

д. т. н., професор **Ковальов С. М.**,  
kovalov.sm@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7713-1768  
д. т. н., професор **Мостовенко Олександр В.**,  
mostovenko.ov@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-3423-4126  
асистент **Мостовенко Олексій В.**,  
mostovenko.ov2@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1844-1843

Київський національний університет будівництва і архітектури

## **ФОРМУВАННЯ ТРИАНГУЛЯЦІЙНОЇ СІТКИ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Дане дослідження присвячено розвитку методології прикладної геометрії та її інструментарію у напрямку створення геометричного апарата для формування дискретних каркасів поверхонь, що формуються під дією нормального до поверхні зовнішнього навантаження. За основу формування таких поверхонь прийнято статико-геометричний метод [1]. Цей метод є своєрідною наочною інтерпретацією методу скінчених різниць на основі опису статичної рівноваги вузлів дискретної сітки, що формується під дією зовнішнього навантаження на вузли сітки. Внутрішні зусилля у в'язях сітки, які врівноважують зовнішнє навантаження, вважаються пропорційними довжинам відповідних в'язей, що дозволяє описувати врівноважену сітку системою лінійних рівнянь.*

*Проектування конструкцій великопрогонних покриттів архітектурних споруд в наш час залишається актуальною задачею. Серед таких покриттів особливе місце займають такі, форма яких не може бути задана довільно, а утворюється під дією певного зовнішнього навантаження, зокрема форма пневматичних оболонок низького тиску утворюється під дією збиткового внутрішнього тиску. Такі поверхні можуть бути представлені тільки у дискретному вигляді.*

*У даному дослідженні напрям зусилля нормального зовнішнього навантаження, що діє на довільний вузол дискретно представлені поверхні (ДПП), визначається як перпендикуляр до площини, дотичної до дискретно представлені поверхні у цьому вузлі.*

*У роботі наведено алгоритм формування дискретно представлені поверхні під дією нормального навантаження. Складові даного алгоритму виглядають наступним чином: задаються вихідні параметри дискретно представлені поверхні; задається розподіл нормальних зусиль між вузлами сітки; задаються або визначаються координати всіх вузлів вихідного наближення сітки; визначаються коефіцієнти  $A$ ,  $B$ ,  $C$  двох площин, що сполучають відповідні вузли зірки сітки, для всіх внутрішніх вузлів сітки; визначаються параметри зусиль нормального навантаження у кожному*

*внутрішньому вузлі сітки; визначаються координатні складові вектора зусилля, прикладеного до вузла сітки; складається та розв'язується система рівнянь рівноваги вузлів сітки чергового наближення, де невідомими є координати внутрішніх вузлів сітки та зусилля; визначені координати порівнюються з координатами попереднього наближення. Ітераційний процес закінчується, якщо різниця між координатами поточного і попереднього наближення не перевищує допустимої похибки. У протилежному випадку ітераційний процес продовжується, починаючи з пункту 4.*

*Ключові слова: дискретна сітка; дискретно представлена поверхня; нормальне навантаження; дискретний каркас; триангуляційна сітка.*

**Постановка проблеми.** Проектування конструкцій великопрогонних покриттів архітектурних споруд в наш час залишається актуальною задачею. Серед таких покриттів особливе місце займають такі, форма яких не може бути задана довільно, а утворюється під дією певного зовнішнього навантаження, зокрема форма пневматичних оболонок низького тиску утворюється під дією збиткового внутрішнього тиску. Такі поверхні можуть бути представлені тільки у дискретному вигляді.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Існує багато публікацій, пов'язаних з формуванням дискретних каркасів поверхонь врівноважених сіток, що утворюються під дією зовнішнього навантаження [1-7].

