УДК 514.18

С.І. Ботвіновська, д. т. н., доцент
С.М. Васько, к. т. н., старший викладач
А.В.Золотова, к. т. н.

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРЯМИХ ЛІНІЙ

Київський національний університет будівництва і архітектури
Житомирський національний агроекологічний університет

У роботі представлено теоретичні основи активного перетворення координат. Пропонується його використання для моделювання дискретних каркасів різноманітних криволінійних поверхонь дизайн-об'єктів засобами комп'ютерної графіки. Такий підхід дозволить не лише враховувати задані вихідні умови, а й отримувати поверхні з заданими геометричними особливостями та естетичними властивостями, і суттєво розширить бібліотеку дискретно-предствлених поверхонь. Розглядається питання використання активного перетворення координат, в основі якого лежать перетворення прямих ліній. Це пов'язано з тим, що на дискретних каркасах поверхонь просторові обводи, які можна провести через n заданих вузлів, визначаються плоскими обводами, а саме їх проекціями. Тому, у роботі досліджується активне перетворення координат для об'єктів на площині. В активному перетворенні координат чисельні значення координат вузлів поверхні прообразу можуть бути деякими функціями від чисельних значень координат вузлів поверхні образу у тих саме або в інших одиницях вимірювання. Безліч координатних систем, які пов'язуються з модельованими об'єктами дозволить отримувати дуже широке коло ліній та поверхонь, на які можуть перетворюватись відповідно прямі або площини. Рекомендується за основну координатну систему активного перетворення призначати ПДСК, оскільки саме вона є найбільш вживаною у прикладній геометрії, і для неї детально розроблено апарат аналітичної геометрії. Це дозволить не лише описувати геометричні образи, а й досліджувати їх властивості у подальшому.

Ключові слова: активне перетворення координат; перетворення прямих; комп'ютерне моделювання; дизайн-об'єкт; координатні системи.

Постановка проблеми. У статті розглядаються теоретичні питання використання активного перетворення координат, в основі якого лежать перетворення прямих ліній, для подальшого формування дискретних каркасів поверхонь дизайн-об'єктів та створення їх тривимірних моделей засобами комп'ютерної графіки. Прикладне значення має задача формотворення поверхні за наперед заданими крайовими умовами й естетичними властивостями та можливістю отримати поверхню бажаної форми та образу.

Ціль статті. При використанні активного перетворення координат будемо мати координатні перетворення простору. Оскільки на дискретних каркасах поверхонь просторові обводи, які можна провести через n заданих точок, визначаються плоскими обводами, а саме їх проекціями, то обмежимось вивченням перетворень для випадку на площині, а не у просторі.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Активні перетворення координат [1] мають особливості, а саме: чисельне значення координат вихідної координатної системи переходить у чисельне значення координат нової системи. У прикладній геометрії та математичному моделюванні найефективнішими методами утворення складних криволінійних об’єктів є методи, в основі яких лежать різноманітні перетворення, лінійні або нелінійні [2]. Геометричні перетворення досить широко використовуються при геометричному моделюванні різноманітних об’єктів із збереженням заданих властивостей [3, 4], для отримання нових геометричних форм та образів. У роботі [4] розглядаються теоретичні питання можливого використання проективного перетворення, на прикладі перспективного, у процесі моделювання дискретних каркасів різноманітних архітектурних оболонок з вертикальними дотичними площинами. Проаналізовано властивості цих перетворень і перспективи їх подальшого використання.

Серед робіт, у яких розглядаються питання моделювання криволінійних об’єктів на основі використання геометричних перетворень, слід звернути увагу на роботи [5-7]. Там представлено розроблений спосіб перетворення кривих ліній, що базується на нормалізованому розподілі кривини. Цей спосіб допомагає моделювати криволінійні обводи, генерувати криві лінії із врахуванням динамічних особливостей модельованих об’єктів.

Оскільки координатних систем у прикладній геометрії існує незлічена різноманітність, у представлених дослідженнях обмежимося лінійними координатними системами, які можна розглядати як двопараметричну множину конгруенцій [8]. Тоді координатна система вважається визначеною, якщо задано тип конгруенції (конгруенцію прямих), систему відліку променю конгруенції і початок відліку лінійної координати вздовж променю конгруенції, а також параметри (координати), які задають напрям променю та напрям відліку параметра вздовж променю.

