

асистент **Мостовенко Олексій В.**,  
mostovenko.ov2@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1844-1843

д. т. н., професор **Ковальов С. М.**,  
kovalov.sm@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7713-1768

д. т. н., професор **Мостовенко Олександр В.**,  
mostovenko.ov@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-3423-4126

к. т. н., доцент **Ус В.Ф.**,  
us.vf@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7511-4449

Київський національний університет будівництва і архітектури

## **УМОВИ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СУПЕРПОЗИЦІЙ ДЛЯ КЕРУВАННЯ ФОРМОЮ ВРІВНОВАЖЕНОЇ ДИСКРЕТНОЇ СТРУКТУРИ**

*Під суперпозицією функцій розуміють утворення складної функції як результат алгебраїчних дій над двома або декількома простими функціями [1]. Якщо прості функції задано дискретно, виникає поняття суперпозиції точок. У подальшому під суперпозицією точок будемо розуміти визначення координат результуючої точки при складанні відповідних координат заданих точок з певними ваговими коефіцієнтами.*

*Суперпозиція врівноважених дискретних структур передбачає виконання певних умов і правил:*

*Умова 1. При функціональному додаванні дискретно представлених поверхонь вони мають бути топологічно однаковими (ізотопними) [2]. При цьому повинна бути встановлена відповідність між елементами результуючої структури і кожної з структур, що додаються. У суперпозиції дискретних врівноважених структур присутні не тільки координати вершин структури, а й вектори зусиль, які виникають у ребрах структури та зусиль зовнішнього навантаження на вершини.*

*Умова 2. У врівноважених системах відношення довжини ребра до довжини вектору зусилля у цьому ребрі, у відповідних ребрах складових суперпозиції, повинні бути однаковими. Тільки у такому випадку зусилля натягіння або стиску кожного ребра в результаті функціонального додавання стане зусиллям у заданому ребрі.*

*Умова 3. Для того, щоб координати заданого вузла після функціонального додавання залишились незмінними, сума вагових коефіцієнтів функціонального додавання при кожній координаті повинна дорівнювати одиниці.*

*Умова 4. Число сіток, що додаються, повинно бути на одиницю більшим, ніж число параметрів управління формою.*

*Умова 5. Якщо врівноважена структура формується під дією власної ваги, то параметрами управління формою можуть бути лише аплікати окремих вузлів або вершин, оскільки при зміні інших координат цих вузлів (абсцис та ординат) зовнішнє навантаження не буде вертикальним.*

*Ключові слова: дискретна структура; суперпозиція точок; функціональне додавання; врівноважена структура; керування формою.*

**Постановка проблеми.** При використанні апарата суперпозиції для функціонального додавання дискретно представлених врівноважених структур у проаналізованій літературі відсутні чіткі умови, що дозволяють керувати формою врівноваженої сітки без порушення рівноваги вузлів.

**Ціль статті.** Сформулювати відповідні умови та наочно показати, що застосування апарата суперпозицій дозволяє оперативно варіювати форму врівноваженої сітки без порушення її рівноваги та складання і розв'язання системи рівнянь рівноваги вузлів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В роботі [3] для управління формою розтягнутих врівноважених сіток, що моделюють поверхні тентових покриттів, використано метод, так званих, суперпозицій або складання функцій. Суть його полягає в додаванні кількох функцій, записаних у явному вигляді і помножених на певні вагові коефіцієнти. У роботі [3] розглянуто окремі властивості методу суперпозицій

Цей метод, відомий з літератури [4, 5], раніше було використано для утворення поверхонь, що проходять через заданий контур. Зокрема в роботі [4] його використано для конструювання поверхонь технічних форм, що включають ряд заданих перерізів.

**Основна частина.** Під суперпозицією функцій розуміють утворення складної функції як результат алгебраїчних дій над двома або декількома простими функціями [1]. Якщо прості функції задано дискретно, виникає поняття суперпозиції точок. У подальшому під суперпозицією точок будемо розуміти визначення координат результуючої точки при складанні відповідних координат заданих точок з певними ваговими коефіцієнтами:

$$U_A = k_1 U'_A + k_2 U''_A + \dots + k_n U^n_A, \quad (1)$$

де  $U_A$  – відповідна координата точки  $A$ ;  
 $k_i$  – вагові коефіцієнти суперпозиції.