У роботі [3] запропоновано узагальнення статико-геометричного методу, зокрема розглянуто формування дискретних каркасів поверхонь підводних споруд під дією тиску води у вигляді сітки з чотирикутними клітинами. Автор моделює поверхню з урахуванням того, що розподіл зовнішнього навантаження між вузлами сітки відповідає реальному фізичному розподілу збиткового внутрішнього або зовнішнього тиску. У роботі представлено алгоритми побудови безмоментних оболонок під дією нормальних до поверхні векторів зовнішніх зусиль у вузлах дискретної сітки. У роботах [6, 7] розглянуто формування дискретних каркасів одновимірних та двовимірних структур, які моделюють тектонічні конструкції. У роботах [4, 5] наведено способи керування формою дискретно визначених поверхонь, що мають заданий об'єм. У багатьох дослідженнях розглянуто утворення дискретних каркасів поверхонь за різними заданими умовами.

В основі перелічених досліджень лежить статико-геометричний метод формування дискретних каркасів поверхонь [1].

**Ціль статті.** Запропонувати геометричний апарат формування дискретних каркасів поверхонь, з клітинами трикутної форми, під дією нормального до поверхні навантаження.

**Основна частина.** Напрямок зусилля нормального зовнішнього навантаження, що діє на довільний вузол ДПП, визначається як

перпендикуляр до площини, дотичної до ДПП у цьому вузлі. Дотична площина повинна бути паралельною площині, що проходить через навколишні вузли  $E, F, G, H, J$  і  $K$  (рис. 1) зірки сітки, але ці навколишні вузли не лежать в одній площині. Тому нормаль  $n$  визначається як бісектриса кута, що утворюється нормаллями  $n'$  і  $n''$  відповідно до площин  $KFH$  і  $EGJ$ . Для побудови бісектриси  $n$  на нормаллях  $n'$  і  $n''$  відкладаються від точки  $M$  однакові відрізки  $ML=MN=a$ . Середина  $R$  відрізка  $NL$  разом з вузлом  $M$  визначають шукану нормаль  $n$ .

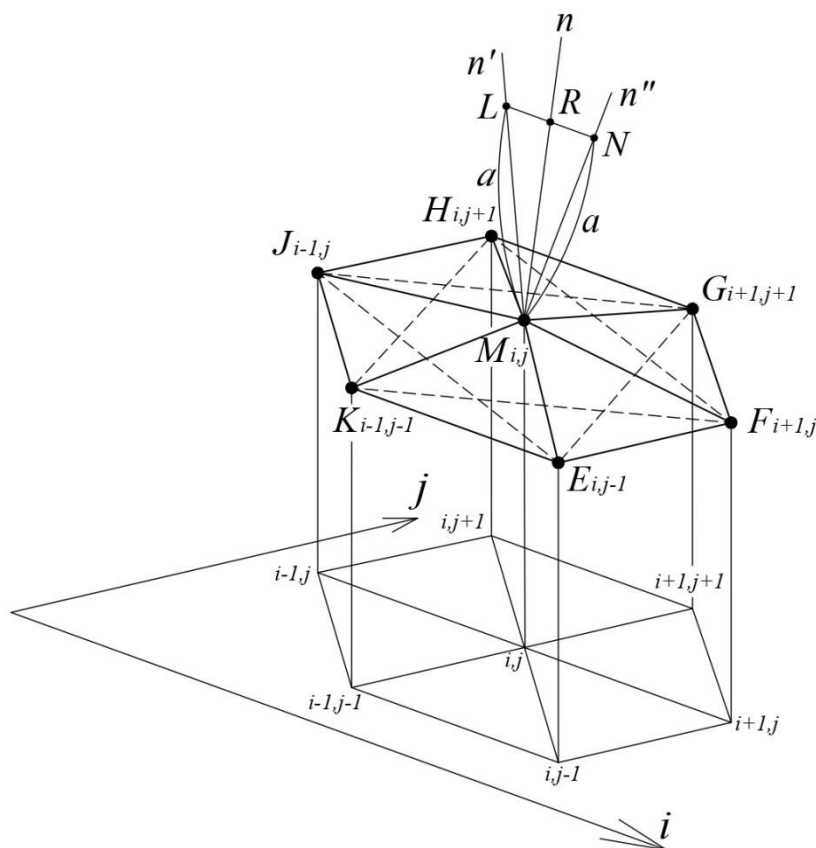


Рис. 1

Площина  $KFH$  має рівняння:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (1)$$