У найпростішому випадку активного перетворення прямокутної декартової системи координат (ПДСК) у полярну систему координат, на площині маємо, що декартова координата x переходить у полярний кут α, де число градусів кута відповідає числу лінійних одиниць координати x. А декартова координата y переходить у полярний радіус ρ у тих саме одиницях вимірювання (рис. 1).

При цьому, пряма лінія m ($y_m = c$) (рис. 1, *а*), де c – параметр, переходить у коло радіусом $\rho = c$ (рис. 1, *б*), а пряма лінія n ($y_n = kx + b$) переходить у спіраль Архімеда n': $\rho = k(\alpha + \gamma)$, де γ – постійний кут, численно рівний параметру b.

У загальному випадку, активне перетворення простору можна задавати функціями. Наприклад, деяка координату x прообразу у ПДСК перетворюється на кут α у СК образу, чисельно рівний координаті x, але цей кут можна відкладати не від полярної осі $O'x'$ (рис. 1, *г*), а від деякої осі $O'x''$, яка складає з віссю $O'x'$ постійний кут β. У результаті, декартовій координаті x відповідатиме не кут α, а полярному куту $\alpha + \beta$. Тоді, функцією перетворення буде $\alpha = kx + \beta$, де k – коефіцієнт переходу від лінійних одиниць до полярних.

Нехай декартовій координаті y відповідає не полярний радіус ρ, а функція $\rho = my$, тоді пряма $y = c$ перетвориться на коло $\rho = my$, а пряма $y = kx + b$ перетвориться у спіраль Архімеда, відмінну від спіралі на рис. 1, *г*, яка описується рівнянням $\rho = k(\alpha + \beta + \gamma)$, де: α – змінний кут, що відповідає декартовій координаті x; β – постійний кут нахилу осі $O'x''$ кутового відліку по відношенню до полярної осі $O'x'$; γ – постійний кут, який відповідає параметру b прямої лінії $y = kx + b$.

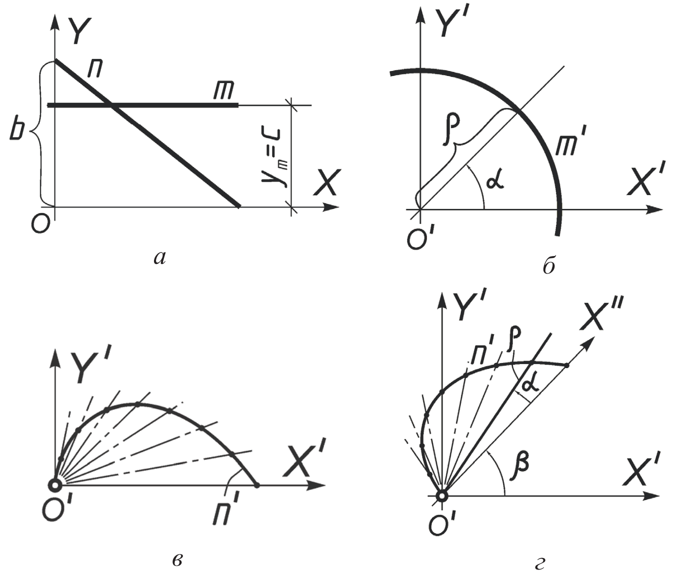


Рис. 1. Приклад активного перетворення координат на площині

Активне перетворення координат зустрічається при розв’язанні багатьох задач геометричного моделювання. У такому перетворенні аналітичне рівняння прообразу залишається незмінним [9]. Змінюється найменування відповідних координат. Перетворювані образи слід описувати у ПДСК за принципом пасивного перетворення координат, коли змінюється система координат, а не змінюється сам образ. У результаті цього процесу будемо мати прямі та зворотні формули перетворення. Система координат прообразу і система координат образу можуть призначатись абсолютно довільно з урахуванням того, який образ з естетичних або будь-яких інших міркувань бажано отримати.

Основна частина. Для спрощення подальших розрахунків за систему координат прообразу у представлених дослідженнях обираємо прямокутну декартову систему координат. Це обумовлено тим, що у цій системі координат у подальшому є можливість формувати дискретні каркаси криволінійних поверхонь об’єктів дизайну статико-геометричним методом професора С.М. Ковальова.

