УДК 517.929

Бондаренко Н.В., к.ф.-м.н., доцент
Печук В.Д.

Київський національний університет будівництва і архітектури

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ ЗА ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНИХ МЕТОДІВ РУНГЕ-КУТТИ

Розглядається система диференціальних рівнянь з декількома змінними запізнюваннями, що є математичною моделлю багатьох технічних процесів з запізнюванням у часі. Для даних систем отримано узагальнення методів Рунге-Кутти та встановлено його апроксимаційні властивості.

Ключові слова: Системи диференціальних рівнянь з запізнюванням, методи Рунге-Кутти, чисельні методи, екстраполяція.

Постановка проблеми. Останнім часом спостерігається великий інтерес до динамічних систем, що мають запізнювання у часі. Динамічні процеси пов’язані з передачею маси, енергії, інформації супроводжуються наявністю запізнювання. Таке запізнювання може бути обумовлене різними причинами – обмеженістю швидкості поширення взаємодії, наявністю інерційності деяких елементів, обмеженістю протікання технологічних процесів та інше.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Факторами запізнювання не можна нехтувати в інженерних дослідженнях при розгляді великих за розміром механічних систем і навпаки в наносистемах теплообміну. Так процес поширення тепла в дуже малих системах не може бути коректно описаний звичайним рівнянням теплопровідності, оскільки воно отримане за припущення нескінченно великої швидкості розповсюдження тепла і дифузійного характеру розповсюдження носіїв тепла. В малих системах це не виконується, тому потрібно враховувати запізнювання дифузійного транспорту і балістичний характер розповсюдження тепла, що приводить до систем диференціальних рівнянь з запізнюванням [3, 4].

У багатьох випадках складних фізико або фізико-механічних процесів написання чіткої математичної моделі викликає великі труднощі. Тоді доводиться для опису впливу деяких факторів вважати, що від впливу до чіткого наслідку проходить деякий проміжок часу – запізнюванням, що приводить до систем диференціальних рівнянь з запізнюванням [7].

Основна частина. Математична модель динамічних процесів з запізнюванням описується диференціальним рівнянням з запізнюванням або в більш складних випадках системою диференціальних рівнянь з запізнюванням.

Найпростіше диференціальне рівняння з одним сталим запізнюванням $\tau > 0$ має вигляд

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(t, y(t), y(t-\tau)) \qquad (1)$$

де $F : R^3 \to R$ – деяка функція.

Задача Коші полягає в відшуканні неперервного розв'язку $y(t)$ рівняння (1) при $t > t_0$, за умови, що $y(t) = \varphi(t)$ при $t_0 - \tau \le t \le t_0$, де $\varphi(t)$ – задана неперервна функція. Відрізок $[t_0 - \tau; t_0]$, на якому задана початкова функція $\varphi(t)$, називається початковою множиною і позначається E_{t_0}.

Число τ визначає величину наслідків. Якщо $\tau = 0$, тобто післядія відсутня, то рівняння (1) перетворюється в звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(t, y(t). \qquad (2)$$

У рівнянні (2) швидкість динамічних процесів визначається станом системи в заданий момент часу t, тобто в математичній моделі (2) не враховується залежність швидкості динамічних процесів від стану системи в момент часу, що передує t. Врахування цієї залежності, тобто властивостей пам'яті і спадковості динамічної системи, післядія в законі взаємодії в динамічній системі приводить до рівняння (1).

Якщо в рівнянні (1) і в початкових умовах $y(t)$, F і $\varphi(t)$ вважати вектор-функціями, то ми отримаємо постановку задачі Коші для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням.

В загальному випадку запізнювання можуть змінюватися з плином часом, тобто $\tau = \tau(t) \ge 0$. У випадку змінного запізнювання $\tau = \tau(t)$ в рівнянні (1) необхідно знайти розв'язок цього рівняння при $t > t_0$. На початковій множині E_{t_0}, яка складається з точки t_0 і з тих значень $t - \tau(t)$, які менші за t_0 при $t \ge t_0$, $y(t) \equiv \varphi(t)$.

