

д. т. н., професор **Гавриленко Є.А.**,
yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4501-445X

к. т. н., доцент **Холодняк Ю.В.**,
yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8966-9269

Тетервак І.Р.,
illia.tetervak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0009-0009-0616-8983

Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного

МЕТОД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТОЧКОВИХ РЯДІВ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ГЛАДКИХ ОБВОДІВ

Формування складних функціональних поверхонь заданих масивом точок є актуальним завданням геометричного моделювання. Геометрична модель такої поверхні формується на основі дискретного лінійчатого каркасу, елементами якого є обводи, що складаються з ділянок аналітично заданих кривих ліній. У роботі розв'язується задача моделювання гладкого обводу, який із заданою точністю представляє вихідну криву, інтерполює вихідний точковий ряд та належить кривій лінії, що не містить особливих точок. Обвід формується всередині області можливого розташування частин інтерполюючої кривої, вздовж яких значення кривини монотонно збільшуються або зменшуються. Спосіб визначення області розташування кривої заснований на призначенні положень дотичних прямих та значень кривини у вихідних точках всередині діапазонів, що гарантують можливість інтерполяції точкового ряду кривою лінією із заданими характеристиками. Всі криві лінії, що відповідають умовам задачі, не можуть розташовуватися за межами зазначеної області. Абсолютна похибка інтерполяції точкового ряду оцінюється шириною області можливого розташування кривої лінії. Якщо похибка інтерполяції вихідного точкового ряду виявиться більшою за призначену величину, то ширина області розташування кривої зменшується за рахунок призначення відповідних проміжних точок. В результаті призначення кожної проміжної точки отримуємо області розташування двох нових ділянок кривої, що знаходяться всередині області розташування відповідної вихідної ділянки. Після того, як похибка інтерполяції стає меншою від заданої величини, область розташування кривої лінії вважається сформованою, а отриманий точковий ряд інтерполюється обводом, який знаходиться всередині цієї області. Досліджено можливість формування обводів із заданими характеристиками ділянками кола та B-сплайну.

Ключові слова: монотонна крива; дотичне коло; прилягаюче коло; область розташування кривої; обвід.

Постановка проблеми. Моделювання є ефективним інструментом дослідження об'єктів, явищ та процесів. Геометричне моделювання об'єкта часто визначає його функціональні властивості. До таких об'єктів насамперед належать вироби, обмежені функціональними поверхнями, які забезпечують ламінарний характер обтікання виробу середовищем – газом, рідиною або сипучими матеріалами [1-3]. Прикладом виробів, обмежених функціональними поверхнями, можуть бути корпуси автомобілів та літальних апаратів, робочі органи сільськогосподарських машин, лопатки робочих коліс турбін та компресорів.

Складні поверхні зазвичай моделюються на основі лінійчатих каркасів, елементи яких формуються в результаті інтерполяції точкових рядів. При цьому експлуатаційні характеристики виробу забезпечують геометричні характеристики інтерполюючих кривих ліній.

Підвищені аеро- і гідродинамічні властивості поверхні забезпечує використання в якості елементів каркасу ліній з регулярною зміною значень характеристик і мінімальною (виходячи з умов задачі) кількістю особливих точок. Для плоскої кривої лінії це точки стикування опуклих і увігнутих ділянок і точки, в яких значення кривини екстремальні [4]. Гладку плоску криву лінію, яка не має особливих точок, називатимемо кривою з монотонною зміною кривини або монотонною кривою.

Якщо модель поверхні створюється з метою виготовлення копії вже існуючого виробу (зворотній інжиніринг), то задача інтерполяції точкового ряду стає ще складнішою. У цьому випадку до задачі забезпечення необхідних характеристик інтерполюючої кривої додається задача забезпечення заданої точності інтерполяції [5].

Для вирішення поставленого завдання необхідно розробити метод інтерполяції, який забезпечує контроль динаміки зміни вздовж кривої значень її характеристик, можливість локального коригування кривої та запобігання неконтрольованого виникнення особливих точок.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Можливість локального коригування форми інтерполюючої кривої при контролі її характеристик у вихідних точках дають методи інтерполяції точкового ряду обводом. Обвід формується ділянками аналітично заданих кривих ліній, які стикуються у вихідних точках із заданим порядком гладкості. Це методи інтерполяції ділянками кривих другого порядку, кривих Безьє, В-Сплайн [6-12].

У роботах [7-8] розв'язується задача інтерполяції точкового ряду обводом, що складається з дуг кіл, які гладко стикуються між собою. При формуванні кожної ділянки дугою одного кола локальне коригування обводу неможливе. Зміна радіусу будь-якої з дуг призводить до зміни конфігурації всіх ділянок обводу. Завдання вирішується формуванням ділянок двома та більше дугами кіл при зафіксованому положенні дотичних до обводу у вихідних точках. У цьому випадку коригування окремої ділянки не тягне за собою зміни конфігурації інших ділянок обводу.

Завдання формування обводу, вздовж якого радіуси дуг кіл змінюються монотонно, а також завдання забезпечення заданої точності інтерполяції в [7-8] не розглядається.

З методів інтерполяції точкового ряду обводом, найбільші можливості коригування ділянок обводу забезпечує інтерполяція сплайном [9, 11-12].

В-сплайн визначається точками, кожній з яких відповідає функція сполучення. Тобто В-сплайн є складовою кривою лінією, кожен сегмент якої визначає окреме рівняння, ступінь якого дорівнює ступеню функції сполучення (k). При цьому в точках стикування сегментів автоматично забезпечується безперервність значень похідних до $k-1$ порядку включно. Крива апроксимує ламану лінію, яка з'єднує точки, що задають В-сплайн. Конфігурація цієї ламаної дозволяє контролювати наявність у сплайна точок перегину.

Можливості локального коригування частин В-сплайна визначаються ступенем його рівняння та кількістю сегментів. При n точках, які задають сплайн, він складається з $n-k$ сегментів, а зміна положення однієї точки призводить до зміни конфігурації кривої на ділянці, що складається з $k+1$ -го сегмента. Таким чином, підвищення якості стикування сегментів за рахунок збільшення ступеня їх рівнянь знижує можливості локального коригування конфігурації та характеристик сплайну. При вирішенні практичних задач найчастіше використовують кубічні В-сплайни, у яких автоматично забезпечується регулярність значень кривини в точках стикування сегментів і переміщення кожної точки, що задає В-сплайн, призводить до зміни конфігурації не більше, ніж чотирьох сегментів.