Число коефіцієнтів  $k_i$  дорівнює числу точок, що додаються, помноженому на число координат. Така суперпозиція врівноважених дискретних структур передбачає виконання певних умов і правил:

**Умова 1.** При функціональному додаванні дискретно представлених поверхонь вони мають бути топологічно однаковими (ізотопними) [2]. При цьому повинна бути встановлена відповідність між елементами

результуючої структури і кожної з структур, що додаються. У суперпозиції дискретних врівноважених структур присутні не тільки координати вершин структури, а й вектори зусиль, які виникають у ребрах структури та зусиль зовнішнього навантаження на вершини.

Зазначимо, що ізотопними дискретними образами або комплексами є такі комплекси, які містять ізотопно відповідні клітини.

*Умова 2.* У врівноважених системах відношення довжини ребра до довжини вектору зусилля у цьому ребрі, у відповідних ребрах складових суперпозиції, повинні бути однаковими. Тільки у такому випадку зусилля натягнення або стиску кожного ребра в результаті функціонального додавання стане зусиллям у заданому ребрі. У цьому випадку початок і кінець вектору зусилля у ребрі  $AB$  (рис.1) повинні належати цьому ребру як у складових суперпозиції, так і у результаті суперпозиції.

Розглянемо це на прикладі функціонального додавання двох доданків ребра  $AB$ , у площині  $xOy$ , вздовж якого діє зусилля  $F$ . Тоді, у результаті суперпозиції вершина  $C$  зусилля повинна належати  $AB$ :

$$\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} = \frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A}. \quad (2)$$

Нехай коефіцієнт відношення довжини вектору зусилля до довжини ребра у першому доданку має значення  $t_1$ , а у другому –  $t_2$ . Тоді:

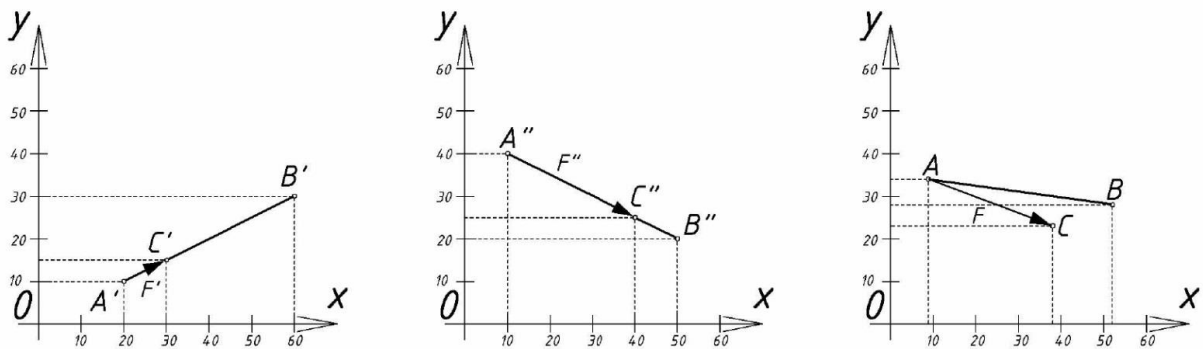


Рис.1

$$\begin{aligned} X'_C - X'_A &= t_1(X'_B - X'_A); \\ Y'_C - Y'_A &= t_1(Y'_B - Y'_A); \\ X''_C - X''_A &= t_2(X''_B - X''_A); \\ Y''_C - Y''_A &= t_2(Y''_B - Y''_A). \end{aligned} \quad (3)$$

У результаті суперпозиції отримаємо:

$$\begin{aligned} X_B - X_A &= k_1(X'_B - X'_A) + k_2(X''_B - X''_A); \\ Y_B - Y_A &= k_1(Y'_B - Y'_A) + k_2(Y''_B - Y''_A). \end{aligned} \quad (4)$$

При підстановці (3) і (4) до (2) отримаємо:

$$\frac{k_1(X'_B - X'_A) + k_2(X''_B - X''_A)}{k_1(Y'_B - Y'_A) + k_2(Y''_B - Y''_A)} = \frac{k_1 t_1 (X'_B - X'_A) + k_2 t_2 (X''_B - X''_A)}{k_1 t_1 (Y'_B - Y'_A) + k_2 t_2 (Y''_B - Y''_A)} \quad (5)$$

Вираз (5) може бути тотожністю тільки у випадку  $t_1 = t_2$ .

