УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.151-161
к. т. н., доцент **Несвідомін А.М.[1],**
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718
д. т. н., проф. **Пилипака С.Ф.[1],**
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615
к. т. н, доцент **БабкаВ.М. [1].**
babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285
к. пед. н, доцент **ЗахароваІ.О. [2],**
zaharova_soippo@ukr.net

[1]Національний університет біоресурсів і природокористування України
[2]Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

АНАЛОГ ФОРМУЛ ФРЕНЕ ДЛЯ ТРИГРАННИКА ДАРБУ КРИВОЇ НА ПОВЕРХНІ

Тригранники Френе і Дарбу є супровідними для напрямної кривої. Положення тригранника Френе на кривій однозначно визначається через її перші і другі похідні. Тригранник Дарбу є супровідним для кривої на поверхні. Обидва тригранники рухаються по кривій так, що один із ортів є дотичним до кривої. Якщо у тригранника Френе одна із граней є стичною площиною кривої, то у тригранника Дарбу відповідна грань є дотичною до поверхні, тобто між цими гранями тригранників існує певний кут, який може змінюватися при їх русі по кривій. Відповідно цей кут попарно існує між двома іншими ортами тригранників. Якщо поверхнею є площина, то цей кут дорівнює нулю і обидва тригранники збігаються.

Положення тригранника Френе визначається параметричними рівняннями кривої, а положення тригранника Дарбу – параметричними рівняннями поверхні і кривої на ній. Крива може бути задана у функції довільного параметра. На поверхні криву можна отримати, встановивши певну залежність між незалежними змінними поверхні. Якщо крива на поверхні задана не у функції довільного параметра, а у функції натурального параметра, тобто у функції довжини власної дуги, то в такому випадку справедливі формули Френе, які відіграють дуже важливу роль в диференціальній геометрії. В цьому випадку рух тригранника Дарбу теж залежатиме від натурального параметра. При русі тригранників відбувається їх поворот навколо ортів дотичних, які збігаються, і утворюється попарно кут між іншими ортами, величина якого залежить від довжини дуги кривої, тобто значення кута є функцією натурального параметра.

В роботі використано залежність кута у функції натурального параметра між тригранниками для одержання формул для тригранника

Дарбу, які є аналогом формул Френе для тригранника Френе. Для цього використана кінематика обох тригранників при їх русі по кривій. Цей рух можна розкласти на поступальний в напрямі дотичної до кривої і обертальний навколо осі миттєвого обертання. Поступальний рух вздовж спільних ортів дотичної є однаковим для обох тригранників, але відрізняється обертальним рухом навколо їх. На основі математичного опису цих рухів в статті отримано формули для тригранника Дарбу, які є аналогом формул Френе для однойменного тригранника.

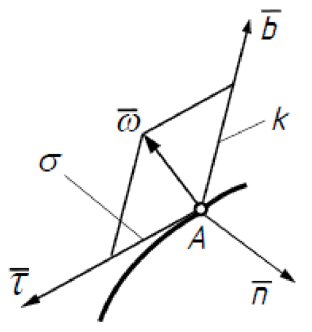
Ключові слова: тригранника Френе; тригранники Дарбу; формули Френе; крива на поверхні; функція довільного параметра; математичний опис.

Постановка проблеми. При дослідженні руху точки по кривій траєкторії доцільно застосовувати супровідний тригранник Френе цієї траєкторії. Незалежною змінною в такому випадку служить дугова координата. Прискорення, яке виникає при русі точки, складається із двох складових, одна із яких викликана зміною швидкості по абсолютній величині і спрямована по орту дотичної, а друга складова викликана зміною швидкості по напряму і спрямована по орту головної нормалі. Однак якщо рух точки відбувається по поверхні, то тоді з’являється реакція поверхні і складові діючих на точку сил, що виникають в результаті прискорення, потрібно проекціювати на орти тригранника Дарбу. Отже потрібно знати взаємозв’язок між цими тригранниками при їх одночасному русі по кривій на поверхні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Тригранник Френе може використовуватися для знаходження абсолютної траєкторії точки при її складному русі. Напрямна крива служить траєкторією переносного руху тригранника. Відносний рух відбувається у системі тригранника. Сума цих рухів дає абсолютну траєкторію [1]. За цим принципом можна знаходити положення і швидкості ланок плоских механізмів. Цьому напрямку застосування тригранника Френе присвячені роботи [2, 3]. При вивченні руху точки по кривій на поверхні в ролі рухомої системи координат може використовуватися тригранник Дарбу, як локальна система [4].