Підвищення локальності коригування елементів В-сплайну за рахунок збільшення числа сегментів вимагає збільшення числа точок, що ускладнює контроль виникнення особливих точок, а також розташування і форми кривої в цілому.

Основним недоліком інтерполяції В-сплайном та іншими аналітично заданими кривими лініями є відсутність механізмів контролю за виникненням точок з екстремальним значенням кривини. Зазначений недолік знижує можливості використання аналітично заданих кривих ліній для формування обводів із заданими характеристиками і, насамперед, обводів, призначених для моделювання поверхонь із заданими функціональними властивостями.

У роботах [13, 14] запропоновано:

- спосіб аналізу вихідного точкового ряду, що дозволяє визначити його частини, які можна інтерполювати монотонною кривою лінією;
- спосіб визначення абсолютної похибки інтерполяції точкового ряду монотонною кривою лінією;

- спосіб визначення для вихідного точкового ряду положень проміжних точок, при яких проміжні та вихідні точки можна інтерполювати монотонною кривою лінією.

Аналіз вихідного точкового ряду заснований на визначенні радіусів прилягаючих кіл (ПК), кожне з яких проходить через три послідовні точки ряду. Частина точкового ряду, вздовж якого радіуси ПК збільшуються або зменшуються, можна інтерполювати монотонною кривою лінією, вздовж якої радіуси кривини збільшуються або зменшуються відповідно.

Абсолютна похибка інтерполяції ділянки точкового ряду монотонною кривою лінією, що визначається шириною області, обмеженої дугами відповідних ПК ($\Delta_i^{ПК}$). Для ділянки $(i; i+1)$ ця область обмежена дугою $ПК_i$, яка проходить через точки $i-1, i, i+1$ та дугою $ПК_{i+1}$ (рис. 1).

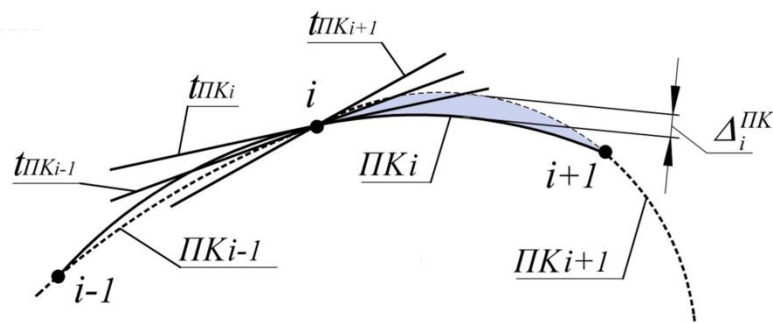


Рис. 1. Область розташування монотонної кривої

Якщо в точках монотонної кривої i та $i+1$ відомі положення дотичних t_i, t_{i+1} і значення радіусів кривини R_i, R_{i+1} , абсолютна похибка інтерполяції її ділянок може бути визначена більш точно. Для ділянки кривої $(i; i+1)$ похибка оцінюється максимальною відстанню між складовими кривими (рис. 2):

- крива, що складається з дуги стичного кола в точці i ($СК_i$) та дуги кола, що дотичне до $СК_i$ та прямої t_{i+1} у точці $i+1$ ($Кол_{i+1}$). Для кривої, вздовж якої радіуси кривини зростають, ця межа області є нижньою (найближчою до хорди $[i; i+1]$);

- крива, що складається з дуги стичного кола в точці $i+1$ ($СК_{i+1}$) і дуги кола, що дотичне до $СК_{i+1}$ і прямої t_i в точці i ($Кол_i$).

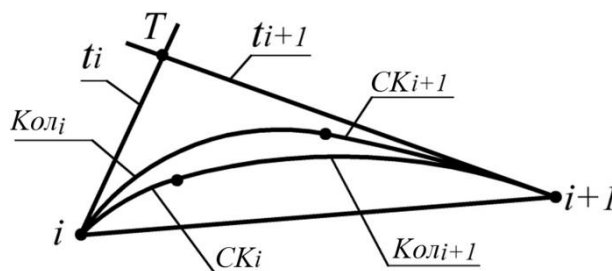


Рис. 2. Уточнення області розташування монотонної кривої

Встановлено, що для прямих t_i та t_{i+1} , що дотичні до монотонної кривої лінії, вздовж якої радіуси кривини монотонно зростають, відстані від точки перетину прямих (точка T) до точок торкання з кривою (рис. 2) знаходяться у співвідношенні

$$|i;T| < |T;i+1|. \quad (1)$$

Співвідношення (1) може бути використане як критерій коректного призначення дотичних прямих при формуванні обводу, що з заданою точністю представляє монотонну криву лінію.

Якщо значення абсолютної похибки інтерполяції Δ_i^{PK} перевищують задану величину, то на відповідних ділянках вихідного точкового ряду призначаються проміжні точки. Монотонна зміна радіусів ПК уздовж отриманого точкового ряду є необхідною умовою його інтерполяції монотонною кривою лінією.

Остаточне рішення представлено у вигляді супровідної ламаної лінії, відстань від якої до кривої лінії із заданими геометричними характеристиками не перевищує заздалегідь задану скільки завгодно малу величину. Використання обводів, що складаються з відрізків прямої лінії, при моделюванні функціональних поверхонь знижує їх аеро- та гідродинамічні властивості.

Ціль статті. Метою дослідження є розробка методу формування гладкого обводу, який інтерполює точковий ряд, що із заданою точністю представляє монотонну криву лінію.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі:

- розробити спосіб формування області розташування монотонної кривої лінії, що інтерполює заданий точковий ряд, ширина якої не перевищує задану величину;
- розробити спосіб формування гладкого обводу, який складається з ділянок кривих ліній, що використовують більшість САД-систем, та інтерполює заданий точковий ряд і знаходиться всередині області розташування монотонної кривої лінії;
- дослідити можливості запропонованого методу при розв'язанні задачі інтерполяції заданого точкового ряду;
- порівняти характеристики обводів, сформованих ділянками кривих ліній, які використовує САД-система SolidWorks.

Основна частина. Формування області розташування монотонної кривої лінії розглянемо на прикладі точкового ряду, який можна інтерполювати кривою з монотонним збільшенням радіусів кривини. Спочатку визначимо обмеження розташування ділянки кривої, розташованої між двома послідовними вихідними точками.