*Умова 3.* Для того, щоб координати заданого вузла після функціонального додавання залишились незмінними, сума вагових коефіцієнтів функціонального додавання при кожній координаті повинна дорівнювати одиниці. Нехай вузол  $A$  у структурах, що додаються, має однакові координати:

$$U'_A = U''_A = U'''_A = \dots = U^n_A. \quad (6)$$

Потрібно, щоб у результаті суперпозиції структур координата цього вузла залишилась такою самою:

$$U_A = k_1 U'_A = k_2 U''_A = k_3 U'''_A = \dots = k_n U^n_A. \quad (7)$$

Якщо

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = 1, \quad (8)$$

маємо:

$$U_A(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n) = U_A. \quad (9)$$

Ця умова дозволяє змінювати форму структури, залишаючи незмінними координати деяких вершин. Наприклад, можна варіювати форму врівноваженої сітки на заданому опорному контурі.

*Умова 4.* Число сіток, що додаються, повинно бути на одиницю більшим, ніж число параметрів управління формою, оскільки система рівнянь системи для визначення вагових коефіцієнтів дорівнює числу вузлів, аплікати яких задано, плюс одне рівняння (8).

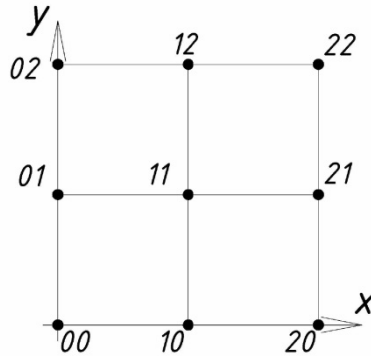
*Умова 5.* Якщо врівноважена структура формується під дією власної ваги, то параметрами управління формою можуть бути лише аплікати окремих вузлів або вершин, оскільки при зміні інших координат цих вузлів (абсцис та ординат) зовнішнє навантаження не буде вертикальним.

*Приклад.* Покажемо на прикладі управління формою симетричної сітки на розтягнутому контурі, яка формується під дією власної ваги (рис 2а). Координати вузлів цієї сітки наведені в табл. 1. Згідно з сформульованими умовами, заданими повинні бути дві сітки з однаковою топологією та однаковими співвідношеннями коефіцієнтів натягіння або стиску відповідно у внутрішніх та контурних ребрах. За другу сітку-доданок приймемо плоску сітку (рис. 2б). У такої сітки аплікати всіх вершин будуть однаковими.

Табл. 1

$j=2$	$X$	$0$	$0.98$	$2$
	$Y$	$2.51$	$2.38$	$2$
	$Z$	$0.559$	$0.953$	$2$
$j=1$	$X$	$0$	$1.14$	$2.38$
	$Y$	$1.2$	$1.14$	$0.98$
	$Z$	$2.501$	$2.226$	$0.953$

$j=0$	$X$	$0$	$1.2$	$2.51$
	$Y$	$0$	$0$	$0$
	$Z$	$3$	$2.501$	$0.559$
		$i=0$	$i=1$	$i=2$



Топологічна схема сіток доданків

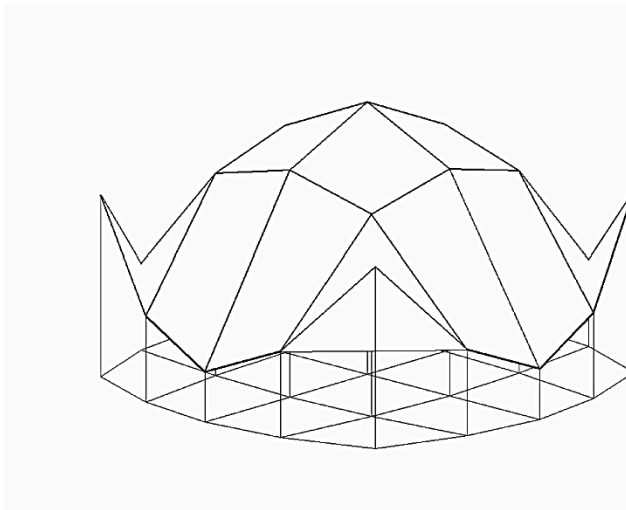


Рис. 2, а

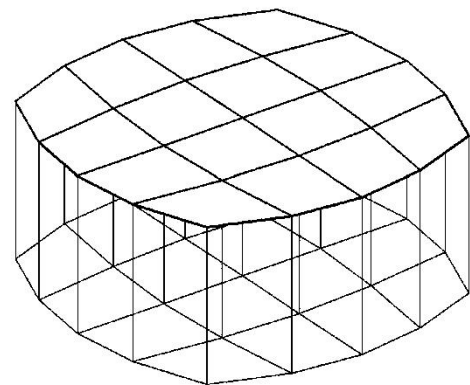


Рис. 2, б

Для того, щоб аплікати кутових вузлів залишилися такими самими, як у першій сітці-доданку, аплікати вузлів плоскої сітки також повинні дорівнювати  $Z_{i,j} = 2$ . Апліката центрального вузла результуючої сітки буде:

$$Z_{00} = k_1 Z'_{00} + k_2 Z''_{00} \quad (10)$$

де  $Z'$  і  $Z''$  – відповідні аплікати центральних вузлів сіток-доданків;

$k_1$  і  $k_2$  – вагові коефіцієнти функціонального додавання.