Поверхня, на яку буде перетворюватись площина із ПДСК, або лінія, на яку буде перетворюватись пряма визначають найбільш зручну для аналітичного опису систему координат образа. Наприклад, якщо обрати горизонтальну лінію у вихідній ПДСК то, у сферичній полярній системі координат вона буде перетворюватись на коло. При використанні формул зворотного перетворення коло буде перетворюватись на лінію, паралельну до осі координат.

Для зручності використання того або іншого обраного геометричного перетворення між системами координат образа та прообразу встановлюється математична залежність – ключ переходу з однієї системи у іншу. У якості ключа виступають прийняті для того чи іншого типу перетворення аналітичні залежності, які забезпечують можливість не замислюватись над самим процесом перетворення, а отримувати нові образи: прямі, криві, поверхні. Викликає зацікавленість перетворення більш простих геометричних фігур, на основі трансформації їх координат, і поява об’єктів (образів) з новими геометричними формами, відмінними від прообразів.

Розглянемо деякі приклади використання активного перетворення координат, коли системою прообразу є ПДСК, а системою образу є полярні циліндрична або сферична системи координат. На рис. 2 представлено прямокутну декартову систему координат та полярні системи координат у суміщених просторах.

Формули переходу із ПДСК у полярну циліндричну систему координат (ЦПСК) представлено нижче.

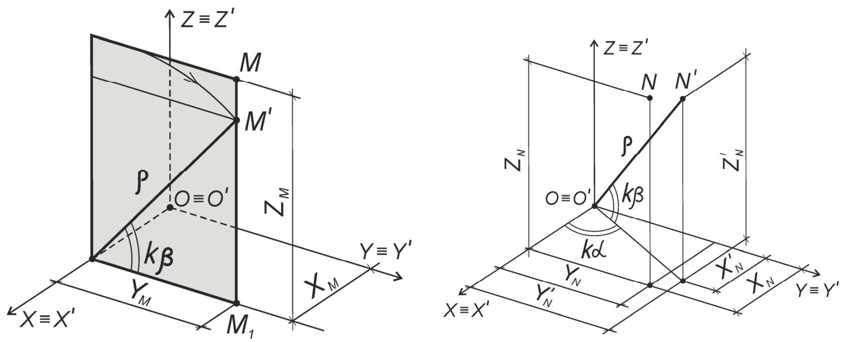
Ключ перетворення, представленого на рис. 1, *а* можна записати так: $x \to x'; y \to k\beta; z \to \rho$. Тоді, формули **прямого** перетворення із ПДСК у ЦПСК матимуть вигляд:

$$
\begin{aligned}
x' &= x; \\
y' &= z\cos k\beta; \qquad (1) \\
z' &= z\sin k\beta.
\end{aligned}
$$

Формули **зворотного** перетворення із ЦПСК у ПДСК можна представити так:

$$
\begin{aligned}
x &= x'; \\
y &= \arcsin\frac{z'}{\sqrt{(y')^2+(z')^2}}; \qquad (2) \\
z &= \sqrt{(y')^2+(z')^2}.
\end{aligned}
$$

де x, y, z – декартові координати геометричної фігури у системі прообразу, x', y', z' – декартові координати геометричної фігури у системі координат образу.



а *б*

Рис. 2. ПДСК та полярні системи координат, відповідно циліндрична та сферична, у суміщених просторах

Якщо координатною системою образу є циліндрична полярна система координат, то декартова координата x прообразу залишається незмінною $x = x'$ (рис. 2, *а*). Декартова координата y переходить у кутову координату $k\beta$, де k – коефіцієнт переходу від лінійної міри до кутової. Декартова координата z переходить у радіус-вектор ρ ($\rho = z$).

Тоді формули (1) та (2) прийматимуть вигляд, відповідно, прямі формули:

$$x' = x;$$
$$y' = z\cos y; \quad (3)$$
$$z' = z\sin y,$$

та зворотні:

$$x = x';$$
$$y = \arcsin\frac{z'}{\sqrt{(y')^2 + (z')^2}}; \quad (4)$$
$$z = \sqrt{(y')^2 + (z')^2},$$

Множина координатних прямих ЦПСК є конгруенцією *К*г *(1,1)* фокальними фігурами якої виступають дві прямі, одна з яких є невласною. Власна пряма (фокальна фігура) є початком відліку лінійних координат.