Найбільш точна оцінка області розташування ділянки монотонної кривої можлива, якщо для точок i та $i+1$ відоме положення центрів кривини C_i та C_{i+1} . Для визначення меж області попередньо

Довжину відрізка $[T_i; K]$ визначимо як катет трикутника T_i, K, O_{i+1} :
 $|T_i, K|^2 = M_{i+1}^2 \cdot b^2 - |K, O_{i+1}|^2$.

Довжину відрізка $[K; O_{i+1}]$ виразимо через площу (S_1) трикутника C_i, O_{i+1}, T_i як $|K, O_{i+1}| = \frac{2S_1}{a_1}$.

Виразивши $S_1 = M \cdot S_i$ приведемо вираз (4) до вигляду:

$$|C_i, O_{i+1}|^2 = a_1^2 + 2M_{i+1} \sqrt{a_1^2 b^2 - 4S_i^2} + M_{i+1}^2 \cdot b^2. \quad (5)$$

Підставивши (3) на (5) після перетворень отримуємо:

$$M_{i+1} = \frac{a_1^2 - (m - R_i)^2}{2 \left(b(m - R_i) - \sqrt{a_1^2 b^2 - 4S_i^2} \right)}. \quad (6)$$

Верхню межу складають дуга CK_{i+1} і дуга кола Kol_i , яка дотична до кривої в точці i , а з CK_i – в деякій точці B .

Задача визначення верхньої межі області розташування ділянки монотонної кривої зводиться до розрахунку координат центру Kol_i (точка O_i). Вихідними для розв'язання задачі є положення нормалей n_i, n_{i+1}, n_{i+2} і центру кривини C_{i+1} .

Положення O_i в межах відрізка $[T_{i-1}; T_i]$ (рис. 4) визначається співвідношенням:

$$M_i = \frac{|O_i, T_i|}{a}, \quad (7)$$

де $a = |T_{i-1}, T_i|$.

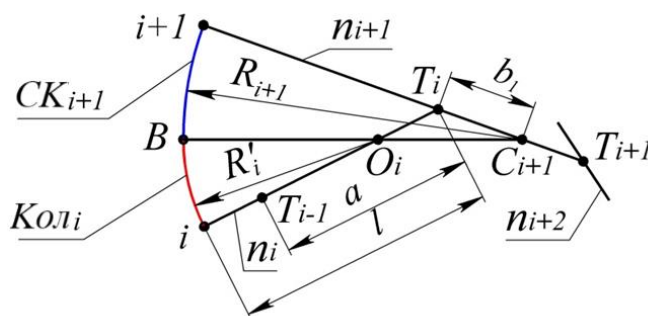


Рис. 4 Верхня межа області розташування ділянки монотонної кривої

В результаті дій, аналогічних зробленим під час виведення виразу (6), отримуємо:

$$M_i = \frac{b_1^2 - (R_{i+1} - l)^2}{2 \left(a(R_{i+1} - l) - \sqrt{a^2 b_1^2 - 4S_{i+1}^2} \right)}, \quad (8)$$

де $l = |i, T_i|$, $a = |T_{i-1}, T_i|$, $b_1 = |T_i, C_{i+1}|$, S_{i+1} – площа трикутника T_{i-1}, T_i, C_{i+1} .

При заданому положенні нормалей n_i, n_{i+1} та центру кривини C_{i+1} радіус Kol_i $R'_i = |O_i, i| \in$ максимальним із можливих радіусів кривини монотонної кривої в точці i . Аналогічно положення C_i визначає мінімальний можливий радіус кривини в точці $i+1$ $- R'_{i+1} = |O_{i+1}, i+1|$.

З цього критерію визначимо область розташування монотонної кривої, заданої довільним точковим рядом.

За умови монотонного зростання радіусів кривини вздовж кривої мінімальне значення радіуса кривини в точці i (R_i^{min}) дорівнює нулю. При цьому точку i розглядаємо як стичне коло нульового радіуса. У цьому випадку нижньою межею області розташування інтерполюючої кривої є дуга кола Kol_{i+1} , що дотичне до прямої t_{i+1} в точці $i+1$ і проходить через точку i (Орис. 5). Мініально можливий радіус кривини, який може бути призначений у точці $i+1$ (R_{i+1}^{min}) дорівнює радіусу Kol_{i+1} .

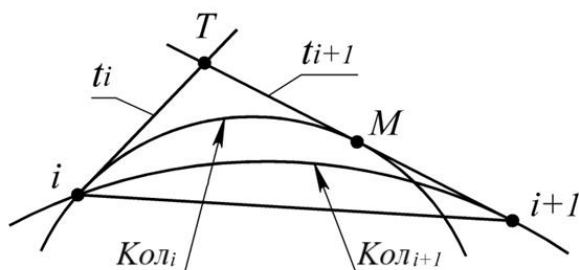


Рис. 5. Визначення можливих значень радіусів кривини

Максимальний радіус кривини, який може бути призначений у точці $i+1$ (R_{i+1}^{max}), дорівнює нескінченності. У цьому випадку верхньою межею області розташування кривої, що формується, є крива, що складається з дуги кола, дотичного з t_i в точці i та з t_{i+1} в точці M (Kol_i) і відрізка $[M; i+1]$ (дотичне коло нескінченного радіусу). У точці i максимально можливе значення радіусу кривини (R_i^{max}) дорівнює радіусу Kol_i .

Всі криві з монотонним зростанням радіусів кривини, що мають в точках i та $i+1$ дотичні t_i та t_{i+1} відповідно, проходять всередині області, обмеженої отриманими складовими кривими. Значення радіусів кривини кривої, що відповідає умовам задачі, у точках i та $i+1$ повинні належати діапазонам:

$$0 \leq R_i \leq R_i^{max}, \quad (9)$$

$$R_{i+1}^{min} \leq R_{i+1} \leq \infty. \quad (10)$$

Якщо монотонна крива, інтерполює послідовність точок $1..n$, то мінімальний радіус кривини може дорівнювати нулю тільки в першій точці, а максимальний може дорівнювати нескінченності тільки в останній точці.

В цьому випадку нижня межа області розташування кривої визначається за наступною схемою.