Дослідженню розв'язків різного типу диференціальних рівнянь та систем з запізнюванням присвячено багато робіт різних авторів [1], [2], [5], [6], [7]. При дослідженні математичних моделей з запізнюванням використовують чисельні методи, методи усереднення та метод розкладу в ряд Тейлора по запізнюванню.

Системи диференціальних рівнянь зі змінним запізнюванням

Ми розглядаємо узагальнену систему диференціальних рівнянь зі скінченною кількістю змінних запізнювань:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t), y\left(t-\tau_1(t)\right), ..., y\left(t-\tau_m(t)\right)\right), \tag{3}$$

де $y(t) = \left(y^2(t), ..., y^n(t)\right)$, $f = \left(f^2, ..., f^n\right)$ – вектор-функції.

Початкова умова:

$$y(t) = \varphi(t),\ t \in \left[t^0 - D,\ t^0\right], \text{ де } \varphi(t) = \left(\varphi^2(t), ..., \varphi^n(t)\right). \tag{4}$$

Функції $\tau_1(t), .., \tau_m(t)$ задовольняють умові:

$$d \le \tau_1(t) \le D, .., d \le \tau_m(t) \le D,\ t \ge t^0, \tag{5}$$

де $d > 0, D \ge d$ – деякі сталі.

Теореми існування і єдиності розв'язку для задачі Коші (3)–(4) за умови (5) аналогічні теоремам існування і єдиності розв'язку задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь [8], [9].

Система диференціальних рівнянь з одним сталим запізнюванням розглядалася в роботі [11]. Для дослідження такої системи використані методи Рунге-Кутти. Ми узагальнимо методи Рунге-Кутти для випадку систем зі скінченною кількістю змінних запізнювань.

Позначимо $\tilde{y}(t) = y(t),\ t \in [\,t_0 - D,\ t_0]$. Нехай $\tilde{y}$ – відома функція, тобто відомий розв'язок до деякого моменту часу t_0, $t_0 \ge t^0$. Тоді враховуючи (5) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= f\left(t, y(t), y\left(t-\tau_1(t)\right), ..., y\left(t-\tau_m(t)\right)\right) = \\ &= f\left(t, y(t), \tilde{y}\left(t-\tau_1(t)\right), ..., \tilde{y}\left(t-\tau_m(t)\right)\right) = \\ &= \tilde{f}\left(t, y(t)\right), \end{aligned} \tag{6}$$

де $\tilde{f}(t, y) = f\left(t, y, \tilde{y}\left(t-\tau_1(t)\right), ..., \tilde{y}\left(t-\tau_m(t)\right)\right)$.

Отримаємо на проміжку $t \in [\,t_0,\ t_0 + d]$ систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy^J(t)}{dt} = \tilde{f}^J\left(t, y^2(t), ..., y^n(t)\right), J = 2, ..., n. \tag{7}$$

Тоді s - стадійний метод Рунге-Кутти для отриманої системи (7) має вигляд:

$$\begin{aligned} g_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h \tilde{f}\left(t_0 + c_j h, g_j^2, ..., g_j^n\right),\ i = 1, ..., s, \\ y_1 &= y_0 + \sum_{j=1}^{s} b_j h \tilde{f}\left(t_0 + c_j h, g_j^2, ..., g_j^n\right), \\ t^1 &= t_0 + h, \end{aligned} \tag{8}$$

де $y_0{}^J$ – початкове значення, $y_1{}^J$ – шукане наближення невідомої функції y^J, за один крок чисельного інтегрування h, g_i^J – попередні наближення розв'язку першого порядку, $J = 2,...,n$. Коефіцієнти a_{ij}, b_j визначають метод Рунге-Кутти, t_0 – початкове значення часу, $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$, $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ [10].

Зауважимо, що метод (8) має порядок апроксимації p, якщо для досить гладких задач (7) має місце наступна нерівність:

$$\left\| y(t_0 + h) - y_1 \right\| \le K h^{p+1},\ y(t) = \left(y^2(t), ..., y^n(t) \right),$$

де K – стала, а $\left\| y(t) \right\| = \left| y^2(t) \right| + ... + \left| y^n(t) \right|$.

