alpha'=0,927 \text{ м}^{-1}$. Підстановка цього значення у (28) дає: $V_b=0,023 \text{ м/с}$.

На рис. 4,б,в побудовані відносні траєкторії руху частинки за рівняннями (12) при різних значеннях кута β (зображені тонкими лініями). Абсолютні траєкторії показані потовщеними лініями. Вони побудовані за рівняннями (12) при підстановці в них замість кута $\alpha=\alpha(s)$ різниці кутів, на які повертається шнек навколо своєї осі (s/R) і частинка при ковзанні по шнеку ($\alpha=\alpha(s)$), тобто $s/R-\alpha$.

Аналізуючи рівняння (23), можна виявити ще один характерний рух частинки, коли $\alpha''=0$, але $\alpha'\neq 0$. Це можливо, коли вирази в круглих дужках $R\alpha'-1=0$ і $\sin\beta+f\cos\beta=0$. Із виразу у перших дужках отримуємо: $R\alpha'=1$; тобто $\alpha'=1/R$ або $\alpha=s/R$. Це означає, що різниця кутових швидкостей $s/R-\alpha$ дорівнює нулю, тобто кутові швидкості обертання шнека і ковзання частинки по гвинтовій лінії (крайці шнека) однакові і протилежно спрямовані. Із рівності нулю других дужок отримуємо: $\beta=-\text{Arctg}f$. Це означає, що кут β має від'ємне значення і він рівний кутові тертя частинки по поверхні шнека. При від'ємному кутові частинка може рухатися тільки вниз, причому вона опускається по прямій лінії – прямолінійній твірній циліндричного кожуха. Підставивши $\alpha'=1/R$ у вираз (28) знаходимо швидкість опускання частинки: $V_b=V_e \text{tg}\beta$.

Актуальним питанням транспортування частинки є не її опускання, а підйом. Якщо шнек заданий конструктивними параметрами R і β і відомі коефіцієнти тертя f і f_R , то можна знайти граничне значення кутової швидкості обертання шнека, при якій і менше якої підйом частинки неможливий. Наприклад, для $\beta=15^\circ$ ми отримали значення $\omega=14,2 \text{ с}^{-1}$. Для $\beta=30^\circ$ аналогічно отримуємо: $\omega=18,6 \text{ с}^{-1}$. Отже, по мірі збільшення кута β граничне значення величини кутової швидкості зростає. Постає питання: до яких меж може зростати кут β , адже при $\beta=90^\circ$ гвинтова лінія перетворюється у вертикальну пряму і в такому випадку підйом частинки стає неможливим при будь-яких кутових швидкостях обертання шнека, оскільки він перетворюється у вертикальну площину. Щоб відповісти на це питання, розв'яжемо рівняння (26) відносно кута β :

$$\beta = \text{Arccos} \frac{f_R f V_e^2 + gR}{\sqrt{(1 + f^2)(f_R^2 V_e^4 + g^2 R^2)}}. \quad (29)$$

Знайдемо значення величини кута β , при якому частинка «залипає» при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання шнека, тобто при необмеженому зростанні переносної швидкості V_e . Для цього перейдемо до границі:

$$\lim_{V_e \rightarrow \infty} \text{Arccos} \frac{f_R f V_e^2 + gR}{\sqrt{(1 + f^2)(f_R^2 V_e^4 + g^2 R^2)}} = \text{Arcctg} f. \quad (30)$$

Отже існує максимальне значення кута β підйому гвинтової лінії, при якому підйом частинки неможливий ні при яких кутових швидкостях обертання шнека. Величина цього кута залежить від коефіцієнта тертя частинки по поверхні шнека. Таким чином, частинку можна транспортувати вгору при різних кутах β і різних кутових швидкостях обертання шнека із числа допустимих.

З'ясуємо, як впливає на швидкість підйому частинки кут β підйому гвинтової лінії. Візьмемо шнек із конструктивними параметрами $R=0,1$ м і $\beta=30^\circ$. Раніше було знайдено мінімальне значення кутової швидкості при відомих коефіцієнтах тертя f і f_R : $\omega=18,6$ c^{-1} . Максимально можливе значення кута β для нашого випадку згідно (29) становить 46° . Дослідження показали, що найбільша швидкість підйому частинки відбувається при кутові підйому β , рівному половині максимального значення, тобто в нашому випадку при $\beta=23^\circ$. На рис. 5,а побудовано графіки залежності $V_b=V_b(s)$ при $\omega=25$ c^{-1} (значення кутової швидкості обертання шнека має бути більшим від мінімально можливого). З графіка видно, що при $\beta=23^\circ$ швидкість підйому частинки є найбільшою і після стабілізації руху становить $V_b=0,3$ м/с.