Формулювання цілей та завдання статті. На основі аналітичних залежностей між тригранниками Френе і Дарбу кривої на поверхні вивести формули для тригранника Дарбу, які є аналогами формул Френе для однойменного тригранника.

Основна частина. При переміщенні тригранника Френе $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ (рис. 1, *а*) по кривій його рух можна розкласти на складові: лінійне переміщення в напрямі орта дотичної $\bar{\tau}$ і поворот на певний кут навколо миттєвої осі обертання. Положення миттєвої осі обертання залежить від диференціальних властивостей кривої, а саме від її кривини k і скруту σ в поточній точці. Якщо крива плоска, то скрут $\sigma=0$, отже миттєва вісь обертання $\overline{\omega}$ буде збігатися із бінормаллю $\overline{b}$. При переміщенні тригранника Френе по кривій на ділянку дуги Δs спрямна площина, утворена перетином ортів $\overline{\tau}$ і $\overline{b}$, повернеться на кут $\Delta\alpha$ навколо бінормалі $\overline{b}$. Відношення $\Delta\alpha/\Delta s$ дасть середню швидкість повороту спрямної площини. При переході до границі ми отримаємо миттєву швидкість повороту, яка, як відомо, є кривиною k в поточній точці. Якщо крива просторова, то поворот відбувається ще і стичної площини $\overline{\tau}$, $\overline{n}$ навколо орта дотичної $\overline{\tau}$. За аналогією границя відношення кута повороту стичної площини до дуги Δs дає скрут σ кривої. Таким чином швидкість повороту тригранника буде складатися із геометричної суми швидкостей його повороту навколо орта $\overline{b}$ на величину кривини k і повороту навколо орта $\overline{\tau}$ на величину скруту σ (рис. 1,а). Звертаємо увагу на те, ми вживаємо термін «швидкість повороту» замість відомого терміну «кутова швидкість». Кутову швидкість ω можна отримати, як граничне відношення $\Delta\alpha/\Delta t$, де t – час. Отже, $\omega=d\alpha/dt$. З іншої сторони $d\alpha/dt=d\alpha/ds\cdot ds/dt=V\cdot d\alpha/ds=V\cdot k$, де V – швидкість руху тригранника Френе по кривій. З аналогічних міркувань отримаємо, що кутова швидкість обертання тригранника навколо орта дотичної рівна $V\cdot\sigma$. Будемо вважати, що тригранник рухається із швидкістю $V=1$ *м/с*. Тоді кутові швидкості обертання навколо ортів $\overline{b}$ і $\overline{\tau}$ чисельно дорівнюють кривині k і скруту σ відповідно. Таким чином, миттєва вісь обертання розташована у спрямній площині тригранника Френе. Її напрям (вектор $\overline{\omega}$) і величина кутової швидкості обертання визначаються через кривину k і скрут σ у поточній точці кривої (рис. 1, *а*).



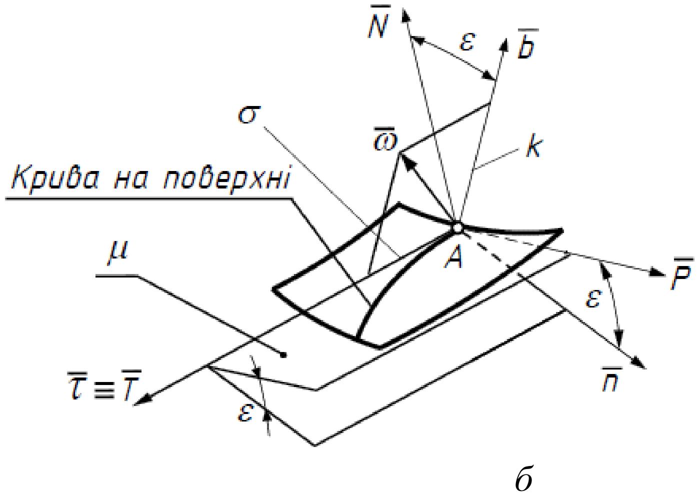


Рис. 1. Графічні ілюстрації до руху тригранників Френе і Дарбу по кривій:
а) тригранник Френе і положення миттєвої осі обертання в його системі;
б) тригранники Френе і Дарбу кривої на поверхні та їх взаємозв'язок через кут ε