Якщо координатною системою образу є сферична прямокутна система координат (СфПСК) (рис. 2, *б*), то декартова координата x прообразу переходить у кутову координату α ($x = k\alpha$). Решта координат перетворюється так само, як і для ЦПСК.

Активне перетворення ПДСК на СфПСК описується відповідно формулами **прямого** перетворення

$$x' = z\cos x\cos y;$$
$$y' = z\sin x\cos y; \quad (5)$$
$$z' = z\sin y,$$

й формулами **зворотного** перетворення:

$$x = \arccos\frac{x'}{y'};$$
$$y = \arcsin\frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}; \quad (6)$$
$$z = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}.$$

Множина координатних прямих СфПСК є конгруенцією *К*г (*1,0*) із центром у точці *O,* яка є початком системи відліку координат (рис. 2, *б*).

Обидві конгруенції (рис. 2) розшаровуються на однопараметричну множину плоских пучків 1-го порядку прямих у пучках 1-го порядку площин. Тоді одна вісь конгруенції є власною чи невласною лінією перетину цих площин. У ЦПСК площини пучка перпендикулярні власній осі Ox конгруенції (рис. 2, *а*), а у СфПСК один з пучків має полярну вісь $O'z'$. Тому для спрощення, активне перетворення координат у просторі можна звести до перетворення у кожній площині цих пучків.

У такому випадку, перетворення у кожній площині ЦПСК та СфПСК не будуть відрізнятись між собою, а у вихідній ПДСК горизонтальні площини можна замінити перерізами – прямими рівня.

Алгоритм виведення формул, що описують активне перетворення координат можна представити так:

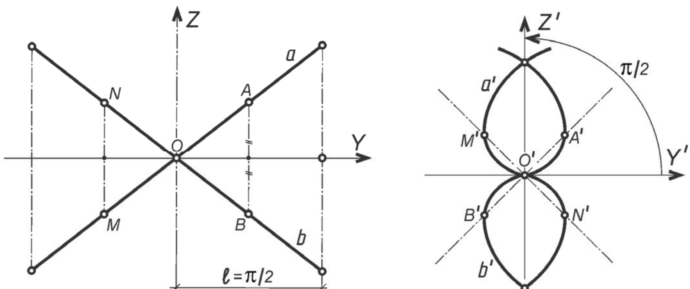
Крок 1 – записати рівняння заданої площини-прообразу довільного положення у вихідній ПДСК ($Oxyz$).

Крок 2 – записати те саме рівняння, замінивши координати функціями, наприклад: $x \to k\alpha; y \to k\beta; z \to \rho$, де k – коефіцієнт пропорційності, [град/мм].

Крок 3 – у новій системі координат образа ($O'x'y'z'$) записати параметри α, β і ρ через декартові координати x', y' і z'.

Крок 4 – записати формули зворотного перетворення, для цього отримані вирази (крок 3) підставити у рівняння (крок 2) і визначити координати, як функції $x \to f_1(x'); y \to f_2(y'); z \to f_3(\rho')$.

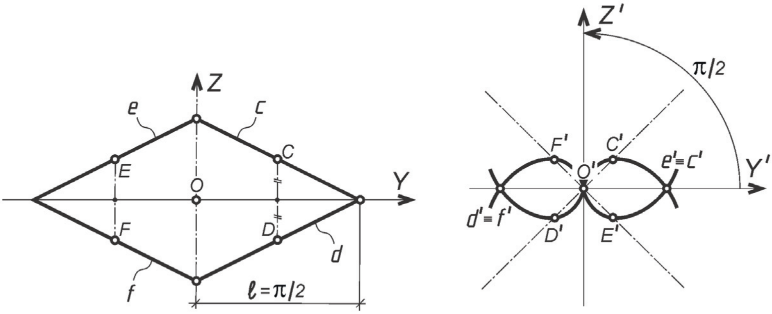
Продемонструємо основні інваріанти активного перетворення координат. Для цього, розглянемо перетворення різноманітних прямих (рис. 3), які лежать в одній площині. Відповідність між лінійними та кутовими координатами встановлюється за допомогою одиничного коефіцієнта, так що $k\ell = \frac{\pi}{2}$, де $k = 1$ [град/мм]. Під час переходу прямих (рис. 3, *а*) з ПДСК до ЦПСК, довільні прямі лінії a й b, що проходять через центр *O*, перетворюються відповідно у спіралі Архімеда a' і b', симетричні відносно координатної осі $O'y'$ (рис. 3, *б*).