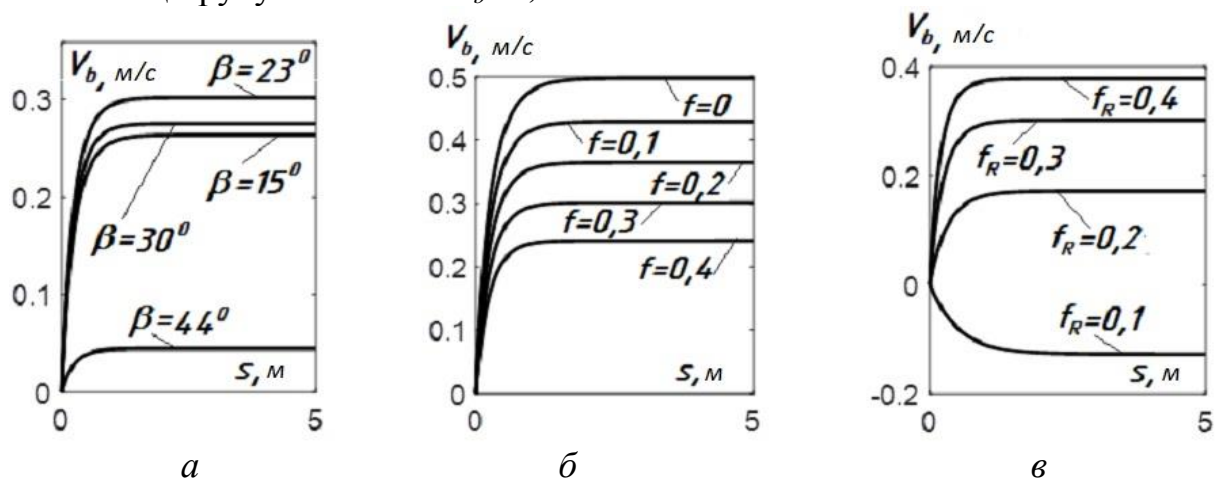


Рис. 5. Графіки залежностей $V_b=V_b(s)$ при $R=0,1$ м, $\omega=25$ c^{-1} , що характеризують швидкість підйому частинки в залежності від деяких факторів: а) вплив на швидкість V_b кута β підйому гвинтової лінії; б) вплив на швидкість V_b коефіцієнта тертя f ; в) вплив на швидкість V_b коефіцієнта тертя f_R

Вплив значень коефіцієнтів f і f_R на швидкість підйому частинки продемонстровано на графіках 5,б і 5,в. З них видно, що по мірі зменшення коефіцієнта тертя f швидкість підйому частинки зростає, а для коефіцієнта тертя f_R навпаки – зменшується. При $f_R=0,1$ частинка не піднімається, а опускається.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Задачу підйому частинки вертикальним шнеком, який обертається всередині співвісного циліндричного кожуха, розв'язано з допомогою рухомої просторової системи координат, в ролі якої виступає тригранник Френе. Напрямною кривою для нього є коло – основа циліндричного кожуха. При складанні диференціальних рівнянь руху частинки в проекціях на орти тригранника використано формули Френе. В результаті чисельного розв'язку рівнянь з'ясовано, що на швидкість підйому частинки впливають конструктивні і технологічні параметри. Зокрема, для заданого радіуса R циліндричного кожуха, коефіцієнтів тертя f і f_R та кутової швидкості обертання ω шнека існує обмеження на кут β підйому гвинтової лінії – крайки шнека. При граничному значенні цього кута частинка «залипає» і обертається разом зі шнеком, описуючи в абсолютному русі коло на внутрішній поверхні циліндричного кожуха. Величина цього кута визначається аналітично через конструктивні і технологічні параметри. Найбільша швидкість підйому частинки досягається при кутові підйому β , вдвічі меншому за граничне значення. Якщо кут β більший за граничне значення, то частинка опускається. Вплив коефіцієнтів тертя f і f_R на швидкість підйому частинки полягає у її збільшенні по мірі зменшення коефіцієнта f або ж по мірі зростання коефіцієнта f_R . Перспективи подальших досліджень полягають у експериментальній перевірці отриманих теоретичних результатів.