1. На ділянці (1,2) область обмежена дугою кола, що проходить через точку 1 і має у точці 2 загальну дотичну з кривою. Вказане коло приймається за коло, що стикається, у точці 2, радіус якого є мінімальним з можливих. Позначимо це коло CK_2^{min} .

2. Приймавши CK_2^{min} за стичне коло в точці 2 визначаємо коло, що дотичне до нього і до монотонної кривої в точці 3. Позначимо це коло CK_3^{min} . Положення центру CK_3^{min} визначається за методикою, представленою на рис. 3 для точки O_{i+1} . Нижня межа області розташування кривої на ділянці (2,3) становлять гладко зістиковані дуги кіл CK_2^{min} та CK_3^{min} .

3. Виходячи з розташування та розмірів CK_3^{min} аналогічно визначається нижня межа області ділянки (3,4), та межі інших ділянок.

Верхня межа області розташування монотонної кривої лінії визначається, починаючи з останньої ділянки за наступною схемою.

1. На ділянці $(n-1,n)$ межа області складається з відрізка дотичної прямої в точці n (t_n) та дуги кола CK_{n-1}^{max} , що дотична з t_n і має загальну дотичну з кривою в точці $n-1$. Зазначене коло приймається за коло, що стичне в точці $n-1$, радіус якого є максимальним з можливих.

2. На ділянці $(n-2,n-1)$ верхню межу області становлять дуги кіл CK_{n-1}^{max} і дотичного з ним кола CK_{n-2}^{max} , яке має у точці $n-2$ загальну дотичну з монотонною кривою. Центр CK_{n-2}^{max} визначається за методикою, представленою на рис. 4 для точки O_i .

3. Верхня межа області розташування кривої визначається послідовно від ділянки до ділянки аналогічно межі ділянки $(n-2,n-1)$.

Абсолютна похибка інтерполяції (δ_i) точкового ряду монотонною кривою лінією оцінюється шириною області її можливого розташування. На ділянці $i..i+1$ ширину області визначимо як відстань між прямими t_i^u та t_i^d , які паралельні відрізку $[i,i+1]$ та дотичні до нижньої та верхньої межі області відповідно (рис. 6).

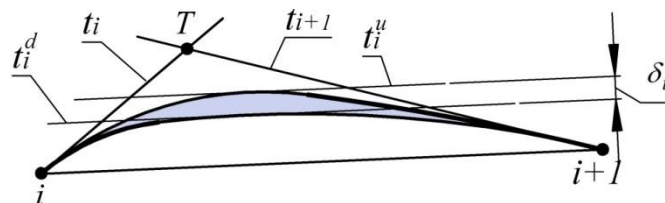


Рис. 6. Визначення абсолютної похибки інтерполяції

Якщо похибка інтерполяції вихідного точкового ряду виявиться більшою за призначену величину, то ширина області розташування кривої

зменшується за рахунок призначення відповідних проміжних точок. Проміжна точка призначається на прямій, що проходить через середину відрізка $[i, i+1]$, перпендикулярно цьому відрізку в межах області розташування ділянки кривої. В результаті призначення кожної проміжної точки отримуємо області розташування двох нових ділянок кривої, що знаходяться всередині області розташування відповідної вихідної ділянки.

Після того, як похибка інтерполяції стає меншою від заданої величини, область розташування монотонної кривої лінії вважаємо сформованою, а отриманий точковий ряд інтерполюється обводом, який знаходиться всередині області розташування кривої. В якості величини, яка не може перевищувати задану похибку інтерполяції, доцільно прийняти мінімально можливу похибку обробки на верстаті з числовим програмним керуванням, яка становить 10^{-3} мм [5].

Для вирішення поставленої задачі необхідно забезпечити:

- наявність загальної дотичної обводу та монотонної кривої лінії у вихідних точках;
- зростання радіусів кривини вздовж обводу у тому напрямі, як і в монотонної кривої лінії.

Розглянемо можливість формування обводів із указаними характеристиками ділянками кривих ліній, використання яких забезпечує САД-система SolidWorks. Це коло, парабола, еліпс та В-сплайн.

Формування обводу, що складається з двох дуг кіл, які замінюють ділянку $[i, i+1]$ монотонною кривою, вздовж якої радіуси кривини монотонно зростають, представлено на рис. 7.

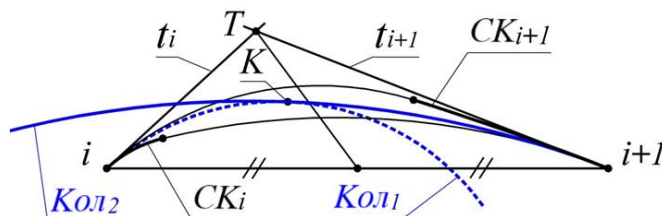


Рис. 7. Заміна ділянки монотонної кривої лінії дугами кіл

Коло, що визначає першу дугу ($Кол_1$) задане дотичною з монотонною кривою в точці i та проходженням через деяку точку, призначену в межах області розташування монотонної кривої. Наприклад, ця точка може бути серединою відрізка, який обмежений точками перетину медіани трикутника $i, T, i+1$ з межами розташування монотонної кривої.

Коло, якому належить друга дуга ($Кол_2$), визначається дотичністю з монотонною кривою в точці $i+1$ та дотичністю $Кол_1$ в деякій точці K . В результаті отримаємо кола із співвідношенням радіусів

$$R_i^{min} \leq R_1 \leq R_{i+1}^{max};$$

$$R_{i+1}^{\min} \leq R_2 \leq R_{i+1}^{\max};$$

$$R_1 < R_2,$$

де R_1 та R_2 – радіуси K_{ol_1} та K_{ol_2} відповідно; $R_i^{\min}, R_i^{\max}, R_{i+1}^{\min}, R_{i+1}^{\max}$ – радіуси $CK_i^{\min}, CK_i^{\max}, CK_{i+1}^{\min}, CK_{i+1}^{\max}$.

Сформувавши за аналогічним алгоритмом дуги, що замінюють інші ділянки монотонної кривої, отримаємо обвід, що інтерполіює весь точковий ряд, уздовж якого радіуси дуг кіл монотонно зростають.

Монотонне зростання радіусів кіл уздовж обводу в тому ж напрямку, що і зростання радіусів кривини вздовж монотонної кривої лінії, а також загальні дотичні обводу та кривої у вихідних точках, забезпечують розташування обводу в межах області можливого розташування монотонної кривої.