Для того, щоб у результаті функціонального додавання не змінились аплікати кутових вузлів, згідно з умовою 3, задаємо  $k_1 + k_2 = 1$ . Тоді:

$$k_1 = \frac{Z_{00} - Z''_{00}}{Z'_{00} - Z''_{00}}; \quad k_2 = \frac{-Z_{00} + Z'_{00}}{Z'_{00} - Z''_{00}}. \quad (11)$$

У відповідності до (10) аплікату довільного вузла результуючої сітки дорівнюватиме:

$$Z_{i,j} = \frac{Z'_{i,j}(Z_{00} - Z''_{00}) - Z''_{i,j}(Z_{00} - Z'_{00})}{Z'_{00} - Z''_{00}}, \quad (12)$$

де  $Z'_{i,j}$  і  $Z''_{i,j}$  – аплікати вузлів відповідно першої та другої сіток, що додаються;

$Z_{00}$  – параметр управління формою.

У табл. 2 наведено аплікати вузлів врівноважених сіток при заданих аплікатах центрального вузла  $Z_{00} = 1.5$  і  $Z_{00} = 2.5$ . Результуючі сітки показано на рис. 3а та рис 3б.

Наведений приклад наочно показує, що застосування апарата суперпозицій дозволяє оперативно варіювати форму сітки без складання і розв'язання системи рівнянь рівноваги вузлів.

Табл. 2

$Z_{00}$	$Z_{10}$	$Z_{20}$	$Z_{11}$	$Z_{21}$	$Z_{22}$
1.5	1.75	2.72	1.89	2.52	2
2.5	2.25	1.28	2.11	1.48	2

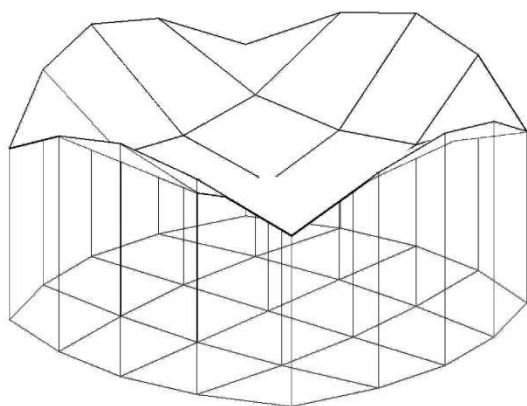


Рис. 3, а

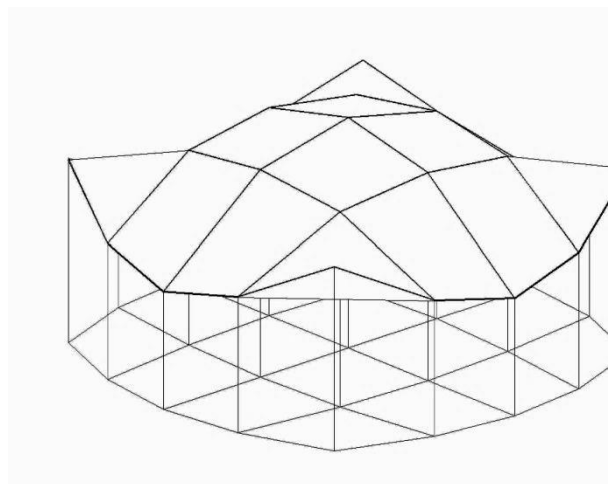


Рис. 3, б

**Висновки та перспективи.** Наведений приклад наочно показує, що застосування апарата суперпозицій дозволяє оперативно варіювати форму сітки без складання і розв'язання системи рівнянь рівноваги вузлів.

### Література

1. Математична енциклопедія. Т. 5. М.: Радянська енциклопедія, 1985. С. 278.
2. Енциклопедія елементарної математики. Під ред. П.С. Александрова и др. М.-Л.: Держ. вид. техн.- теорет. літ., 1951-1966. Т.5. Геометрія. 625 С.

