

д. т. н., професор **Вірченко Г. А.**¹,
kpivir@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9586-4538

к. т. н. **Терещук М. О.**²,
nikolatereschuk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4444-3677

¹Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
²Київський національний університет будівництва і архітектури

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРОЄКТУВАННЯ КУПОЛІВ ПРАВОСЛАВНИХ ХРАМІВ

Нині Україна переживає важкі часи свого історичного розвитку, які обумовлені воєнними діями на її території. Це пов'язано з великими втратами людей, їх здоров'я, багатьма матеріальними збитками. У зазначених обставинах руйнуються й пошкоджуються чисельні житлові, промислові та соціальні будівлі, інші споруди, інфраструктура. Окреслене повною мірою стосується і православних християнських храмів. Незважаючи на такі наявні проблеми, український народ упевнено вірить у настання кращих мирних днів. Тоді буде відновлене все зруйноване, споруджене нове, ще краще. Тому успішне та ефективне вирішення наведених завдань становить важливу перспективну задачу для нашого суспільства.

Акцентовані вище моменти визначають необхідність здійснення належних прикладних наукових досліджень у різноманітних сферах життєдіяльності, зокрема, архітектурі та будівництві. У даних галузях суттєвим аспектом у процесі опрацювання всіляких об'єктів є їхнє якісне формоутворення. Під ним, щодо православних храмів, мається на увазі не тільки дотримання існуючих релігійних канонів, а й забезпечення відповідних високих техніко-економічних (конструкційних, технологічних, експлуатаційних) та інших показників.

Куполи у християнській архітектурі відіграють велике сакральне значення. Ними, з хрестами наверху, увінчуються святі будівлі. Кожен храм повинен мати яскраву індивідуальність. Багато в чому це реалізується завдяки розмаїттю форм і розмірів куполів. Тому їхньому варіантному геометричному моделюванню, що нині, як правило, здійснюється комп'ютерними засобами, у процесі автоматизованого проєктування приділяється значна увага. Мета даної публікації полягає у висвітленні запропонованого математичного апарату для визначення розгортки поверхонь гранчастих куполів та їхніх площ. Це, наприклад, сприяє підвищенню точності розрахунків на міцність, відпрацюванню конструкції на технологічність, обчисленню економічних показників і т. д.

У статті також розглянуто деякі напрямки подальшого розвитку проаналізованої тематики наукових досліджень. Зауважено, що приємний естетичний вигляд православних храмів, у тому числі їхніх куполів, сприяє духовному піднесенню парафіян, налаштовує людей на проведення богослужінь.

Ключові слова: архітектурне формоутворення; геометричне моделювання; куполи; православні храми; розгортки поверхонь.

Постановка проблеми. Для України в теперішній важкий воєнний час визначним перспективним завданням є належне відновлення нашої країни. Це становить актуальну проблему державного рівня, стосується багатьох знищених і пошкоджених житлових, промислових та соціальних будівель, зокрема, і зруйнованих православних храмів. Куполи цих об'єктів відтворюють небесні образи, тому особливо важливі в сакральному плані. Дані архітектурні конструкції повинні відповідати не тільки існуючим християнським канонам, а й мати естетичну привабливість та високі техніко-економічні показники. У процесі проєктування куполів базовим постає їхнє раціональне формоутворення, що нині зазвичай здійснюється комп'ютерно-математичними методами. Проаналізовані обставини обумовлюють доцільність поліпшення вказаних засобів, проведення необхідних прикладних наукових досліджень. Останнє сприяє підвищенню якості православних храмів, зменшенню витрат на їхнє проєктування, будівництво та експлуатацію.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Видання [1] присвячено дотриманню існуючих канонів зведення православних храмів із поєднанням історичних і сучасних прийомів архітектурного формоутворення. Нормативний документ [2] регламентує виконання реставрації та ремонтів пам'яток культурної спадщини України. У праці [3] наведено комплексний підхід щодо архітектурного проєктування і здійснення відновлювальних робіт для православних храмів. У дисертації [4] викладено поширений нині для комп'ютерного геометричного моделювання різноманітних поверхонь математичний апарат у вигляді NURBS (Non-uniform rational B-splines). Стаття [5] подає застосування варіантного формоутворення технічних об'єктів на прикладі корпусів суден. Описані в літературних джерелах [4], [5], [6], прийоми певним чином схожі до використовуваного в дослідженнях [7, 8] підходу до автоматизованого проєктування куполів православних храмів. Але останній, в аспекті геометрії, має більш загальний характер завдяки вдалому поєднанню параметричних і структурних засобів. У публікації [9] розглянуто інтегроване архітектурне формоутворення православних храмів на засадах методології комп'ютерного структурно-параметричного геометричного моделювання з урахуванням наявних історично-релігійних традицій та сучасних ідей новаторства.