де:

$$A_1 = \begin{vmatrix} y_K & y_F & y_H \\ z_K & z_F & z_H \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad B_1 = \begin{vmatrix} z_K & z_F & z_H \\ x_K & x_F & x_H \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad C_1 = \begin{vmatrix} x_K & x_F & x_H \\ y_K & y_F & y_H \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Перпендикуляр  $n'$  до площини  $KFH$  має рівняння:

$$\frac{x - x_M}{A_1} = \frac{y - y_M}{B_1} = \frac{z - z_M}{C_1}. \quad (3)$$

Рівняння площини  $EGJ$ :

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (4)$$

де:

$$A_2 = \begin{vmatrix} y_E & y_G & y_J \\ z_E & z_G & z_J \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad B_2 = \begin{vmatrix} z_E & z_G & z_J \\ x_E & x_G & x_J \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad C_2 = \begin{vmatrix} x_E & x_G & x_J \\ y_E & y_G & y_J \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Рівняння перпендикуляра  $n''$  до площини  $EGJ$ :

$$\frac{x - x_M}{A_2} = \frac{y - y_M}{B_2} = \frac{z - z_M}{C_2}. \quad (6)$$

Рівняння бісектриси  $n$  кута між перпендикулярами  $n'$  і  $n''$  визначається як пряма, що проходить через точки  $M$  і  $R$ :

$$\begin{aligned} & \frac{x - x_M}{A_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} + A_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \\ & = \frac{y - y_M}{B_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} + B_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \\ & = \frac{z - z_M}{C_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} + C_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Довжина вектора  $P$  зусилля зовнішнього навантаження у вузлі  $M$  дорівнює:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \quad (8)$$

Координатні складові зусилля  $P$  визначаються при сумісному розв'язанні (7) і (8), вважаючи в (7)  $x - x_M = P_x$ ;  $y - y_M = P_y$ ;  $z - z_M = P_z$ :

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{U \cdot P}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}; \\ P_y &= \frac{V \cdot P}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}; \\ P_z &= \frac{W \cdot P}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

де:  $P$  – задана довжина вектора нормального зусилля у вузлі  $M$ ;

$$U = A_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} + A_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}; \quad (10)$$

$$V = B_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} + B_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2};$$

$$W = C_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} + C_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \quad \text{– параметри, що}$$

враховують нахил вектора зусилля у довільному вузлі  $M_{i,j}$  до координатних площин.

$$\text{Якщо } Px_{i,j} = kx_{i,j}; Py_{i,j} = ky_{i,j}; Pz_{i,j} = kz_{i,j},$$

то

$$kx_{i,j} = \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}; ky_{i,j} = \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}; kz_{i,j} = \frac{W}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} \quad (11)$$

Нові координати вузлів сітки у черговому наближенні визначаються при розв'язанні системи рівнянь рівноваги вузлів:

$$\begin{aligned} x_{i-1,j} + x_{i-1,j+1} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j} + x_{i+1,j-1} + x_{i,j-1} - 6x_{i,j} + k_{i,j}Px_{i,j} &= 0 \\ y_{i-1,j} + y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j} + y_{i+1,j-1} + y_{i,j-1} - 6y_{i,j} + k_{i,j}Py_{i,j} &= 0 \\ z_{i-1,j} + z_{i-1,j+1} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j} + z_{i+1,j-1} + z_{i,j-1} - 6z_{i,j} + k_{i,j}Pz_{i,j} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Алгоритм формування ДПП під дією нормального навантаження виглядає наступним чином:

1. Задаються вихідні параметри ДПП (топологічна схема сітки, вузли опорного контура та координати одного з внутрішніх вузлів);
2. Задається розподіл нормальних зусиль між вузлами сітки (нормальне навантаження може бути однаковим в усіх вузлах або функціонально залежним від координат вузлів сітки);
3. Задаються або визначаються координати всіх вузлів вихідного наближення сітки;
4. За формулами (2) і (5) визначаються коефіцієнти  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  площин  $KFH$  і  $EGJ$  для всіх внутрішніх вузлів сітки;
5. За формулами (10) визначаються параметри  $U, V, W$  зусиль нормального навантаження у кожному внутрішньому вузлі сітки;
6. За формулами (11) визначаються коефіцієнти  $kx_{i,j}, ky_{i,j}, kz_{i,j}$ ;
7. Складається та розв'язується система (12) рівнянь рівноваги вузлів сітки чергового наближення, де невідомими є координати внутрішніх вузлів сітки та зусилля  $P_{i,j}$ ;
8. Визначені координати порівнюються з координатами попереднього наближення. Ітераційний процес закінчується, якщо різниця між координатами поточного і попереднього наближення не перевищує допустимої похибки  $\sigma \leq 0,001$ . У протилежному випадку ітераційний процес продовжується, починаючи з пункту 4.

**Приклад.** Задано топологічну схему сітки (рис. 2), опорний контур у вигляді кола  $x^2 + y^2 = 16$ , апліката центрального вузла  $z_{00} = 4$  і допустима похибка при обчисленні координат вузлів  $\sigma \leq 0,001$ .

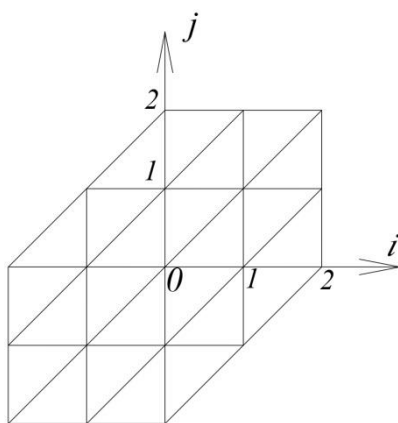


Рис. 2. Топологічна схема сітки

За наведеним алгоритмом підраховано координати вузлів сітки. У таблиці наведено координати  $\frac{1}{4}$  частини симетричної сітки, яку показано на рис. 3.

Таблиця

Координати вузлів сітки

	$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$Z$
$j=2$	-2	3.464	0	0	4	0	2	3.464	0
$j=1$	-1.757	3.043	2.495	1.757	3.043	2.497	3.464	2	0
$j=0$	0	0	4	3.514	0	2.495	4	0	0
	$i=0$			$i=1$			$i=2$		