Повертаючись до функції f отримаємо s - стадійний метод Рунге-Кутти для систем з запізнюванням вигляду (3):

$$\begin{aligned}
&g_i = y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f\left(t_0 + c_j h, g_j, \tilde{y}\left(t_0 + c_j h - \tau_1\left(t_0 + c_j h \right) \right), ... \right. \\
&\left. ..., \tilde{y}\left(t_0 + c_j h - \tau_m\left(t_0 + c_j h \right) \right) \right),\ i = 1, ..., s, \\
&y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^{s} b_j h f\left(t_0 + c_j h, g_j, \tilde{y}\left(t_0 + c_j h - \tau_1\left(t_0 + c_j h \right) \right), ... \right. \\
&\left. ..., \tilde{y}\left(t_0 + c_j h - \tau_m\left(t_0 + c_j h \right) \right) \right), \\
&t^1 = t_0 + h, \\
&g_i = \left(g_i^{\,2}, ..., g_i^{\,n} \right),\ i = 1, ..., s,
\end{aligned} \qquad (9)$$

де $y_0 = \left(y_0^{\,2}, ..., y_0^{\,n} \right)$ – початкове значення, $y_1 = \left(y_1^{\,2}, ..., y_1^{\,n} \right)$ – шукане наближення невідомої функції $y(t)$ за один крок чисельного інтегрування $h \le d$.

Оскільки при чисельних обрахунках немає точної функції $\tilde{y}(t)$ (передісторії моделі), то за неї береться його наближення, отримане на попередніх кроках чисельного інтегрування [11]:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \varphi(t),\ t \in \left[t^0 - D,\ t^0 \right], \\ \hat{y}(t),\ t \in \left(t^0,\ t_0 \right]. \end{cases} \qquad (10)$$

де $\hat{y}(t)$ – наближене значення розв'язку $y(t),\ t \in \left(t^0,\ t_0 \right]$.

Твердження 1. Якщо порядок наближення розв'язку $\hat{y}(t)$ рівний p_1, а порядок апроксимації методу Рунге-Кутти (8) рівний p_2, тоді порядок апроксимації методу Рунге-Кутти для систем з запізнюванням (9) рівний $p = \min\left\{ p_1 + 1, p_2 \right\}$.

Доведення. Умови твердження справедливі за умови виконання вимог теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші. При цьому функція f неперервна і задовольняє умову Ліпшиця за всіма аргументами, починаючи з другого. Дійсно, нехай L найбільша з констант Ліпшиця для $f^2,...,f^n$. Тоді маємо

$$\left\|y(t_0+h)-y_1\right\| = \left\| \begin{matrix} y(t_0+h)-y_0-\sum\limits_{j=1}^{s} b_j hf\left(t_0+c_jh, g_j, \tilde{y}\left(t_0+c_jh-\tau_1\left(t_0+c_jh\right)\right),...\right. \\ \left. ..., \tilde{y}\left(t_0+c_jh-\tau_m\left(t_0+c_jh\right)\right)\right) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} y(t_0+h) \pm \left(y_0 + \sum\limits_{j=1}^{s} b_j hf\left(t_0+c_jh, g_j, y(.),...,y(.)\right)\right) \\ -y_0 - \sum\limits_{j=1}^{s} b_j hf\left(t_0+c_jh, g_j, \tilde{y}(.),...,\tilde{y}(.)\right) \end{matrix} \right\| \le$$

$$\le K_2 h^{p_2+1} + \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{j=1}^{s} b_j hf\left(t_0+c_jh, g_j, y(.),......,y(.)\right) \\ -\sum\limits_{j=1}^{s} b_j hf\left(t_0+c_jh, g_j, \tilde{y}(.),...,\tilde{y}(.)\right) \end{matrix} \right\| = K_2 h^{p_2+1} +$$

$$+\sum_{J=2}^{n}\sum_{j=1}^{s}\left|b_j\right|h\left|f^J\left(t_0+c_jh, g_j, y(.),...,y(.)\right)-f^J\left(t_0+c_jh, g_j, \tilde{y}(.),...,\tilde{y}(.)\right)\right| \le$$

$$\le K_2 h^{p_2+1} + \sum_{J=2}^{n}\sum_{j=1}^{s}\left|b_j\right|h\sum_{i=1}^{m}L\left\|y\left(t_0+c_jh-\tau_i\left(t_0+c_jh\right)\right)-\tilde{y}\left(t_0+c_jh-\tau_i\left(t_0+c_jh\right)\right)\right\| \le$$

$$\le K_2 h^{p_2+1} + \left(n-1\right)\sum_{j=1}^{s}\left|b_j\right|hLK_1mh^{p_1+1} \le Kh^{p+1}.$$