Цілі та завдання статті полягають у поданні запропонованої методики побудови розгорток поверхонь гранчастих куполів православних храмів, обчислення їхніх метричних характеристик, зокрема, довжин і площ. Ці відомості становлять належне доповнення до математичного апарату структурно-параметричного геометричного моделювання куполів, викладеного в попередніх публікаціях авторів.

Основна частина. Проілюструємо напрацьовані матеріали на прикладі наведеного в роботах [6, 7], див. рис. 1, двоярусного банного завершення православного храму.

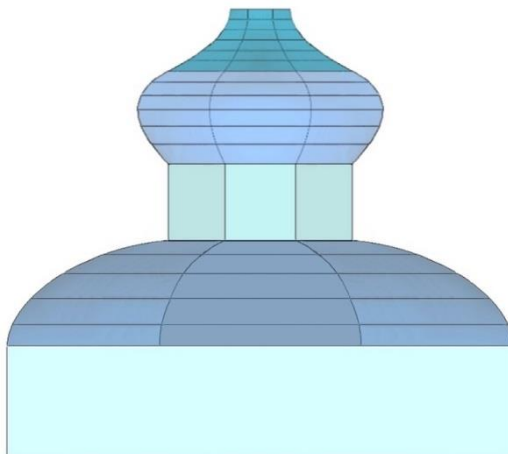


Рис 1. Двоярусне банне завершення

У даному разі маємо один із проєктних варіантів структурно-параметричного архітектурного формоутворення, яке характеризується наступним чином. Досліджуваний об'єкт на першому ярусі складається з нижнього циліндричного барабана B_1 та гладкого яйцеподібного купола JK над ним, а на другому – з гранчастого барабана B_2 та відповідного цибульчастого купола $ЦК$ зверху.

Подальші побудови виконуються за допомогою різновиду NURBS у вигляді кривої другого степеня у векторній параметричній формі

$$\mathbf{r}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + 2w_1(1-u)u\mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2}{(1-u)^2 + 2w_1(1-u)u + u^2}, \quad (1)$$

де $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r}_1=(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2=(x_2, y_2, z_2)$ – радіус-вектори вершин характеристичної ламаної у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ із початком у центрі основи барабана B_1 та направленою вправо віссю x і вертикально віссю z ;

$w_1 \geq 0$ – ваговий коефіцієнт вершини \mathbf{r}_1 ;

$u \in [0, 1]$ – параметр.

Барабан B_1 має радіус основи $R=3000$ мм та висоту $H=2000$ мм. Купол JK є поверхнею обертання з віссю z і твірною, яка визначається вершинами $\mathbf{r}_0=(3000, 0, 2000)$, $\mathbf{r}_1=(3000, 0, 4000)$, $\mathbf{r}_2=(1200, 0, 4000)$, де координати в мм, та ваговим коефіцієнтом $w_1=0,7071$. Гранчастий барабан

B_2 має радіус $R=1200$ мм описаного навколо його основи кола та висоту $H=1400$ мм. Твірна нижньої частини $ЦК_1$ цибульчастого купола визначається вершинами $\mathbf{r}_0=(1200, 0, 5400)$, $\mathbf{r}_1=(2300, 0, 6200)$, $\mathbf{r}_2=(1000, 0, 7200)$ та ваговим коефіцієнтом $w_1=1$, а верхня частина $ЦК_2$ – вершинами $\mathbf{r}_0=(1000, 0, 7200)$, $\mathbf{r}_1=(400, 0, 7661)$, $\mathbf{r}_2=(400, 0, 8500)$ та ваговим коефіцієнтом $w_1=1$.

Нехай треба замінити нижній гладкий яйцеподібний купол на гранчастий. Число n таких однакових граней може бути різним, наприклад, $n=4$, $n=6$, $n=8$, $n=12$, $n=16$ тощо. Обираємо $n=8$. Це відповідає кількості граней барабана B_2 . Зазначимо, що пропонована далі методика формоутворення інваріантна по відношенню до числа граней n .