Припустимо, що крива, в якій розташований тригранник Френе, знаходиться на поверхні. Побудуємо тригранник Дарбу із суміщеними вершинами в точці *A* (рис. 1, *б*). Орт $\overline{T}$ тригранника Дарбу буде спільним із ортом $\overline{\tau}$ тригранника Френе. Орт $\overline{N}$ спрямований по нормалі до поверхні, а орт $\overline{P}$ перпендикулярний до попередніх двох і розташований у дотичній до поверхні площині μ. Між стичною площиною тригранника Френе і дотичною площиною до поверхні тригранника Дарбу існує кут ε. Відповідно цей кут ε існує між ортами $\overline{n}$ і $\overline{P}$ та $\overline{b}$ і $\overline{N}$ (рис. 1, *б*). При русі тригранників кут ε може змінюватися, отже виникає додаткова кутова швидкість повороту тригранника Дарбу $d\varepsilon/ds$. Сумарна складова на орт $\overline{T}$ запишеться: $\omega_T=\sigma+d\varepsilon/ds$ (рис. 2,а). Складову *k* з орта $\overline{b}$ тригранника Френе розкладемо на орти $\overline{N}$ і $\overline{P}$ тригранника Дарбу. Після цього вони запишуться: $\omega_N=k\cos\varepsilon$, $\omega_P=k\sin\varepsilon$. Таким чином, ми отримаємо проекції вектора миттєвої осі обертання на орти тригранника Дарбу:

$$\overline{\omega}\left\{\sigma+\frac{d\varepsilon}{ds}, \qquad k\sin\varepsilon, \qquad k\cos\varepsilon\right\}. \tag{1}$$

Маючи проекції миттєвої осі обертання тригранника Дарбу (1), можна знайти швидкість руху будь-якої точки, заданої в системі тригранника, в проекціях на його орти:

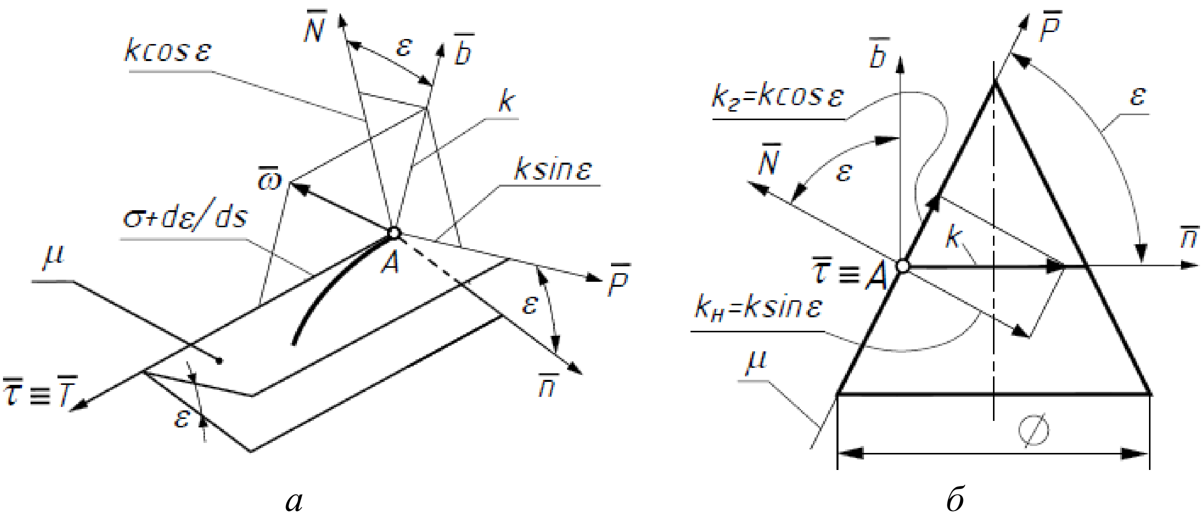


Рис. 2. Розкладання кінематичних та геометричних елементів на орти тригранника Дарбу:
а) розкладання миттєвої осі обертання;
б) розкладання кривини кривої на поверхні

Добутки $k\cos\varepsilon$ і $k\sin\varepsilon$ мають геометричне пояснення. Для цього розглянемо кривину кривої на поверхні. Для наочності за поверхню візьмемо конус, а за криву на ньому – коло, що проходить через точку *A* (рис. 2, *б*). У цьому спрощеному прикладі кривина k і кут ε є сталими, а для інших поверхонь або навіть для конуса з іншою кривою на його поверхні будуть змінними. В точці *А* на фронтальній проекції конуса побудовано тригранники Френе і Дарбу, при цьому їх спільний орт дотичної до кола проекціюється в точку. Якщо кривину k зобразити у вигляді вектора, який спрямований до центра кривини кривої, то його можна розкласти на орти тригранника Дарбу, як показано на рис. 2, *б*.