а *б*

Рис. 3. Можливі перетворення із ПДСК у ЦПСК прямих ліній, що проходять через початок систем координат точку ***O***

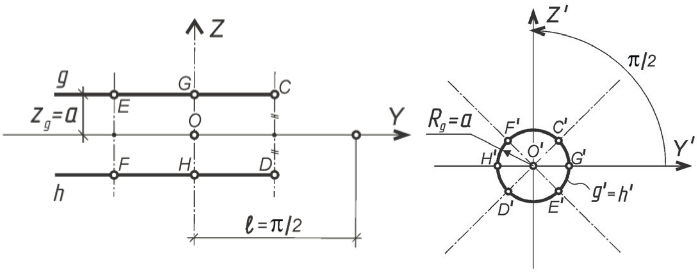
Інші прямі c, d, e, f (рис. 4, *а*), які проходять під кутами до осей Oy і Oz й не проходять через центр *O*, у системі координат прообразу, переходять відповідно у спіралі c', d', e', f' (рис. 4, б), де маємо ЦПСК образу.



а *б*

Рис. 4. Можливі перетворення з ПДСК у ЦПСК прямих ліній, які проходять під кутами до координатних осей

Прямі лінії g й h (рис. 5, *а*), паралельні осі Oy у ПДСК, описані рівняннями $z_g = a$, $z_h = -a$, після перетворення у ЦПСК образа будуть виглядати колом з центром в точці O' і радіусом $R_{h'} = a$.



а *о*

Рис. 5. Можливі перетворення прямих ліній з ПДСК у ЦПСК, які паралельні координатній осі *Oy*

Тоді, для всіх перетворених прямих характерна *властивість*: всі отримані спіралі у системі координат образу ($O'x'y'z'$) проходять через початок системи координат O', якщо лінії прообразу перетинають вісь Oy і $z = 0$ у системі координат прообразу ($Oxyz$), і не є паралельними осі Oy.

Висновки та перспективи. Використання активного перетворення координат розкриває широкі перспективи для створення дискретних каркасів криволінійних поверхонь, коли є можливість разом із вихідними умовами врахувати ще й різноманітні геометричні особливості образів, які моделюються. Безліч координатних систем образа дозволяє отримувати дуже широке коло ліній та поверхонь, на які можуть перетворюватись відповідно прямі або площини. В активному перетворенні координат чисельні значення координат прообразу можуть бути деякими функціями від чисельних значень координат образу у тих саме або в інших одиницях вимірювання, і навпаки. Рекомендується за основну координатну систему активного перетворення призначати ПДСК, оскільки саме вона є найбільш вживаною у прикладній геометрії, і для неї детально розроблено апарат аналітичної геометрії. Це дозволить не лише описувати геометричні образи, але й вивчати та досліджувати їх геометричні властивості.

Література:

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Физматгиз, 1977. 832 с.
2. *Rachkovskaya, G.S., Kharabayev, Yu.N.* Towards the Construction of Artistic Visual Images by Means of Analytical Geometry and Computer Graphics. *The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics*, Poland, 2006. Vol.16. P. 37-40.
3. *Ботвіновська С.І.* Аналіз можливостей використання геометричних перетворень при моделюванні дискретних каркасів поверхонь. *Сучасні проблеми моделювання*; зб. наук. праць; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. Мелітополь. Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018. Вип. 13. – *201с. С. 19-29.* file:///C:/Users/User/Downloads/2639-Article%20Text-5981-1-10-20190909.pdf
4. *Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Золотова А.В.* Геометричне моделювання поверхонь СГМ за допомогою перетворення інверсії. *Сучасні проблеми моделювання*; зб. наук. праці МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. Вип. 5. – С. 47–57.
5. *Устенко С.А.* Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ. КНУБА, 2013. – 40 с.
6. *Устенко С.А.* Комп'ютерна реалізація деформативного перетворення плоских криволінійних обводів. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Праці Харківського державного університету харчування та торгівлі. Харків: ХДУХТ, 2010. Вип. 26. – С. 110–115.
7. *Борисенко В.Д., Устенко С.А., Устенко І.В.* Деформативне перетворення плоских криволінійних обводів із заданим розподілом їх кривини. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. Випуск 4 «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Мелітополь: ТДАТУ, 2005. Том 30. – С. 47–52.
8. *Скидан И.А.* Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах: автореф. дис. на соискание науч. степени д-ра техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладная геометрия, инженерная графика». Москва, 1989. – 37 с.