Побудову поверхні грані ілюструє рис. 2 на прикладі такої фігури, показаної праворуч на рис. 1.

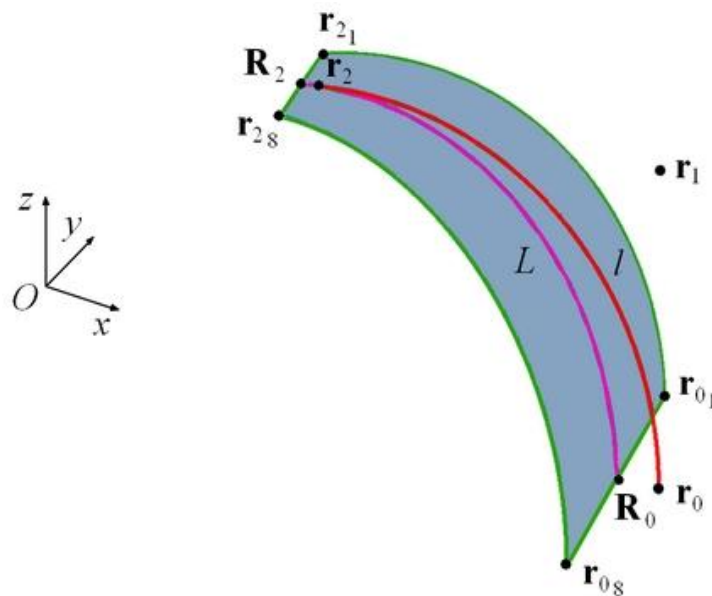


Рис 2. Схема побудови грані

Другий індекс вершин на рис. 2 відповідає номеру ребра гранної поверхні купола. Зауважимо, що для підвищення наочності на цьому рисунку проміжні вершини \mathbf{r}_{11} і \mathbf{r}_{18} не зображені. Уявлення про розташування першого та восьмого ребра надають їхні кінцеві точки \mathbf{r}_{01} і \mathbf{r}_{21} та \mathbf{r}_{08} і \mathbf{r}_{28} . Двогранний кут між площинами вказаних ребер дорівнює

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

Вихідна крива, яка визначається вершинами \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , лежить у площині $y=0$. Перше та восьме ребро симетричні відносно неї. Величини двогранних кутів між указаною площиною і площинами опрацьовуваних ребер на підставі значень (2) становлять

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8}. \quad (3)$$

Вершини, з використанням величин (3), обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{k1} &= (x_{k1}, y_{k1}, z_{k1}) = (x_k \cos \alpha_2, x_k \sin \alpha_2, z_k), \\ \mathbf{r}_{k8} &= (x_{k8}, y_{k8}, z_{k8}) = (x_k \cos \alpha_2, -x_k \sin \alpha_2, z_k),\end{aligned}\quad (4)$$

де $k \in (0, 1, 2)$.

Циліндрична поверхня першої грані з прямолінійними твірними, які паралельні горизонтальній площині Oxy і поєднують належні точки восьмого та першого ребер, має математичний опис

$$\mathbf{r}_1(u, v) = (1-v)\mathbf{r}_8(u) + v\mathbf{r}_1(u), \quad (5)$$

де $\mathbf{r}_8(u)$, $\mathbf{r}_1(u)$ – векторні параметричні рівняння восьмого й першого ребра; $v \in [0, 1]$ – параметр,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_8(u) &= \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_{08} + 2w(1-u)u\mathbf{r}_{18} + u^2 \mathbf{r}_{28}}{(1-u)^2 + 2w(1-u)u + u^2}, \\ \mathbf{r}_1(u) &= \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_{01} + 2w(1-u)u\mathbf{r}_{11} + u^2 \mathbf{r}_{21}}{(1-u)^2 + 2w(1-u)u + u^2},\end{aligned}\quad (6)$$

де $w=w_1=0,7071$; дефініція наведених вершин згідно з векторами (4).

У виразах (6) застосовано сталий ваговий коефіцієнт w , оскільки він однаковий для всіх криволінійних ребер, розташованих у вертикальних площинах.