Якщо в методі (9) $h > d$, то можливо, що для деяких $\tau_l \in \left\{\tau_1,...,\tau_m\right\}$ та $j \in \left\{1,...,s\right\}$ має місце $t_0+c_jh-\tau_l\left(t_0+c_jh\right) > t_0$, тоді необхідне наближене значення розв'язку $\breve{y}(t)$ в момент часу $t > t_0$. Тобто:

$$\tilde{y}\left(t\right) = \begin{cases} \varphi\left(t\right),\ t \in \left[t^0-D,\ t^0\right], \\ \hat{y}(t),\ t \in \left(t^0,\ t_0\right], \\ \breve{y}(t),\ t > t_0, \end{cases} \tag{11}$$

де $\breve{y}(t)$ – наближене значення розв'язку $y(t),\ t > t_0$.

Зазвичай значення функцій $\hat{y}(t),\ \breve{y}(t)$ отримують відповідно з інтерполяції та екстраполяції значень розв'язку на попередніх кроках застосування методу Рунге-Кутти [11].

Твердження 2. Якщо порядок наближення розв'язку $\hat{y}(t)$ рівний p_1, $\breve{y}(t)$ рівний p_2, а порядок апроксимації методу Рунге-Кутти (8) рівний p_3, тоді порядок апроксимації методу Рунге-Кутти для систем з запізнюванням (9) рівний $p=\min\left\{p_1+1, p_2+1, p_3\right\}$.

Умови твердження справедливі за умови виконання вимог теорем існування і єдиності розв’язку задачі Коші. При цьому функція f неперервна і задовольняє умову Ліпшиця за всіма аргументами, починаючи з другого. Доведення аналогічне попередньому твердженню.

Перепишемо (9) в більш зручному для програмування вигляді. Для цього позначимо $y^1\equiv t$, тоді $\frac{dy^1}{dt}=1$. Тоді система (3) матиме вигляд:

$$\begin{gathered}\frac{dy(t)}{dt}=\bar{f}\left(y(t), y\left(t-\tau_1(t)\right),\ldots, y\left(t-\tau_m(t)\right)\right),\\ y=\left(y^1,\ldots,y^n\right), \bar{f}=\left(1, f^2,\ldots,f^n\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Метод (9) має вигляд:

$$\begin{gathered}g_i=y_0+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}h\bar{f}\left(g_j,\tilde{y}\left(g_j^1-\tau_1\left(g_j^1\right)\right),\ldots,\tilde{y}\left(g_j^1-\tau_m\left(g_j^1\right)\right)\right),\ i=1,\ldots,s,\\ y_1=y_0+\sum_{j=1}^{s}b_jh\bar{f}\left(g_j,\tilde{y}\left(g_j^1-\tau_1\left(g_j^1\right)\right),\ldots,\tilde{y}\left(g_j^1-\tau_m\left(g_j^1\right)\right)\right),\\ g_i=\left(g_i^1,\ldots,g_i^n\right),\ i=1,\ldots,s.\end{gathered} \tag{14}$$

Або:

$$\begin{gathered}g_i^J=y_0^J+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}hf^J\left(g_j^1,\ldots,g_j^n,\tilde{y}^2\left(g_j^1-\tau_1\left(g_j^1\right)\right),\ldots\tilde{y}^n\left(g_j^1-\tau_1\left(g_j^1\right)\right),\ldots\right.\\ \left.\ldots,\tilde{y}^2\left(g_j^1-\tau_m\left(g_j^1\right)\right),\ldots,\tilde{y}^n\left(g_j^1-\tau_m\left(g_j^1\right)\right)\right),\quad i=1,\ldots,s,\\ y_1^J=y_0^J+\sum_{j=1}^{s}b_jhf^J\left(g_j^1,\ldots,g_j^n,\tilde{y}^2\left(g_j^1-\tau_1\left(g_j^1\right)\right),\ldots\tilde{y}^n\left(g_j^1-\tau_1\left(g_j^1\right)\right),\ldots\right.\\ \left.\ldots,\tilde{y}^2\left(g_j^1-\tau_m\left(g_j^1\right)\right),\ldots,\tilde{y}^n\left(g_j^1-\tau_m\left(g_j^1\right)\right)\right),\quad J=1,\ldots,n.\end{gathered} \tag{15}$$