Складова кривини на орт $\overline{P}$ знаходиться у дотичній до конуса площині μ і носить назву геодезичної кривини: $k_г=k\cos\varepsilon$. Інша складова – на орт $\overline{N}$ – носить назву нормальної кривини $k_н=k\sin\varepsilon$, оскільки проекціюється на нормаль до поверхні. Розкладання кривини кривої на поверхні має велике значення при згинанні поверхонь, при якому змінюється тільки нормальна кривина, а геодезична залишається незмінною. Наприклад, для конуса геодезична кривина $k_г=k\cos\varepsilon$ кола на його поверхні, яка є сталою, буде такою ж і на його розгортці. Оскільки нормальна кривина $k_н=k\sin\varepsilon$, яка змінюється при згинанні, на розгортці перетвориться в нуль, тому що обидва тригранники збігатимуться і $\varepsilon=0$. Таким чином, кривина коло на конусі кривиною k перетвориться в коло на розгортці кривиною $k\cos\varepsilon$, тобто в коло меншої кривини або більшого радіуса.

Із врахуванням розкладання кривини кривої на поверхні на нормальну і геодезичну складові, вирази (1) перепишемо наступним чином:

$$\overline{\omega}\ \{\sigma+\varepsilon', \qquad k_н, \qquad k_г\}. \tag{2}$$

Знайдемо швидкість кінців кожного орта тригранника Дарбу в результаті його обертання навколо осі миттєвого обертання (2). Якщо кутова швидкість обертання представлена вектором, то вектор швидкості $\overline{V_M}$ точки *М* визначиться в системі координат *OXYZ* із векторного добутку, який можна записати у вигляді визначника:

$$\overline{V_M}=\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_M & y_M & z_M \end{vmatrix},. \tag{3}$$

де ω_x, ω_y, ω_z – проекції вектора $\overline{\omega}$; x_M, y_M, z_M – координати точки *М*.

Приймаючи за координатну систему орти тригранника Дарбу і маючи проекції вектора (2) в його системі, можна визначати швидкість будь-якої точки. Наприклад, знайдемо швидкість кінця орта $\overline{T}$, який у системі тригранника Дарбу має координати {1, 0, 0}. Запишемо визначник (3) в системі тригранника Дарбу і зробимо його перетворення:

$$\overline{V_T} = \begin{vmatrix} T & P & N \\ \sigma + \varepsilon' & k_н & k_г \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overline{P}k_г - \overline{N}k_н. \qquad (4)$$

Швидкість $\overline{V_T}$ кінця орта $\overline{T}$ є його похідна $d\overline{T}/ds$. Подібним чином знайдемо швидкість кінця орта $\overline{P}\,\{0,\ 1,\ 0\}$ і кінця орта $\overline{N}\,\{0,\ 0,\ 1\}$. Ми отримаємо похідні ортів тригранника Дарбу в проекціях на ці

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{T}}{ds} &= \overline{P}k_г - \overline{N}k_н; \\ \frac{d\overline{P}}{ds} &= \overline{N}\left(\sigma + \frac{d\varepsilon}{ds}\right) - \overline{T}k_г; \\ \frac{d\overline{N}}{ds} &= \overline{T}k_н - \overline{P}\left(\sigma + \frac{d\varepsilon}{ds}\right). \end{aligned} \qquad (5)$$

Формули (5) дають можливість визначити похідні ортів $\overline{T}$, $\overline{P}$, $\overline{N}$ тригранника Дарбу в проекціях на ці ж орти. У випадку, коли $\varepsilon=0$ по всій довжині кривої на поверхні, тригранники Френе і Дарбу збігатимуться. Нормальна кривина стане рівною нулю, а геодезична – рівною кривині кривої. Перейшовши до позначень ортів тригранника Френе (рис. 1, *а*), формули (5) при умові, що $\varepsilon=0$, набувають вигляду:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \overline{n}k; \qquad \frac{d\overline{n}}{ds} = -\overline{\tau}k + \overline{b}\sigma; \qquad \frac{d\overline{b}}{ds} = -\overline{n}\sigma. \qquad (6)$$

Формули (6) є відомими формулами Френе [5]. Таким чином можна вважати формули (5) для тригранника Дарбу аналогом формул (6) для тригранника Френе. Коли два тригранники збігаються, вони стають тотожними.