Довжини нижнього та верхнього горизонтального ребра, які обмежують опрацьовувану грань, див. рис. 2, дорівнюють

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_{08}\mathbf{r}_{01}| &= 2x_0 \sin \alpha_2 = 2 \cdot 3000 \sin \frac{\pi}{8} = 2296 \text{ мм}, \\ |\mathbf{r}_{28}\mathbf{r}_{21}| &= 2x_2 \sin \alpha_2 = 2 \cdot 1200 \sin \frac{\pi}{8} = 918 \text{ мм}.\end{aligned}\quad (7)$$

Відстані (7) можна обчислити також за відповідними координатами.

Довжини всіх ребер у вертикальних площинах визначаються залежністю

$$l = \int_0^1 \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2} du, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}x'(u) &= 2 \left(\frac{(w-1)(2u-1)((u-1)^2 x_0 - 2wu(u-1)x_1 + u^2 x_2)}{p_1^2} + \frac{(u-1)x_0 + w(2u-1)x_1 + ux_2}{p_1} \right), \\ z'(u) &= 2 \left(\frac{(w-1)(2u-1)((u-1)^2 z_0 - 2wu(u-1)z_1 + u^2 z_2)}{p_1^2} + \frac{(u-1)z_0 + w(2u-1)z_1 + uz_2}{p_1} \right), \\ p_1 &= (u-1)^2 - 2wu(u-1) + u^2.\end{aligned}\quad (9)$$

На підставі належних величин за формулами (8) і (9) розраховуємо

$$l = \int_0^1 \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2} du \approx 2986 \text{ мм.} \quad (10)$$

Аналогічно співвідношенню (10) знаходимо довжину L лінії перетину досліджуваної грані з площиною $y=0$. Ця векторна параметрична крива другого степеня має вигляд

$$\mathbf{R}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{R}_0 + 2w(1-u)u \mathbf{R}_1 + u^2 \mathbf{R}_2}{(1-u)^2 + 2w(1-u)u + u^2}, \quad (11)$$

де $w=w_1=0,7071$;

$$\mathbf{R}_k = (X_k, Y_k, Z_k) = (x_k \cos \alpha_2, 0, z_k), \quad (12)$$

де $k \in (0, 1, 2)$.

З використанням виразів (11) і (12) одержуємо

$$L = \int_0^1 \sqrt{X'(u)^2 + Z'(u)^2} du \approx 2883 \text{ мм.} \quad (13)$$

Будемо застосовувати довжину (13) у якості абсцис для побудови розгортки поверхні циліндричної грані (5), див. рис 3. При цьому за ординати взято необхідні значення u із даної залежності.