Нехай порядок апроксимації методу Рунге-Кутти (8) рівний p. Для інтерполяції розв'язку використаємо поліном Лагранжа порядку $p-1$, побудований по p точкам y^1. Тоді порядок апроксимації методу Рунге-Кутти для систем з запізнюванням (14), згідно твердженню 1, теж рівний p за умови $h\le d$.

Якщо $h>d$, то для екстраполяції передісторії використаємо, як і в звичайних методах Рунге-Кутти, метод Ейлера. Тоді, якщо в (14) для деяких $\tau_l\in\left\{\tau_1,\ldots,\tau_m\right\}$ та $j\in\left\{1,\ldots,s\right\}$ виконується нерівність $g_j^1-\tau_l\left(g_j^1\right)>t_0$, отримаємо

$$\breve{y}\left(g_j^1-\tau_l\left(g_j^1\right)\right)=g_k+\left(g_j^1-\tau_l\left(g_j^1\right)-g_k^1\right)f\left(g_k,\tilde{y}\left(g_k^1-\tau_l\left(g_k^1\right)\right)\right), \tag{16}$$

де $g_k \in \{g_1,...,g_j\}$ – найближче по часу g_k^1 до $g_j^1 - \tau_l\left(g_j^1\right)$ пораховане наближення першого порядку. Апроксимація порядку 2 даного методу випливає з твердження 2.

Зауваження. При екстраполяції передісторії за методом Ейлера (16) метод (14) при $\tau_1(t)=0,..,\tau_m(t)=0,\ t \ge t^0$ співпадає з методом Рунге-Кутти для систем звичайних диференціальних рівнянь. Дійсно, якщо $\tau_l(t)=0,\ t \ge t^0$, то найближчим до $g_j^1 - \tau_l\left(g_j^1\right)$ буде g_j^1, тобто в формулі (16) $g_k = g_j$, $l=1,...,m$, $j=1,...,s$. Тоді рівність (16) при $\tau_1(t)=0,..,\tau_m(t)=0,\ t \ge t^0$ має вигляд $\breve{y}\left(g_j^1\right)=g_j$, $j=1,...,s$, що відповідає звичайному методу Рунге-Кутти.

Література

1. *Baker, C. T. H. and Paul, C. A. H.* Discontinuous solutions of neutral delay differential equations – Applied Numerical Mathematics 56, – 2006 – p. 284–304.

2. *Cattaneo C. A* Form of Heart Equation with Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagations, C.R.Acad.Sci.247, 1958 – p. 431-433.

3. *Chen G.* Ballistic-Diffusive Heat-Conduction Equations - Phys. Rev. Lett. 86 – 2001 - 2297-2300.

4. *Gu, K. and Niculescu, S.-I.,* Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems – Journal of Dynamical Systems, Measurement, and Control125, 2003 – p. 158–165.

5. *Kyrychko Y.N., Hogan S.J.* On the use of delay equations in engineering applications – Journal of Vibration and Control,16(7–8) – 2010 – 943 –960 p.

6. *Otto A., Just W., Radons G.* Nonlinear dynamics of delay systems: an overview – Phil.Trans.R.Soc.A377: 20180389. – 2019.

7. *Титов Н.К.* Успенський В.К. Моделирование систем с запаздыванием. –Ленинград, Энергия, 1969. -100с.

8. *Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.* Математические модели динамических систем с запаздыванием – Екатеринбург: Изд.-во Урал. ун-та, 2012. – 122 с.

9. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296с.

10. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи / Под ред. С. С. Филиппова. – М.: Мир, 1990. – 512с.