9. Ботвіновська С.І. Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об'єктів архітектури та дизайну: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ. КНУБА, 2018. – 43 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

С.И. Ботвиновская, С.М. Васько, А.В. Золотова
Киевский национальный университет строительства и архитектуры
Житомирский национальный агроэкологический университет

В работе рассматриваются теоретические вопросы активного преобразования координат, которое предлагается использовать для моделирования дискретных каркасов различных криволинейных поверхностей объектов дизайна. Моделирование таких поверхностей упрощается с использованием современной компьютерной графики. Такой подход позволит не только учитывать при моделировании исходные данные (заданный краевой контур; отдельные узлы каркаса; топологию сетки и т.д.), но и сформировать дискретный каркас поверхности с заданными геометрическими особенностями и эстетическими свойствами. Все это вместе позволит расширить библиотеку дискретно-представленных поверхностей. Представленные исследования ограничиваются активным преобразованием координат, в основе которого лежит преобразование прямых линий. Это связано с тем, что на дискретных каркасах поверхностей пространственные обводы – линии которые можно провести через n заданных узлов дискретной сетки определяются плоскими линиями, а именно их проекциями. Поэтому, в работе авторы исследуют активное преобразование координат для геометрических объектов на плоскости. В активном преобразовании координат численные значения координат узлов поверхности прообраза могут быть представленными как некоторые функции от численных значений координат узлов поверхности образа, в тех же или в других единицах измерения, и на оборот. Неограниченное количество координатных систем в прикладной геометрии, которые связаны с моделируемым объектом, позволит получить большое количество новых линий и поверхностей, которые будут получены в результате преобразования известных прямых или плоскостей. Рекомендуется в качестве основной координатной системы активного преобразования выбрать прямоугольную декартовую систему координат, которая является наиболее изученной в прикладной геометрии. Именно для этой системы координат детально разработан аппарат аналитической геометрии, что позволит не только описывать геометрические образы, а и исследовать их свойства в дальнейшем.

Ключевые слова: активное преобразование координат; преобразование прямых; компьютерное моделирование; дизайн объект; координатные системы.

GEOMETRICAL MODELLING OF OBJECTS BASED ON STRAIGHT LINES TRANSFORMATION

S. Botvinovska, S. Vasko, A. Zolotova

In work theoretical questions of active transformation of coordinates, which is offered to be used for modeling of discrete frameworks of various curvilinear surfaces of objects of design, are considered. Modeling such surfaces is simplified using modern computer graphics. Using the transformation will allow to take into account not only the original data, (the specified frame reference contour; separate knots of a framework; Consider grid topology, etc.), but also form a discrete surface framework with specified geometric features and aesthetic properties. All this together will allow to expand the library of discrete-represented surfaces.

The studies presented are limited to active coordinate transformation based on straight lines transformation. This is due to the fact that on discrete frames of surfaces spatial lines - lines which can be drawn through n specified nodes of the discrete grid are determined by flat lines, namely their projections. Therefore, in the work, the authors investigate the active transformation of coordinates for geometric objects on the plane. In an active coordinate transformation, the numerical coordinate values of the model surface nodes can be represented as some function of the numerical coordinate values of the image surface nodes, in the same or different units.

Unlimited number of coordinate systems in applied geometry that are associated with the objects being modeled will allow you to obtain a large number of new lines and surfaces that will result from the conversion of known straight lines or planes. It is recommended that you select a rectangular Cartesian coordinate system as the primary coordinate system of the active transformation because it is the most studied in applied geometry.

It is for the rectangular Cartesian coordinate system that the analytical geometry apparatus has been developed in detail, which will allow not only to describe geometric appearances, but also to study their properties in the future.

Keywords: active transformation of coordinates; transformation of straight lines; computer modeling; design object; coordinate systems.