Основним недоліком формування обводів дугами кіл є порушення регулярності зміни значень кривини в точках їх стикування. Зменшити вплив зазначеного недоліку на функціональні характеристики поверхні при використанні обводу як елемента її каркаса можливо за рахунок збільшення кількості дуг, що складають обвід, та зменшення різниці значень радіусів кіл, які їх визначають.

Інший спосіб формування гладкого обводу – інтерполяція точкового ряду кубічним неперіодичним В-сплайном. У точках стикування сегментів цього сплайна автоматично забезпечується регулярність значень кривини, але не забезпечується монотонність зміни вздовж обводу радіусів стичних кіл. Тому розташування сплайну в межах області можливого розташування монотонної кривої не гарантована. Наявність у сплайна загальних дотичних з монотонною кривою у вихідних точках забезпечує опуклість обводу. В цьому випадку частини В-сплайна розташовуються в межах трикутників, обмежених дотичними до монотонної кривої в сусідніх вихідних точках і відрізком, що з'єднує вказані точки (на рис. 5 це трикутник $i, T, i+1$). Тоді максимально можливе відхилення обводу від монотонної кривої на кожній з ділянок можна оцінювати відстанню від точки перетину дотичних (точка T) до основи трикутника. Для забезпечення відхилення В-сплайна від монотонної кривої лінії, яке не перевищує задану величину, знадобиться послідовність точок, розташованих на кривій, кількість яких у кілька разів перевищує кількість точок, необхідних для формування обводу дугами кіл.

Інтерполяція точкового ряду, розташованого на монотонній кривій, дугами парабол або еліпсів має той же недолік, що й інтерполяція В-сплайном: відсутній механізм запобігання неконтрольованого виникнення точки з екстремальним значенням кривини. Зазначений недолік знижує можливість використання кривих другого порядку та сплайнів при формуванні каркасів функціональних поверхонь.

Можливості запропонованого у статті способу формування обводів досліджено з прикладу інтерполяції послідовності з десяти точок.

Характеристики точкового ряду: координати вихідних точок – $i(x_i, y_i)$; відстані між сусідніми вихідними точками – $|i, i+1|$; радіуси ПК, що визначаються точковим рядом – $R_{ПК_i}$; абсолютна похибка інтерполяції точкового ряду монотонною кривою лінією, заданою координатами вихідних точок – Δ_i^{AC} наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Характеристики вихідного точкового ряду

i	x_i	y_i	$ i, i+1 $	$R_{ПК_i}$	Δ_i^{AC}
1	0	0	5,28	-	-
2	0,21	-5,28	7,20	7,41	0,4966
3	-5,11	-10,13	15,57	13,30	0,9431
4	-20,48	-7,65	25,24	20,04	1,8869
5	-28,68	16,23	28,82	32,08	1,4296
6	-13,87	40,95	34,90	53,22	0,8614
7	17,95	55,28	36,29	74,21	1,1654
8	54,24	53,04	49,65	151,68	1,3118
9	100,94	36,19	155,96	420,54	-
10	230,38	-50,82	-	-	-

Монотонне зростання $R_{ПК_i}$ вздовж точкового ряду дозволяє інтерполювати його монотонною кривою лінією, уздовж якої значення радіусів кривини збільшуються. Абсолютна похибка інтерполяції Δ_i^{AC} оцінюється як максимальна відстань між дугами кіл $ПК_i$ та $ПК_{i+1}$, обмежених точками i та $i+1$ (рис. 1).

На першій та останній ділянках величину Δ_i^{AC} не визначено, оскільки AC_1 та AC_{10} немає.

На наступному етапі формування обводу у вихідних точках призначено положення дотичних прямих до монотонної кривої лінії, що інтерполює точковий ряд, та уточнена область її можливого розташування на кожній з ділянок. Положення дотичних призначені в межах діапазонів, обмежених щодо відповідних ПК (рис. 2). У таблиці 2 наведені довжини сторін трикутників, одержаних у результаті призначення дотичних прямих – $|i, i+1|$, $|i, T|$, $|T, i+1|$; абсолютна похибка інтерполяції точкового ряду монотонною кривою лінією, заданою координатами вихідних точок та положенням дотичних до них на кожній з ділянок – Δ_i ; перевищення нижньої межі області розташування інтерполюючої кривої над відрізками, що з'єднують відповідні вихідні точки h_i .

Межі області розташування кривої лінії, що інтерполює, визначені за методикою представленої на рис. 6. Абсолютна похибка інтерполяції на ділянці $i..i+1$ визначається як відстань між прямими, що дотичні до

верхньої та нижньої меж області розташування кривої та паралельні відрізки $[i, i+1]$.

Таблиця 2

Характеристики точкового ряду після призначення дотичних

i	BT			h_i	Δ_i
	$ i, i+1 $	$ i, T $	$ T, i+1 $		
1	5,28	3,07	3,12	0,7327	0,0140
2	7,20	3,78	3,83	0,5906	0,0078
3	15,57	7,80	9,97	1,8639	0,0218
4	25,24	13,53	16,52	3,9238	0,0595
5	28,82	13,67	16,71	2,2022	0,0629
6	34,90	16,95	19,53	2,6298	0,0922
7	36,29	15,63	21,32	1,5500	0,2184
8	49,65	20,41	29,53	1,2163	0,2257
9	155,96	69,13	88,31	4,8396	1,1281

Максимальна абсолютна похибка інтерполяції становила 1,1281 мм ділянці 9...10.

З метою зменшення максимальної абсолютної похибки інтерполяції на вихідній ділянці 9...10 призначено проміжну точку та дотичну пряму до монотонної кривої в ній. Проміжна точка призначена всередині області розташування інтерполуючої кривої на ділянці 9...10 на прямій, яка проходить через середину відрізка $[9, 10]$ перпендикулярно до відрізка. У результаті отримано точковий ряд, що складається з 11 точок, в якому проміжній точці присвоєно № 10. Положення точки визначається координатами $x_i = 168,62$, $y_i = -2,92$.