11. *Пимёнов В.Г.* Функционально-дифференциальные уравнения в биологии и медицине. – Учебное пособие. – Екатеринбург, 2008. – 91с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ

Бондаренко Н.В., к.ф.-м.н, доцент, Печук В.Д.
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Рассматривается система дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями, что является математической моделью многих технических процессов с запаздыванием во времени. Наиболее часто для моделирования таких систем используют численные методы Рунге-Кутты, и метод разложения в ряд Тейлора по запаздыванию. Ранее методы Рунге-Кутты применялись для систем дифференциальных уравнений с одним переменным запаздыванием. В работе получено обобщение методов Рунге-Кутты для систем дифференциальных уравнений, имеющих конечное число переменных запаздываний, что значительно расширяет класс задач, для которых применим данный метод. Также данный метод имеет преимущества перед методом разложения в ряд Тейлора, по запаздыванию поскольку применим для систем с несколькими переменными запаздываниями, удобен для программирования, и не имеет ограничений на величину запаздывания. Для обобщения методов Рунге-Кутты для систем с запаздыванием использовались методы Рунге-Кутты для систем дифференциальных уравнений, без запаздывания во времени, и интерполяция и экстраполяция предыстории. Установлено аппроксимационные свойства обобщения методов Рунге-Кутты для систем с запаздыванием. А именно показана связь порядка аппроксимации методов Рунге-Кутты для систем, с запаздыванием, с порядком аппроксимации методов Рунге-Кутты для систем без запаздывания и порядком аппроксимации интерполяции и экстраполяции предыстории модели. Таким образом, установлено, что порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты для системы с запаздыванием будет минимумом порядков аппроксимации метода Рунге-Кутты для системы без запаздывания и порядком аппроксимации интерполяции и экстраполяции предыстории модели увеличенными на единицу. На основе данного утверждения сделаны выводы, что если использовать в качестве интерполяции предыстории полином Лагранжа по количеству узлов совпадающему с порядком аппроксимации метода Рунге-Кутты для системы без запаздывания, то при достаточно малом шаге метод Рунге-Кутты для системы с запаздыванием сохраняет порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты без запаздывания. Без ограничений на длину шага при использовании для экстраполяции решения метода Эйлера, установлено, что в таком случае порядок аппроксимации методов Рунге-Кутты для системы с запаздыванием более двух.

Ключевые слова: Системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, методы Рунге-Кутты, численные методы, экстраполяция.

MODELING OF DYNAMIC DELAYED SYSTEMS BY USING GENERAL RUNGE-KUTTA METHODS

Ph.D., Associate Professor Bondarenko N.V., Pechuk V.D
Kyiv National University of Construction and Architecture

A system of differential equations with several variable delays is considered, which is a mathematical model of many technical processes with time delay. Most often, numerical Runge-Kutta methods and the Taylor series expansion by delay method are used to model such systems. Previously, Runge-Kutta methods were used for systems of differential equations with one variable delay. A generalization of the Runge-Kutta methods for systems of differential equations with a finite number of variable delays is obtained, which significantly expands the class of problems for which this method is applicable. Also, this method has advantages over the Taylor expansion method in terms of delay since it is applicable to systems with several variable delays, is convenient for programming, and has no restrictions on the value of delay. To generalize the Runge-Kutta methods for systems with delay, we used Runge-Kutta methods for systems of differential equations without delay in time and interpolation and extrapolation of the redistribution. The approximation properties of the generalization of Runge-Kutta methods for systems with delay are established. Namely, the connection between the approximation order of the Runge-Kutta methods for systems with delay and the approximation order of the Runge-Kutta methods for systems without delay and the approximation order of interpolation and extrapolation of the model history is shown. Thus, it was established that the approximation order of the Runge-Kutta method for a system with delay will be the minimum of the approximation orders of the Runge-Kutta method for a system without delay and the approximation order of interpolation and extrapolation of the model history will be increased by one. Based on this statement, it is concluded that if we use the Lagrange polynomial in the number of nodes that coincides with the approximation order of the Runge-Kutta method for a system without delay, then, with a sufficiently small step, the Runge-Kutta method for a system with delay retains the approximation order of the method Runge-Kutta without delay. Without limiting the step length when using the Euler method for extrapolating a solution, it was found that in this case the approximation order of the Runge-Kutta methods for a system with a delay of more than two.

Keywords: Systems of delayed differential equations, Runge-Kutta methods, numerical methods, extrapolation.