Потрібно мати на увазі, що формули (5) дають значення швидкості кінців ортів в проекціях на ці ж орти тільки від обертального руху тригранника Дарбу навколо миттєвої осі обертання без врахування його переміщення вздовж орта дотичної $\overline{T}$. При моделюванні переміщення тригранника в просторі потрібно враховувати як обертальний рух тригранника навколо миттєвої осі обертання, так і переміщення його в напрямі дотичної.

При цьому швидкість руху тригранника (тобто його вершини *А*) по кривій приймається рівною одиниці. Якщо тригранник рухається по кривій із іншою швидкістю *V*, то отриманий результат в правих частинах формул (5) або (6) потрібно множити на цю швидкість. Це випливає із того, що швидкість є похідною шляху по часу *t*. Для знаходження швидкості кінця орта $\overline{T}$ запишемо:

$$\overline{V_T} = \frac{d\overline{T}}{dt} = \frac{d\overline{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\overline{T}}{ds}V \, . \tag{7}$$

Це правило стосується швидкостей і інших ортів. Диференціюванням формул (5) або (6) по змінній *s* отримаємо прискорення кінців ортів для швидкості руху тригранника *V=1*. При іншій швидкості отриманий результат потрібно множити на V^2 в силу правила (7), оскільки прискорення є похідна швидкості по часу.

Розглянемо приклад на основі рис. 2, *б*. Кривина *k* кола і кут ε є сталими, отже і геодезична та нормальна кривини теж є сталими. Знайдемо прискорення w_T кінця орта $\overline{T}$ від обертального руху. Для цього потрібно продиференціювати перший вираз формул (5) по змінній *s*. Зробимо це для загального випадку, коли геодезична і нормальна кривина, а також кут ε є функціями дуги *s*:

$$\overline{w_T} = \overline{T}'' = \overline{P}' k_г + \overline{P}k_г' - \overline{N}' k_н - \overline{N}k_н' \, . \tag{8}$$

Після диференціювання ми отримали похідні ортів $\overline{P}$ і $\overline{N}$. Їх вирази беремо із формул (5), підставляємо їх в (8), продовжуємо операції множення з наступним групуванням складових за напрямками ортів:

$$\begin{aligned} \overline{w_T} = \overline{T}'' &= \left[\overline{N}(\sigma + \varepsilon') - \overline{T}k_г\right]k_г + \overline{P}k_г' - \left[\overline{T}k_н - \overline{P}(\sigma + \varepsilon')\right]k_н - \overline{N}k_н' = \\ &= \overline{N}(\sigma + \varepsilon')k_г - \overline{T}k_г^2 + \overline{P}k_г' - \overline{T}k_н^2 + \overline{P}(\sigma + \varepsilon')k_н - k_н - \overline{N}k_н' = \\ &= -\overline{T}\left(k_г^2 + k_н^2\right) + \overline{P}\left[(\sigma + \varepsilon')k_н + k_г'\right] + \overline{N}\left[(\sigma + \varepsilon')k_г - k_н'\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Як видно із (9), прискорення орта в загальному випадку проекціюється на всі три орти тригранника Дарбу. Знайдемо його для нашого випадку для сталого кута ε і сталих кривин $k_г$ і $k_н$. Оскільки напрямною кривою є коло, то скрут *σ=0*. Ми отримуємо, що прискорення проекціюється тільки на один орт $\overline{T}$, причому в протилежну сторону від його напряму:

$$\overline{w_T} = -\overline{T}\left(k_г^2 + k_н^2\right) = -\overline{T}\left(k^2\cos^2\varepsilon + k^2\cos^2\varepsilon\right) = -\overline{T}k^2 \, . \tag{10}$$

Якщо ми за таким же правилом знайдемо прискорення орта $\overline{\tau}$ тригранника Френе за формулами (6), то ми отримаємо точно такий же результат. Це і зрозуміло, тому що обидва тригранники рухаються по спільній кривій і орти $\overline{\tau}$ і $\overline{T}$ у них збігаються.