Характеристики області можливого розташування монотонної кривої лінії, що інтерполуює отриманий точковий ряд, наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Характеристики області можливого розташування монотонної кривої

i	BT			h_i	Δ_i
	$ i, i+1 $	$ i, T $	$ T, i+1 $		
1	5,28	3,07	3,12	0,7327	0,0140
2	7,20	3,78	3,83	0,5906	0,0078
3	15,57	7,80	9,97	1,8639	0,0218
4	25,24	13,53	16,52	3,9238	0,0595
5	28,82	13,67	16,71	2,2022	0,0629
6	34,90	16,95	19,53	2,6298	0,0922
7	36,29	15,63	21,32	1,5500	0,2184
8	49,65	20,41	29,53	1,2163	0,2857
9	78,16	37,03	41,39	1,5356	0,1753
10	78,16	37,63	40,65	1,0480	0,0975

Для отриманого точкового ряду максимальна абсолютна похибка інтерполяції становила 0,2257 мм на ділянці 8...9. Призначаючи проміжні точки можна сформуванати точковий ряд, що складається із скільки завгодно великої кількості точок, який визначає як завгодно малу похибку інтерполяції монотонною кривою лінією.

Характеристики обводу, що складається з гладко зістиканих дуг кіл, інтерполюючих послідовність з одинадцяти точок наведені в таблиці 4.

Таблиця 4

Характеристики обводу

i	R_1^i	R_2^i	H_i	δ_i
1	4,9902	5,1701	0,7461	0,0134
2	11,0191	11,3487	0,5962	0,0056
3	11,4630	19,9296	1,8851	0,0212
4	19,9359	34,1886	3,9828	0,059
5	34,5156	53,4423	2,2646	0,0624
6	53,5381	73,6735	2,7214	0,0916
7	76,7344	145,9776	1,7641	0,2141
8	163,8066	352,0208	1,4783	0,2620
9	428,4307	537,2404	1,6269	0,0913
10	660,3963	775,5817	1,0971	0,0483

Кожна з ділянок обводу складається з двох дуг кіл радіуса R_1^i та R_2^i відповідно, які мають у вихідних точках загальну дотичну з монотонною кривою лінією. Максимальне перевищення ділянки обводу над відрізком, що з'єднує відповідні вихідні точки таблиці позначено як H_i . Абсолютна похибка, з якою обвід замінює монотонну криву лінію δ_i оцінюється максимальною відстанню від дуг кіл, що складають обвід, до меж області розташування відповідних ділянок монотонної кривої.

Формування ділянок обводу згідно з методикою представленою на рис. 7 забезпечило його розташування всередині області можливого розташування монотонної кривої. Максимальна абсолютна похибка з якою обвід замінює монотонну криву лінію склала 0,2620 мм на ділянці 8...9.

На рис. 8 зображено кубічний неперіодичний В-сплайн сформований в САД-системі SolidWorks, що інтерполює точковий ряд, характеристики якого представлені в таблиці 1. Сплайн складається з 9 сегментів, конфігурацію яких визначають 12 точок. Графік зміни вздовж сплайну значень кривини, сформований за допомогою функцій САД-системи, дозволяє визначити наявність у нього особливих точок.

Ділянка сплайну 9...10 містить точку перегину, а ділянки 1...2, 2...3, 3...4, 4...5, 5...6 сумарно містять сім точок із екстремальним значенням кривини.

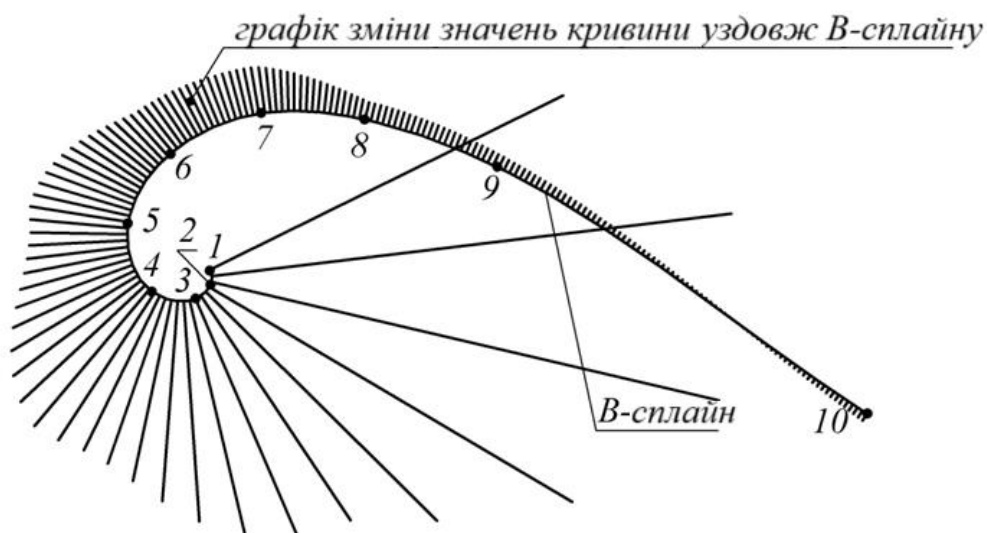


Рис. 8. В-сплайн, заданий координатами вихідних точок

Після накладання умови дотичності у вихідних точках з монотонною кривою лінією, характеристики області розташування якої наведені в таблиці 3, отримано сплайн, зображений на рис. 9. Виконання умови дотичності з одинадцятьма зафіксованими прямими лініями вимагає збільшення параметричного числа сплайну за рахунок збільшення кількості його сегментів. Отриманий В-сплайн складається з 14 сегментів, конфігурацію яких визначають 16 точок.

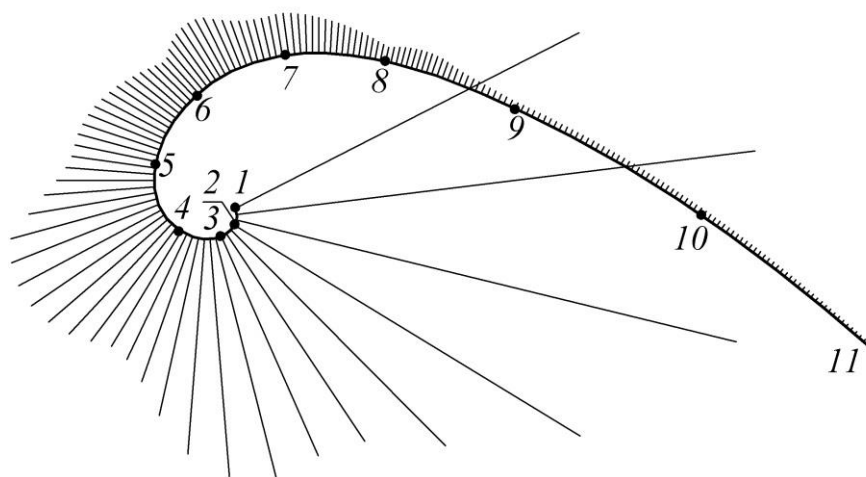


Рис. 9. В-сплайн, заданий координатами вихідних точок та дотичністю з монотонною кривою

В-сплайн є опуклою кривою лінією, що містить тринадцять точок з екстремальним значенням кривини. На ділянках, що містять особливі точки, сплайн розташований за межами області можливого розташування монотонної кривої лінії, максимальне відхилення від якої склало 0,1182 мм на ділянці 3...4. На ділянках 2...3, 5...6, 7...8, , 9...10, , 10...11, де значення кривини змінюються монотонно, сплайн розташований всередині області розташування відповідних ділянок монотонної кривої.