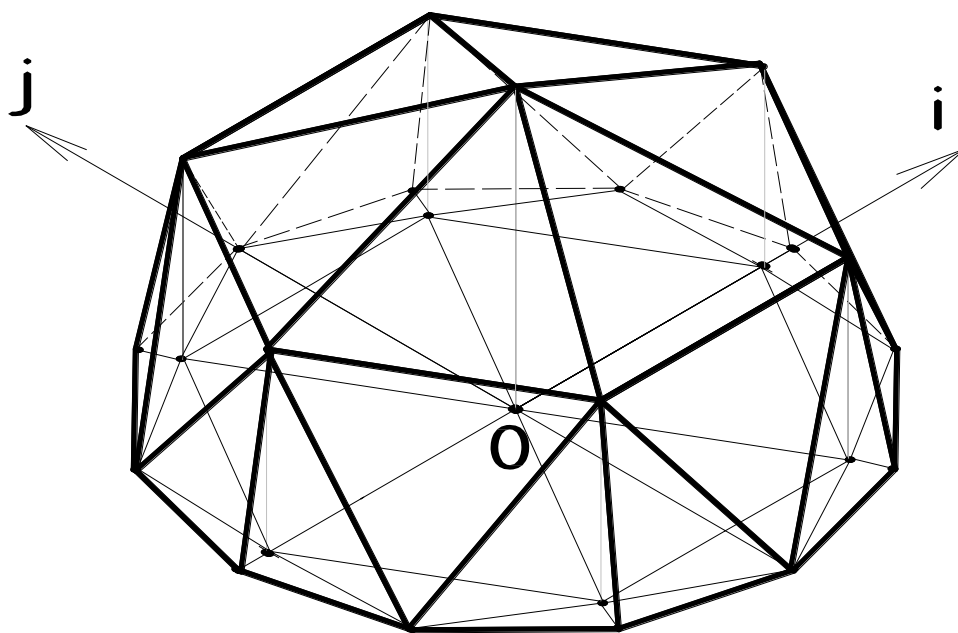


Рис. 3. Змодельована поверхня

**Висновки та перспективи.** Результатом дослідження є розроблений геометричний апарат для формування дискретних каркасів поверхонь з трикутними клітинами під дією нормального до поверхні навантаження.

### Література

1. *Kovalyov S.N.* Discrete geometry of curves and surfaces. *The 10TH International Conference on Geometry and Graphics*. Volume 1. 2002. Kyiv, Ukraine. P. 132-133.
2. *Вязанкін В.О., Ковальов С.М.* Прикладна геометрія та геометрична статика. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2007. Вип. 78. С. 41-43.
3. *Ботвіновська С.І.* Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об'єктів архітектури та дизайну : автореф. ... д-ра техн. наук : 05.01.01 Київ : КНУБА, 2018. 43с.
4. *Мостовенко О.В.* Управління формою дискретної сітки з симетричним опорним контуром при заданому об'ємі, що перекривається. *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці*. Таврійський агротехнологічний університет. Мелітополь: ТДАТУ, 2013. Вип.4, Т. 57. С. 156-163.
5. *Мостовенко О.В., Ковальов С.М.* Дискретне моделювання поверхонь, що перекривають заданий об'єм на квадратному плані. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: зб. наук. праць. Вип. 85. Київ : КНУБА, 2010. С. 29–35.
6. *Мостовенко Олексій В., Ковальов С.М., Мостовенко Олександр В.* Дискретне моделювання тектонічних покриттів архітектурних споруд у вигляді триангуляційної сітки. *International periodic scientific journal. Modern engineering and innovative technologies*. Issue No32. Part 1. April 2024. P. 135-144. <https://doi.org/10.30890/2567-5273.2024-32-00-080>
7. *Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.М.* Формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних покриттів при рівномірному розподілі навантаження у плані. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко. Київ :КНУБА, 2011р.Випуск 87. 490с. С 149-154.

### References

1. *Kovalyov S.N.* Discrete geometry of curves and surfaces. *The 10TH International Conference on Geometry and Graphics*. Volume 1. 2002. Kyiv, Ukraine. P. 132-133. {in English}