Отриманий результат можна обґрунтувати на основі кінематики точки – кінця орта $\bar{\tau}$ (візьмемо тригранник Френе, у якого зручніше положення в нерухомій системі координат – рис. 2, *б*).

Згідно першого виразу формул (6) швидкість V_τ кінця його орта $\bar{\tau}$ спрямована вздовж орта $\bar{n}$ і має значення k. На рис. 3 зображено окремо тригранник Френе і фрагмент кривої. Оскільки в даному випадку він обертається навколо бінормалі $\bar{b}$, то швидкість кінця орта $\bar{\tau}$ буде перпендикулярна до нього, тобто спрямована паралельно орту $\bar{n}$. Знайдемо величину швидкості V_τ.

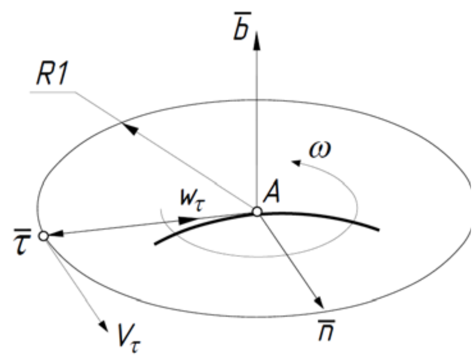


Рис. 3. Обертання тригранника Френе навколо бінормалі, яка є миттєвою віссю обертання

Орти $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ при поточному значенні дуги s здійснюють обертальний рух і їх кінці рухаються по колу одиничного радіуса $R=1$. Величина швидкості V_τ рівна добутку $V_\tau=R\cdot\omega$, де ω – кутова швидкість обертання. Відомо, що вона є похідною кута повороту α по часу t: $\omega=d\alpha/dt$.

Перейдемо до змінної s: $\omega=d\alpha/dt=d\alpha/ds\cdot ds/dt=k\cdot V$, оскільки $d\alpha/ds=k$, а $\cdot ds/dt=V$ – швидкість руху тригранника по кривій. Отже, $V_\tau=R\cdot\omega=1\cdot k\cdot V=k\cdot V$. При $V=1$ $V_\tau=k$. Таким же чином покажемо, як отримується значення прискорення $w_\tau=k^2$.

Відомо, що при сталій швидкості руху точки по колі виникає відцентрове прискорення, направлене до центру кола. На рис. 3 прискорення w_τ так і зображено, причому воно спрямоване в протилежну сторону орта $\bar{\tau}$. Його величина визначається із добутку $w_\tau=R\cdot\omega^2$.

Оскільки $R=1$ і $\omega=k\cdot V$, то $w_\tau=k^2\cdot V^2$. При $V=1$ маємо $w_\tau=k^2$. Отримані результати узгоджуються із результатами, отриманими раніше, в яких вказувалося, що при швидкості руху V тригранника по кривій, відмінній від одиниці, потрібно величину швидкості кінця орта множити на V, а прискорення – на V^2.

Висновки. На основі зв’язку між тригранниками Френе і Дарбу при їх русі по кривій на поверхні отримано формули, які є аналогом відомим формулам Френе. За допомогою їх можна отримувати похідні ортів тригранника Дарбу в проекціях на ці ж орти. Їх фізичний зміст полягає у визначенні величини швидкості кінців ортів в поточний момент положення на кривій від обертання тригранника навколо миттєвої осі обертання. Положення тригранника на кривій визначається довжиною її дуги, яка є незалежною змінною у формулах. Отримані результати підтверджено прикладом.

Література

1. Чепіжний А. В. Тригранник Френе / *Вісник Сумського національного аграрного університету*. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів». Вип. 10(25). Суми, 2013. С. 170 – 174.
2. Чепіжний А. В. Визначення положень і швидкостей ланок плоских механізмів з допомогою тригранника Френе / *Сучасні проблеми моделювання* : зб. наук праць. МДПУ ім. Б. Хмельницького. Мелітополь : МДПУ, 2016. Вип. 7. С. 166 – 171.
3. Чепіжний А.В., Бабка А.В., Чепіжний В.М. Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2012. Вип. 90. С. 20 – 26.
4. Несвідомін А.В. Моделювання руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні горизонтального циліндра в проекціях на орти локальних систем координат / *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків: ХДУХТ, 2011. Вип. 29. С. 23 – 29.
5. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия. Ленинград : КУБУЧ, 1934. 332 с.