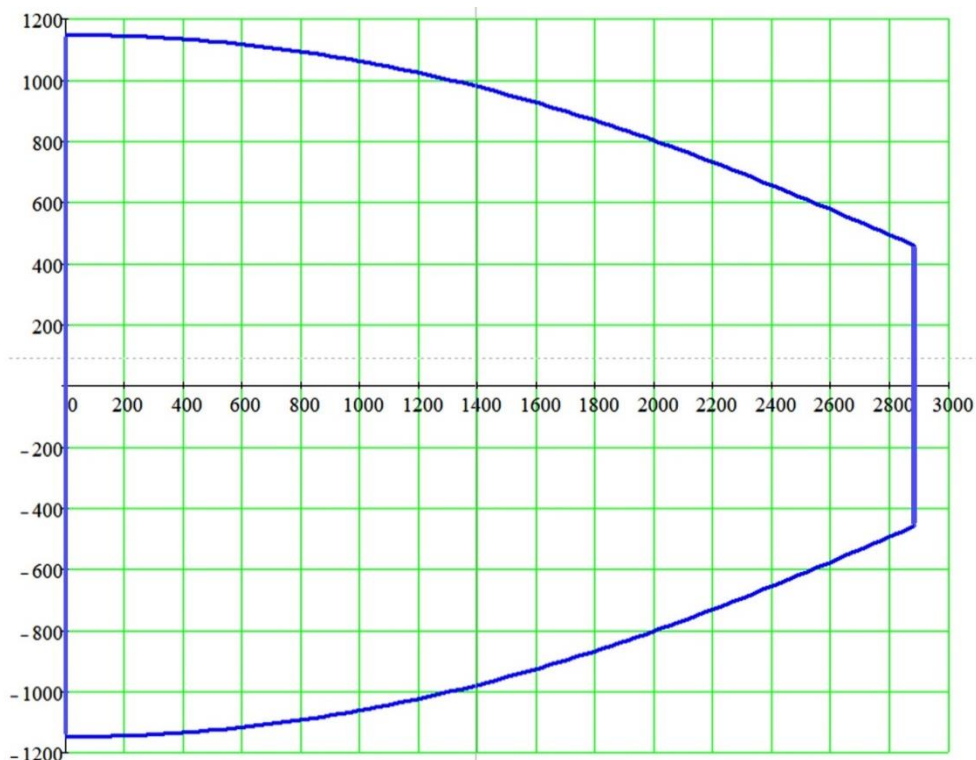


Рис 3. Розгортка поверхні грані

На завершення визначимо площу S отриманої розгортки за формулою

$$S = 2 \int_0^1 y(u) \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2} du \approx 5254000 \text{ мм}^2. \quad (14)$$

Зауважимо, що зображена на рис. 3 фігура та її геометричні параметри й характеристики, зокрема (7), (10), (13) та (14), є в аспекті проектування, виробництва й експлуатації суто теоретичними величинами. Наведена інформація слугує основою для виконання відповідних наступних розрахунків. Опрацювання інших схожих граней показано на рис. 1 двоярусного завершення реалізується подібним до розглянутого випадку чином.

Отже, поданий вище матеріал засвідчує досягнення поставленої в публікації мети та сформульованих завдань. Це стосується висвітлення запропонованої методики побудови для гранчастих куполів православних храмів розгортки поверхонь, контури яких обмежені векторними параметричними лініями другого й першого степеня. У роботі було також докладно викладено обчислення деяких метричних характеристик, наприклад, необхідних довжин та площ.

Висновки й перспективи досліджень. Подальшими напрямками проведення наукових досліджень з обраної тематики можуть слугувати розвідки із застосування NURBS вищих, ніж другий, степенів. Також актуальні питання щодо виконання більш точних комп'ютерних розрахунків та здійснення моделювання, з використанням отриманих геометричних даних, міцності будівель православних храмів, процесів їхнього зведення, експлуатації і т. д. При цьому ефективним є підхід автоматизованого варіантного формоутворення. Останнє дозволяє шляхом належного продуктивного багатоаспектного аналізу опрацьовуваних об'єктів досягти більш раціональних результатів їхнього проектування. Зазначена концепція цілком узгоджується з методологією структурно-параметричного геометричного моделювання православних храмів з урахуванням наявних історичних традицій та сучасних ідей новаторства. Зазначені аспекти розлого викладені в попередніх публікаціях авторів цієї статті.

Література

1. Куцевич В. Канонічна структура побудови православних храмів. *Українська академія мистецтва*, 2021. Вип. 30. С. 5–13.
2. ДБН В.3.2-1-2004. Реставраційні, консерваційні та ремонтні роботи на пам'ятках культурної спадщини. Київ: Держбуд України, 2005. 124 с.
3. Слепцов О. С. Архітектурне проектування і реконструкція православних храмів. Київ: А+С, 2014. 272 с.
4. Garcia D. R. Geometric manipulation of NURBS surfaces for computational meshes: doctoral thesis. Madrid, 2018. 165 p.
5. Feng B., Zhan C., Liu Z., Cheng X., Chang H. Application of basis functions

- for hull form surface modification. *Journal of Marine Science and Engineering*. Vol. 9. Issue 9, 1005. DOI: 10.3390/jmse9091005
6. Терещук М. О. Структурно-параметричний спосіб формоутворення куполів православних храмів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, 2022. Вип. 103. С. 201–208. DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.201-208
7. Терещук М. О. Структурно-параметричні геометричні моделі поверхонь куполів православних храмів. *Прикладні питання математичного моделювання*, 2022. Вип. 5.1. С. 95–100.
8. Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Золотова А.В. Формування дискретних каркасів купольних споруд / *Восточно Европейский научный журнал*. Варшава, Польща. Том. 1. № 12(64), 2020. Опубліковано: 2021-03-22. С. 13-17. <https://archive.eesa-journal.com/index.php/eesa/issue/view/9/38>
9. Вірченко Г. А., Мартинов В. Л., Терещук М. О. До питання архітектурного формоутворення православних храмів Чернігівщини. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, 2023. Вип. 105. С. 53–61. DOI: 10.32347/0131-579x.2023.105.53-61