2. *Viazankin V.O., Kovalov S.M.* Prykladna heometriia ta heometrychna statyka. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Kyiv : KNUBA, 2007. № 78. S. 41-43. {in Ukrainian}
3. *Botvinovska S.I.* Teoretychni osnovy formoutvorennia v dyskretnomu modeliuvanni obiektiv arkhitektury ta dyzainu: avtoref. ... d-ra tekhnichnykh nauk: 05.01.01 KHM : KNUBA, 2018. 43 s. {in Ukrainian}
4. *Mostovenko O.V.* Upravlinnia formoiu dyskretnoi sitky z symetrychnym opornym konturom pry zadanomu obiemi, shcho perekryvaietsia. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Pratsi*. Tavriiskyi ahrotekhnolohichni universytet. Melitopol : TDATU, 2013. Vyp.4, T.57. S. 156-163. {in Ukrainian}
5. *Mostovenko O.V., Kovalov S.M.* Dyskretne modeliuvannia poverkhon, shcho perekryvaiut zadanyi obiem na kvadratnomu plani. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika: zb. nauk. prats.* Vyp. 85. Kyiv : KNUBA, 2010. S. 29–35. {in Ukrainian}
6. *Mostovenko Oleksii V., Kovalov S.M., Mostovenko Oleksandr V.* Dyskretne modeliuvannia tektonichnykh pokryttiv arkhitekturnykh sporud u vyhliadi trianhuliatsiinoi sitky. *International periodic scientific journal. Modern engineering and innovative technologies*. Indexed in INDEX COPERNICUS high impact factor (ICV: 84.86). Issue No32. Part 1 April 2024. P. 135-144/<https://doi.org/10.30890/2567-5273.2024-32-00-080>
7. *Mostovenko Ol-y V., Kovalov S.M.* Formuvannia dyskretnykh karkasiv poverkhon bezmomentnykh pokryttiv pry rivnomirnomu rozpodili navantazhennia u plani. *Mizhvidomchyi naukovo-tekhnichniy zbirnyk «Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika»*. Vidpovidalnyi redaktor V.Ie. Mykhailenko. Vyp. 87. Kyiv :KNUBA, 2011. 490s. S 149-154.

UDC 514.18

Doctor of Engineering, Professor **Kovalov S. M.**,  
 kovalov.sm@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7713-1768  
 Doctor of Engineering, Professor **Mostovenko Oleksandr V.**,  
 mostovenko.ov@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-3423-4126  
 Assistant **Mostovenko Oleksiy V.**,  
 mostovenko.ov2@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-1844-1843

Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture

## **FORMATION OF A TRIANGULATE MESH UNDER THE ACTION OF A NORMAL EXTERNAL LOAD**

*This study is devoted to the development of the methodology of applied geometry and its tools in the direction of creating a geometric apparatus for forming discrete frames of surfaces formed under the action of an external load*



*normal to the surface. The basis for the formation of such surfaces is the static-geometric method [1]. This method is a kind of visual interpretation of the finite difference method based on the description of the static equilibrium of the nodes of a discrete mesh formed under the action of an external load on the mesh nodes. The internal forces in the mesh links that balance the external load are considered proportional to the lengths of the corresponding links, which allows describing the balanced mesh by a system of linear equations.*

*Designing structures of long-span coverings of architectural structures remains an urgent task in our time. Among such coverings, a special place is occupied by those whose shape cannot be set arbitrarily, but is formed under the action of a certain external load, in particular, the shape of low-pressure pneumatic shells is formed under the action of negative internal pressure. Such surfaces can be represented only in a discrete form.*

*In this study, the direction of the force of the normal external load acting on an arbitrary node of a discretely represented surface (DSP) is defined as perpendicular to the plane tangent to the discretely represented surface at this node.*

*The work presents an algorithm for forming a discretely represented surface under the action of a normal load. The components of this algorithm look as follows: the initial parameters of the discretely represented surface are given; the distribution of normal forces between the nodes of the grid is given; the coordinates of all nodes of the initial approximation of the grid are given or determined; the coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  of two planes connecting the corresponding nodes of the grid star are determined for all internal nodes of the grid; the parameters of the normal load forces at each internal grid node are determined; the coordinate components of the force vector applied to the grid node are determined; a system of equilibrium equations of the grid nodes of the next approximation is constructed and solved, where the coordinates of the internal grid nodes and the forces are unknown; the determined coordinates are compared with the coordinates of the previous approximation. The iterative process ends if the difference between the coordinates of the current and previous approximations does not exceed the permissible error. Otherwise, the iterative process continues, starting from point 4.*

*Keywords: discrete grid; discretely represented surface; normal load; discrete frame; triangulation.*