Література

1. Świtek S., Takacs V., Sawinska Z., Kosiad T., Tryjanowski P. Mineral nitrogen fertilisers remain a crucial factor even in the ecological intensification of agriculture. *Acta Agriculturae Scandinavica*. Vol. 69(4), 2019. P. 311–316. DOI: 10.1080/09064710.2018.1564787.
2. Kobets A.S., Ponomarenko N.O., Kharytonov M.M. Construction of centrifugal working device for mineral fertilizers spreading. *INMATEH - Agricultural Engineering*. National institute of research-development for machines and installations designed to agriculture and food industry - INMA Bucharest, 2017. Vol. 51, no.1. P. 5–14.
3. Bouhia Y., Hafidi M., Ouhdouch Y. Boukhari M.E.M.E., Mphatso Ch., Zeroual Y., Lyamlouli K. Conversion of waste into organo-mineral fertilizers: current technological trends and prospects. *Rev Environ Sci Biotechnol*, 2022. Vol. 21. P. 425–446. DOI: 10.1007/s11157-022-09619-y.

4. Bulgakov V., Nikolaenko S., Holovach I., Adamchuk V., Kiurchev S., Ivanovs S., Olt J. Theory of grain mixture particle motion during aspiration separation. *Agronomy Research*, 2020. Vol. 18(1). P. 18–37. DOI: 10.15159/ar.20.057.
5. Adamchuk V., Bulgakov V., Gadzalo I., Ivanovs S., Stepanenko S., Holovach I., Ihnatiev Y. Theoretical Study of Vibrocentrifugal Separation of Grain Mixtures on a Sieveless Seed-cleaning Machine. *Rural Sustainability Research*. Vol.46, no.341, 2021. P.116-124. DOI: 10.2478/plua-2021-0023.
6. Shepelev S.D., Cheskidov M.V., Novikova I.Yu., Grakov F.N., Kuznetsov N.A. Studying the Trajectory of Moving Particles in the Air-Screw Separator. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 582, 012031, 2019. DOI: 10.1088/1757-899X/582/1/012031.
7. Kulichkina T.P., Yakovlev B.V., Ereemeeva N.G., Matveev I.A. Modelling of particles motion in the steeply inclined concentrator. *AIP Conference Proceedings*. 2328, 050015, 2021. DOI: 10.1063/5.0042407.
8. Pylypaka S.F., Klendii M.B., Nesvidomin V.M., Trokhaniak V.I. Particle motion over the edge of an inclined plane that performs axial movement in a vertical limiting cylinder. *Acta Polytechnica*, 2019. Vol. 59 (1). P. 67–76. DOI: 10.14311/AP.2019.59.0067.
9. Krishna P.Sh., Parajuli P., Baral B., Bim Sh. Mathematical modeling, simulation and analysis of rice grain movement for design and fabrication of low-cost winnowing machine. *Journal of Mechanical Engineering Research*. 2017. Vol. 9(1). P. 1–14. DOI: 10.5897/JMER2016.0403.
10. Ying C., Xiaoqiang Z., Caicong W., Guangyuan L. Field-road trajectory segmentation for agricultural machinery based on direction distribution. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2021. 186:106180. DOI: 10.1016/j.compag.2021.106180.
11. Yuriy R., Viatcheslav L., Yuriy L. Development of New Rotating Ring Topology of PSO-Algorithm. *IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, 2021. P. 79–82. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9569973.
12. Pylypaka S., Volina T., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S. The Possibility To Apply The Frenet Trihedron And Formulas For The Complex Movement Of A Point On A Plane With The Predefined Plane Displacement. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021. Vol. 3 (7–111). P. 45–50.

References

1. Świtek S., Takacs V., Sawinska Z., Kosiad T., Tryjanowski P. (2019) Mineral nitrogen fertilisers remain a crucial factor even in the ecological intensification of agriculture. *Acta Agriculturae Scandinavica*. Vol. 69(4). P. 311–316.
2. Kobets A.S., Ponomarenko N.O., Kharytonov M.M. (2017) Construction of centrifugal working device for mineral fertilizers spreading. *INMATEH - Agricultural Engineering*. National institute of research-development for

machines and installations designed to agriculture and food industry - INMA Bucharest. Vol. 51, no.1. P. 5–14.