В результаті коригування конфігурації B-сплайну з використанням інструментів САD-системи SolidWorks «елемент управління додаванням дотичності», «елемент управління додаванням кривини» та «маркери сплайну» вдалося досягти відсутності особливих точок не більше ніж на чотирьох послідовних частинах сплайну.

Висновки та перспективи. У роботі вирішено задачу формування гладкого обводу, який інтерполює точковий ряд та із заданою точністю представляє монотонну криву лінію. Для розв'язання поставленої задачі розроблено способи:

- формування області можливого розташування монотонної кривої лінії, що інтерполює заданий точковий ряд, ширина якої не перевищує задану величину;
- формування гладкого обводу, що складається з ділянок аналітично заданих ліній, який розташований всередині області розташування монотонної кривої лінії.

Область можливого розташування монотонної кривої лінії формується з замкнених контурів, які стикаються у вихідних точках. Всі монотонні лінії, що інтерполюють точковий ряд, розташовуються всередині області. Розроблений спосіб забезпечує скільки завгодно малу ширину області, яка визначається максимально можливою відстанню між лініями із заданими характеристиками, за рахунок призначення для вихідного точкового ряду проміжних точок.

Розроблений спосіб формування обводу всередині області розташування монотонної кривої лінії гарантує її заміну обводом з похибкою, яка перевищує ширину області.

Можливості запропонованого методу досліджені під час розв'язання задачі інтерполяції точкового ряду, що складається з 10 точок, з використанням САD-системи SolidWorks. В результаті рішення тестового прикладу встановлено:

- мінімальну з можливих похибок інтерполяції забезпечує обвід уздовж якого значення кривини змінюються монотонно і який у вихідних точках має спільні дотичні з монотонною кривою. Запропонований у роботі спосіб формування обводу дугами кіл забезпечує виконання зазначених вимог;
- при формуванні обводу B-сплайном його розташування всередині області можливого розташування монотонної кривої лінії не забезпечується. Причиною є неконтрольоване виникнення точок, в яких екстремальні значення кривини. Ті самі проблеми виникають при формуванні обводу іншими кривими лініями, які використовуються САD-системою SolidWorks – параболою та еліпсом. Похибка інтерполяції обводом, що складається з ділянок парабол, еліпсів, B-сплайну можна оцінювати шириною області розташування опуклої кривої лінії, що

інтерполює точковий ряд, яка в 10-100 разів перевищує ширину області можливого розташування монотонної кривої лінії

Основна сфера використання розробленого методу – моделювання лінійних елементів каркасів поверхонь з підвищеними аеро- та гідродинамічними властивостями, у тому числі з використанням технології реверс-інжинірингу.

Література

1. *Hosseini S. F., Moetakef-Imani B.* Innovative approach to computer-aided design of horizontal axis wind turbine blades. *Journal of Computational Design and Engineering.* 2016. Vol. 4, no. 2. P. 98–105. DOI: 10.1016/j.jcde.2016.11.001
2. *Peng Y. H., Yin Z. W.* The algorithms for trimmed surfaces construction and tool path generation in reverse engineering. *Computers & Industrial Engineering.* 2008. Vol. 54, no. 3. P. 624–633. DOI: 10.1016/j.cie.2007.09.012
3. *Fooladi M., Foroud A. A.* Recognition and assessment of different factors which affect flicker in wind turbine. *IET Renewable Power Generation.* 2016. Vol. 10, no. 2. P. 250-259. DOI: 10.1049/iet-rpg.2014.0419
4. *Havrylenko Y., Cortez J., Kholodniak Y., Aliksieieva H., Garcia G.* Modelling of Surfaces of Engineering Products on the Basis of Array of Points. *Tehnicki vjesnik - Technical Gazette.* 2020. Vol. 27, no. 6. DOI:10.17559/tv-20190720081227
5. *Czerech L., Kaczyski R., Werner A.* Machining error compensation for objects bounded by curvilinear surfaces. *Acta Mechanica et Automatica.* 2012. Vol. 6, no. 1. P. 26-30.
6. *Chekalin A. A., Reshetnikov M. K., Shpilev V. V., Borodulina S. V.* Design of Engineering Surfaces Using Quartic Parabolas. *IOP Conference Series- Materials Science and Engineering.* 2007. Vol. 221. 012015. DOI: 10.1088/1757-899X/221/1/012015
7. *Saund E.* Identifying Salient Circular Arcs on Curves. *Computer Vision and Image Understanding.* 1993. Vol. 58, iss. 3. P. 327-337. DOI: 10.1006/ciun.1993.1045
8. *Schomberg K., Olsen J., Doig G.* Design of High-Area-Ratio Nozzle Contours Using Circular Arcs. *Journal of Propulsion and Power.* 2016. Vol. 32, no. 1. P. 188–195. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.b35640>
9. *Okaniwa Sh., Nasri A., Lin H., Abbas A., Kineri Yu., Maekawa T.* Uniform B-Spline Curve Interpolation with Prescribed Tangent and Curvature Vectors. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics.* 2012. Vol. 18, no. 9. P. 1474–1487. DOI: 10.1109/tvcg.2011.262
10. *Shen W., Wang G., Huang F.* Direction monotonicity for a rational Bézier curve. *Applied Mathematics -A Journal of Chinese Universities.* 2016. Vol. 31, no. 1. P. 1–20. DOI: 10.1007/s11766-016-3399-7