3. *Хай Ч.Х.* Управление формой растянутых систем на основе функционального сложения / Дис... канд. техн. наук: 05.01.01. Київ : КГТУСА, 1994. 148 С.
4. *Воробкевич Р.И.* Конструирование линий и поверхностей на основе специальных операций над функциями и тригонометрическими сплайнами / Дисс... канд. техн. наук: 05.01.01. М.: 1989. 150 С.
5. *Faux I.D., Pratt M.A.* Computational Geometry For Design And Manufacture / *Halsted Press: a division of John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto.* 296 P.
6. *Мостовенко О.В.* Управление формой безмоментного большепролётного покрытия при заданном объёме / *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* Київ : КНУБА, 2011. Вип. 87. С. 281-285.
7. *Воронцов О.В., Тулупова Л.О., Воронцова І.В.* Визначення одновимірних геометричних образів ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності / *Вісник Херсонського національного технічного університету.* 2016. №3. С. 487-491.

### References

1. *Matematychna entsyklopediia.* Т. 5. М.: Radianska entsyklopediia, 1985. P. 278.
2. *Entsyklopediia elementarnoi matematyky.* Pid red. P.S. Aleksandrova y dr. М.-Л.: Derzh. vyd. tekhn.- teoret. lit., 1951-1966. Т.5. Неометриіа. 625 P.
3. *Khay Ch.Kh.* Upravlenye formoi rastianutyykh system na osnove funktsyonalnoho slozheniya / Dys... канд. tekhn. nauk: 05.01.01. Kyiv : KHTUSA, 1994. 148 P.
4. *Vorobkevych R.Y.* Konstruyrovanye lyny y poverkhnostei na osnove spetsyalnykh operatsyi nad funktsiyamy y tryhonometrycheskymy splainamy/ R.Y. Vorobkevych / Dyss... канд. tekhn. nauk: 05.01.01. М.: 1989. 150 P.
5. *Faux I.D., Pratt M.A.* Computational Geometry For Design And Manufacture / *Halsted Press: a division of John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto.* 296 p.
6. *Mostovenko O.V.* Upravlenye formoi bezmomentnoho bolsheproletnoho pokrytyia pry zadannom ob'ёme / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 2011. Vyp. 87. P.281-285.
7. *Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V.* Vyznachennia odnovymirnykh heometrychnykh obraziv lantsiuhom poslidovnykh superpozytsii iz vrakhuvanniam velychyny rekurentnoi zalezhnosti / *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu.* 2016. №3. P. 487-491.

UDC 514.18

Assistant **Oleksii Mostovenko**  
 mostovenko.ov2@knuba.edu.ua, ORCID:0000-0003-1844-1843  
 Ph. D., Prof. **Sergii Kovalov**

kovalov.sm@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7713-1768  
Ph. D., Prof. **Oleksandr Mostovenko**  
mostovenko.ov@knuba.edu.ua, ORCID:0000-0002-3423-4126  
Ph. D, Master of Technical Science **Viktoriia Us**  
us.vf@knuba.edu.ua,ORCID: 0000-0001-7511-4449

Kyiv National University of Construction and Architecture

## **CONDITIONS OF USING THE METHOD OF SUPERPOSITIONS FOR CONTROLLING THE SHAPE OF A BALANCED DISCRETE STRUCTURE**

*The superposition of functions is understood as the formation of a complex function as a result of algebraic operations on two or more simple functions [1]. If simple functions are given discretely, the notion of superposition of points arises. In the future, the superposition of points will be understood as the determination of the coordinates of the resulting point when compiling the corresponding coordinates of the specified points with certain weighting factors.*

*The superposition of balanced discrete structures requires the fulfillment of certain conditions and rules:*

*Condition 1. When discretely represented surfaces are functionally added, they must be topologically identical (isotopic) [2]. At the same time, the correspondence between the elements of the resulting structure and each of the added structures must be established. In the superposition of discrete balanced structures, there are not only the coordinates of the vertices of the structure, but also the force vectors that arise in the edges of the structure and the forces of the external load on the vertices.*

*Condition 2. In balanced systems, the ratio of the length of the edge to the length of the force vector in this edge, in the corresponding edges of the components of the superposition, must be the same. Only in this case, the tension or compression force of each rib as a result of functional addition will become the force in the given rib.*

*Condition 3. In order for the coordinates of a given node to remain unchanged after functional addition, the sum of weight coefficients of functional addition at each coordinate must be equal to one.*

*Condition 4. The number of added grids must be one more than the number of shape control parameters.*

*Condition 5. If a balanced structure is formed under the action of its own weight, then the shape control parameters can only be applied to individual nodes or vertices, since when other coordinates of these nodes (abscissa and ordinate) are changed, the external load will not be vertical.*

*Keywords: discrete structure, superposition of points, functional addition, balanced structure, shape control.*