3. *Bouhia Y., Hafidi M., Ouhdouch Y. Boukhari M.E.M.E., Mphatso Ch., Zeroual Y., Lyamlouli K. (2022) Conversion of waste into organo-mineral fertilizers: current technological trends and prospects. Rev Environ Sci Biotechnol. Vol. 21. P. 425–446.*

4. *Bulgakov V., Nikolaenko S., Holovach I., Adamchuk V., Kiurchev S., Ivanovs S., Olt J. (2020) Theory of grain mixture particle motion during aspiration separation. Agronomy Research. Vol. 18(1). P. 18–37.*

5. *Adamchuk V., Bulgakov V., Gadzalo I., Ivanovs S., Stepanenko S., Holovach I., Ihnatiev Y. (2021) Theoretical Study of Vibrocentrifugal Separation of Grain Mixtures on a Sieveless Seed-cleaning Machine. Rural Sustainability Research. Vol.46, no.341. P.116-124.*

6. *Shepelev S.D., Cheskidov M.V., Novikova I.Yu., Grakov F.N., Kuznetsov N.A. (2019) Studying the Trajectory of Moving Particles in the Air-Screw Separator. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 582, 012031.*

7. *Kulichkina T.P., Yakovlev B.V., Eremeeva N.G., Matveev I.A. (2021) Modelling of particles motion in the steeply inclined concentrator. AIP Conference Proceedings. 2328, 050015.*

8. *Pylypaka S.F., Klendii M.B., Nesvidomin V.M., Trokhaniak V.I. (2019) Particle motion over the edge of an inclined plane that performs axial movement in a vertical limiting cylinder. Acta Polytechnica. Vol. 59 (1). P. 67–76.*

9. *Krishna P.Sh., Parajuli P., Baral B., Bim Sh. (2017) Mathematical modeling, simulation and analysis of rice grain movement for design and fabrication of low-cost winnowing machine. Journal of Mechanical Engineering Research. Vol. 9(1). P. 1–14.*

10. *Ying C., Xiaoqiang Z., Caicong W., Guangyuan L. (2021) Field-road trajectory segmentation for agricultural machinery based on direction distribution. Computers and Electronics in Agriculture. 186:106180.*

11. *Yuriy R., Viatcheslav L., Yuriy L. (2021) Development of New Rotating Ring Topology of PSO-Algorithm. IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). P. 79–82.*

12. *Pylypaka S., Volina T., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S. (2021) The Possibility To Apply The Frenet Trihedron And Formulas For The Complex Movement Of A Point On A Plane With The Predefined Plane Displacement. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Vol. 3 (7–111). P. 45–50.*

Dr. Sc., Professor **Serhii Pylypaka**,
psf55@ukr.net, ORCID 0000-0002-1496-4615, h-index: 5,
Ph. D., assoc. prof. **Tatiana Volina**,
t.n.zaharova@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8610-2208, h-index: 4,
Ph. D. **Andrii Nesvidomin**,
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID 0000-0002-9227-4652,

Ph. D., assoc. prof. **Vitaliy Babka**,
babkavitaliy@ukr.net, ORCID 0000-0003-4971-4285,
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine
(NULES of Ukraine),
Ph. D. **Ivan Shuliak**,
i.s.shuliak@gmail.com, ORCID 0000-0003-0609-731X,
National Transport University

THE TRANSPORTATION OF THE MATERIAL PARTICLE BY THE VERTICAL AUGER

The functioning of machines deals with the interaction of the particles of the technological material with the working bodies of devices. Particles of the material are forced to choose a trajectory of sliding along the surface. Moreover, the surface of the working body can be movable, for example, it can make a rotational movement. In this case, the movement of the particle will consist of the relative movement of the particle (sliding of the particle along the surface) and the translational (rotational) movement of the surface itself. The relative motion of a particle is considered relatively to a moving coordinate system. The sum of these movements gives the absolute trajectory along which the particle moves in a fixed coordinate system. Successive differentiation of the length of the trajectory over time will give the absolute speed and acceleration of the particle. In mechanics, during solving problems of the dynamics of a material point, equations of equilibrium of the applied forces are compiled in projections on the axis of the spatial coordinate system. This coordinate system can be fixed or movable. In our case, such a system is a moving coordinate system – the accompanying Frenet trihedron of the guide curve. The movement of the trihedron along the guide curve is a translational movement, the movement of a point in the trihedron system is relative. The article considers the lifting of a particle by a transporting body in the form of a vertical auger, which is limited by a coaxial cylindrical casing. When the auger rotates, the particle moves to the periphery and begins to interact with the cylindrical casing. The particle simultaneously slides along both surfaces and rises up in absolute motion. Its relative movement is sliding along the helical line – the periphery of the auger. The differential equations of the motion of a particle in projections on a moving coordinate system, which rotates together with the auger, have been compiled. The equation is solved by numerical methods and graphs of kinematic characteristics, including relative and absolute trajectories, are constructed. The limiting value of the angle of rising of the helical line – the periphery of the screw, at which the rising of the particle stops at a given angular speed of rotation of the auger – has been determined.

Key Words: particle, vertical auger, angular velocity, cylindrical casing, sliding trajectory, friction coefficient.