References

1. *Kutsevych V.* Kanonichna struktura pobudovy pravoslavnykh khramiv. *Ukrainska akademiia mystetstva*, 2021. Vyp. 30. S. 5–13. {in Ukrainian}
2. DBN V.3.2-1-2004. Restavratsiini, konservatsiini ta remontni roboty na pamiatkakh kulturnoi spadshchyny. Kyiv: Derzhbud Ukrainy, 2005. 124 s. {in Ukrainian}
3. *Sliptsov O. S.* Arkhitekturne proektuvannia i rekonstruktsiia pravoslavnykh khramiv. Kyiv: A+S, 2014. 272 s. {in Ukrainian}
4. *Garcia D. R.* Geometric manipulation of NURBS surfaces for computational meshes: doctoral thesis. Madrid, 2018. 165 p. {in English}
5. *Feng, B., Zhan, C., Liu, Z., Cheng, X., Chang, H.* Application of basis functions for hull form surface modification. *Journal of Marine Science and Engineering*, Vol. 9, Issue 9, 1005. DOI: 10.3390/jmse9091005 {in English}
6. *Botvinovska S., Kovalov S., Zolotova A.* Formations of discrete frameworks of dome constructions / *East European Scientific Journal*. Warsaw, Poland. Vol. 1. No 12(64), 2020. Published: 2021-03-22. С. 13-18. <https://archive.eesa-journal.com/index.php/eesa/issue/view/9/38> {in Ukrainian}
7. *Tereshchuk M. O.* Strukturno-parametrychnyi sposib formoutvorennia kupoliv pravoslavnykh khramiv. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 2022. Vyp. 103. S. 201–208. DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.201-208 {in Ukrainian}
8. *Tereshchuk M. O.* Strukturno-parametrychni heometrychni modeli poverkhon kupoliv pravoslavnykh khramiv. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*, 2022. Vyp. 5.1. S. 95–100. {in Ukrainian}
9. *Virchenko G. A., Martynov V. L., Tereshchuk M. O.* Do pytannia arkhitekturnoho formoutvorennia pravoslavnykh khramiv Chernihivshchyny.

Doctor of Technical Sciences, Professor **Gennadii Virchenko**¹,
kpivir@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9586-4538

Doctor of Philosophy **Mykola Tereschuk**²,
nikolatereschuk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4444-3677

¹National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

²Kyiv National University of Construction and Architecture

SOME ASPECTS OF THE APPLICATION OF GEOMETRIC MODELS FOR DESIGNING OF DOMES OF ORTHODOX TEMPLES

Ukraine is currently going through difficult times in its historical development, which are caused by military actions on its territory. This is associated with large losses of people, their health, and many material damages. Residential, industrial and social buildings, other structures and infrastructure are significantly destroyed in the specified circumstances. This fully applies to Orthodox Christian temples. People of Ukraine confidently believe in the coming of better peaceful days, despite such existing problems. Then everything that was destroyed will be restored, a new, even better one will be built. Therefore, the successful and effective solution of these problems is an important perspective task for our society.

The points emphasized above determine the need to carry out proper applied scientific research in various fields of life, in particular, architecture and construction. An essential aspect in these areas during the processing of many objects is high-quality shaping. With respect to Orthodox temples, it means not only the observance of existing religious canons, but also the provision of appropriate high technical and economic (structural, technological, operational) and other indicators.

Domes in Christian architecture have great sacred significance. Holy buildings are crowned with them, with crosses on top. Each temple should have a bright individuality. This is largely achieved thanks to the variety of shapes and sizes of domes. Therefore, considerable attention is paid to their variant geometric modeling, which is currently usually carried out by computer means, in the process of automated design. The purpose of this publication is to highlight the proposed mathematical apparatus for determining the development of the surfaces of faceted domes and their areas. This, for example, contributes to increase the accuracy of strength calculations, test the design for manufacturability, calculate economic indicators, etc.

The article also discusses some directions for further development of the analyzed scientific research topics. In conclusion, it is worth noting that the pleasant aesthetic appearance of Orthodox temples, including their domes,

contributes to the spiritual elevation of parishioners, sets people up properly for holding services.

Key words: architectural shaping; geometric modeling; domes; Orthodox temples; unfolded surfaces.