Rferences

1. Chepizhnyj A. V. Trygrannyk Frene / Visnyk Sums'kogo nacional'nogo agrarnogo universytetu. Serija «Mehanizacija ta avtomatyzacija vyrobnychyh procesiv». Vyp. 10(25). Sumy, 2013. S. 170 – 174.
2. Chepizhnyj A. V. Vyznachennja polozhen' i shvydkostej lanok ploskyh mehanizmiv z dopomogoju trygrannyka Frene / Suchasni problemy modeljuvannja : zb. nauk prac'. MDPU im. B. Hmel'nyc'kogo. Melitopol' : MDPU, 2016. Vyp. 7. S. 166 – 171.
3. Chepizhnyj A.V., Babka A.V., Chepizhnyj V.M. Vyznachennja polozhen' lanok ploskogo mehanizmu za dopomogoju systemy trygrannyka Frene / Prykladna geometrija ta inzhenerna grafika. Kyi'v : KNUBA, 2012. Vyp. 90. S. 20 – 26.
4. Nesvidomin A.V. Modeljuvannja ruhu chastynky po shorstkij vnutrishnij poverhni goryzontal'nogo cylindra v proekcijah na orty lokal'nyh system koordynat / Geometrychne ta komp'juterne modeljuvannja. Harkiv: HDUHT, 2011. Vyp. 29. S. 23 – 29.
5. Mylynskyj V.Y. Dyfferencyal'naja geometryja. Lenyngrad : KUBUCh, 1934. 332 s.

UDC 514.18

PhD, assistant professor **Andrii Nesvidomin [1],**
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718
PhD, professor **Serhiy Pylypaka [1],**
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615
PhD, assistant professor **Vitaly Babka [1].**
babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285
к. ped. n., associate professor **Iryna Zaharova [2],**
zaharova_soippo@ukr.net

[1]National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine
[2]Sumy state pedagogical university named after A.S. Makarenko

AN ANALOGUE OF FRENET FORMULAS FOR THE DARBOUX TRIEDRON CURVE ON THE SURFACE

Frenet and Darboux trihedrons are accompanying for the guide curve. The position of the Frenet trihedron on the curve is uniquely determined by its first and second derivatives. The Darboux trihedron is the accompanying to the curve on the surface. Both trihedrons move along the curve so that one of the orthos is tangent to the curve. If in the Frenet trihedron one of the faces is the tangent plane of the curve, then in the Darboux trihedron the corresponding face is tangent to the surface, that is, there is a certain angle between these faces of the trihedrons, which can change when they move along the curve. Accordingly, this angle exists in pairs between two other vertices of trihedrons. If the surface is a plane, then this angle is zero and both trihedrons coincide.

The position of the Frenet trihedron is determined by the parametric equations of the curve, and the position of the Darboux trihedron is determined by the parametric equations of the surface and the curve on it. The curve can be specified in the function of an arbitrary parameter. On the surface, the curve can be obtained by establishing a certain relationship between the independent variables of the surface. If the curve on the surface is defined not as a function of an arbitrary parameter, but as a function of a natural parameter, that is, as a function of the length of its own arc, then in this case the Frenet formulas are valid, which play a very important role in differential geometry. In this case, the movement of the Darboux trihedron will also depend on the natural parameter. When the trihedrons move, they rotate around the orts of the tangents, which coincide, and an angle is formed in pairs between the other vertices, the value of which depends on the length of the arc of the curve, that is, the value of the angle is a function of the natural parameter.

The paper uses the dependence of the angle as a function of the natural parameter between the trihedrons to obtain the formulas for the Darboux trihedron, which are analogous to the Frenet formulas for the Frenet trihedron.

For this, the kinematics of both trihedrons as they move along a curve are used. This movement can be decomposed into translational in the direction of the tangent to the curve and rotational around the axis of instantaneous rotation. The translational motion along the common orts of the tangent is the same for both trihedrons, but the rotational motion around them differs. Based on the mathematical description of these movements, formulas for the Darboux trihedron are obtained in the article, which are analogous to Frenet's formulas for the Frenet trihedron.

Keywords: French triangular; Darbian triangles; French formulas; curve on the surface; the function of the arbitrary parameter; Mathematical description.