11. Peng L., Zuqing Y., Liang D., Nianli L. Integration of non-uniform Rational B-splines geometry and rational absolute nodal coordinates formulation finite element analysis. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2014. Vol. 27, no. 5. P. 486–495. DOI: 10.1016/s0894-9166(14)60057-4
12. Farin G., Rein G., Sapidis N., Worsey A. Fairing cubic B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*. 1987. Vol. 4, no 1–2, P. 91-103. DOI: 10.1016/0167-8396(87)90027-6
13. Холодняк Ю.В. Гавриленко Є.А. Мірошниченко М.Ю. Алгоритм формування моделей технічних виробів при реверс-інжинірингу. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2022. Вип. 103. С. 38-54. DOI: 10.32347/0131-579X.2022.103.38-54
14. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Vershkov O., Naidysh A. Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 1, no. 4. P. 76-82. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.123921

References

1. Hosseini S. F., Moetakef-Imani B. (2016) Innovative approach to computer-aided design of horizontal axis wind turbine blades. *Journal of Computational Design and Engineering*. Vol. 4, no. 2. P. 98–105. DOI: 10.1016/j.jcde.2016.11.001 {in English}
2. Peng Y. H., Yin Z. W. (2008) The algorithms for trimmed surfaces construction and tool path generation in reverse engineering. *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 54, no. 3. P. 624–633. DOI: 10.1016/j.cie.2007.09.012 {in English}
3. Farhad Hosseini S., Moetakef-Imani B. (2017) Innovative approach to computer-aided design of horizontal axis wind turbine blades. *Journal of Computational Design and Engineering*. Vol.4, Iss. 2. P. 98-105. DOI: 10.1016/j.jcde.2016.11.001 {in English}
4. Havrylenko Y., Cortez J., Kholodniak Y., Aliksieieva H., Garcia G. (2020) Modelling of Surfaces of Engineering Products on the Basis of Array of Points. *Tehnicki vjesnik - Technical Gazette*. Vol. 27, no. 6. DOI:10.17559/tv-20190720081227 {in English}
5. Czerech L., Kaczyski R., Werner A. (2012) Machining error compensation for objects bounded by curvilinear surfaces. *Acta Mechanica et Automatica*. Vol. 6, no. 1. P. 26-30. {in English}
6. Chekalin A. A., Reshetnikov M. K., Shpilev V. V., Borodulina S. V. (2007) Design of Engineering Surfaces Using Quartic Parabolas. *IOP Conference Series-Materials Science and Engineering*. Vol. 221. 012015. DOI: 10.1088/1757-899X/221/1/012015. {in English}
7. Saund E. (1993) Identifying Salient Circular Arcs on Curves. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 58, iss. 3. P. 327-337. DOI: 10.1006/ciun.1993.1045. {in English}

8. Schomberg K., Olsen J., Doig G. (2016) Design of High-Area-Ratio Nozzle Contours Using Circular Arcs. *Journal of Propulsion and Power*. Vol. 32, no. 1. P. 188–195. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.b35640>. {in English}
9. Okaniwa Sh., Nasri A., Lin H., Abbas A., Kineri Yu., Maekawa T. (2012) Uniform B-Spline Curve Interpolation with Prescribed Tangent and Curvature Vectors. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. Vol. 18, no. 9. P. 1474–1487. DOI: 10.1109/tvcg.2011.262. {in English}
10. Shen W., Wang G., Huang F. (2016) Direction monotonicity for a rational Bézier curve. *Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities*. Vol. 31, no. 1. P. 1–20. DOI: 10.1007/s11766-016-3399-7/. {in English}
11. Peng L., Zuqing Y., Liang D., Nianli L. (2014) Integration of non-uniform Rational B-splines geometry and rational absolute nodal coordinates formulation finite element analysis. *Acta Mechanica Solida Sinica*. Vol. 27, no. 5. P. 486–495. DOI: 10.1016/s0894-9166(14)60057-4. {in English}
12. Farin G., Rein G., Sapidis N., Worsey A. (1987) Fairing cubic B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 4, no 1–2, P. 91-103. DOI: 10.1016/0167-8396(87)90027-6. {in English}
13. Kholodniak Yu.V. Havrylenko Ye.A. Miroshnychenko M.Yu. (2022) Alhorytm formuvannia modelei tekhnichnykh vyrobiv pry revers-inzhynirynhu. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Kyiv .: KNUBA, 2022. Vol. 103. P. 38-54. DOI: 10.32347/0131-579X.2022.103.38-54 {in Ukrainian}
14. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Vershkov O., Naidysh A. (2018) Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Vol. 1, no. 4. P. 76-82. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.123921. {in English}

Ph. D., prof **Yevhen Havrylenko**,

yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4501-445X

Ph. D., assoc. prof **Yuliia Kholodniak**,

yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8966-9269

Illia Tetervak

illia.tetervak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0009-0009-0616-8983

Dmytro Motorny Tavria State Agrotechnological University (TSATU)

METHOD OF INTERPOLATION OF POINT SET FOR THE FORMATION OF SMOOTH CONTOURS

The formation of complex functional surfaces given by an array of points is an actual task of geometric modeling. The geometric model of such a surface is formed on the basis of a discrete linear frame, the elements of which are contours consisting of sections of analytically determined curves lines. The

paper solves the problem of modeling a smooth contour that represents the original curve with a given accuracy, interpolates the original point series and belongs to the line curve that does not contain special points. The contour is formed inside the area of the possible location of the parts of the interpolating curve, along which the values of the curvature monotonically increase or decrease. The method of determining the area of the location of the curve is based on the assignment of the positions of the tangent lines and the curvature values at the given points within the ranges, which guarantee the possibility of interpolation of the point series by a curve with the specified characteristics. All curved lines that meet the conditions of the problem cannot be located outside the specified area. The absolute error of the interpolation of the point set is estimated by the width of the area of the possible location of the curve. If the interpolation error of the original point set turns out to be greater than the specified value, then the width of the area of the curve is reduced due to the assignment of the corresponding intermediate points. As a result of assigning each intermediate point, we get the location areas of two new sections of the curve, which are inside the location area of the corresponding original section. After the interpolation error becomes smaller than the given value, the area of the curved line is considered to be formed, and the obtained point series is interpolated by the contour that is inside this area. The possibility of forming contours with given characteristics by sections of a circle and B-spline has been investigated.

Keywords: monotonic curve; tangent circle; adjacent circle; curve area; contour.