

**МЕТОД О.Л.ПІДГОРНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ФАЗИ  
ВІДБИТОЇ ХВИЛІ, ВІДПОВІДНОЇ ФАЗИ  
ХВИЛІ З ТОЧКОВОГО ДЖЕРЕЛА**

*Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)*

*Променево-хвильовий дуалізм полягає у тому, що певні фізичні явища та матеріальні мікроскопічні об'єкти можуть за одних умов виявляти властивості класичних хвиль, а при інших – мати променеві властивості. Типові приклади об'єктів, які виявляють двоїсту променево-хвильову поведінку - електрони і світло. Чим об'єкт масивніший, тим в меншій мірі виявляються його хвильові властивості, і в більшій мірі – променеві властивості. Можливі дві точки зору на місце геометричної оптики в системі сучасних оптичних уявлень. Відповідно до першої з них геометрична оптика розглядається як самостійний розділ оптики, заснований на певній системі законів: прямолінійного поширення світла, його відображення і заломлення. У такій постановці геометрична оптика є основою обчислювальної оптики, на базі якої здійснюються розрахунки різноманітних оптичних елементів і систем. Згідно другої точки зору основні вираження і співвідношення апарату геометричної оптики є за своєю суттю наближеними розв'язками хвильових рівнянь. При чому – що суттєво - у багатьох випадках такі ілюстрації полегшують їх аналіз.*

*Подальший розвиток уявлень про графічні образи хвильових рівнянь можливо здійснити на основі концепції моделювання та унаочнення геометричних форм відповідних фаз хвиль (падаючих та відбитих). Запропонований О. Л. Підгорним метод [1] базується на графічному апараті моделювання, в основі якого знаходиться поняття ортотоміки. А саме, при відбитті від заданої на площині лінії ортотоміка є обвідною однопараметричної множини кіл, що дотикаються кола як певної фази «точкового» джерела, і центри яких розташовані на відбивальній кривій. Коло й ортотоміка на площині є фронтами двох хвиль - відповідно, падаючих і відбитих. Ці дослідження важливі при розв'язанні задач в області архітектурно - будівельної фізики і геліотехніки, які вимагають подальшого розвитку конструктивних методів моделювання відбитих потоків звуку або світла. Це можна здійснити за рахунок об'єднання хвильового і променевого трактувань поширення коливань.*

*Ключові слова: променево-хвильовий дуалізм; точкове джерело променів; ортотоміка; фронт хвилі; потоки звуку або світла.*

**Постановка проблеми.** Можливість використання ортотомік як ліній, для яких відображені промені становлять відповідно пучок або

конгруенцію нормалей продемонстрована О. Л. Підгорним для випадку паралельних падаючих променів. Тут в якості основи конструктивних побудов розглядалися відображення від лінії в площині. При цьому зазначено, що ортотоміка є обвідною однопараметричної множини кіл, кожне з яких дотикається прямої, ортогональної до падаючих променів, і мають центри на відбивальній кривій. Пряма і ортотоміка в площині є фронтами відповідно падаючої і відбитої хвиль, так як падаючі і відбиті промені є їх нормаллями. По суті, фронти падаючої і відбитої хвилі є гілками однієї обвідної однопараметричної множини кіл при відображенні в площині від лінії. Актуальною буде задача дослідити випадок, коли падаюча хвиля буде не лише прямолінійної форми, а матиме вигляд кола змінного радіуса з центром у точці, яке вважатимемо джерелом хвиль.

**Аналіз останніх досліджень.** В роботах [1,2] показано що лінії падаючої і відбитої хвилі (ортотоміки) є обвідними множини кіл з центрами на відбивальній лінії. Відбиті промені утворюють пучки нормалей до ортотомік. Можливість використання ортотомік як ліній, для яких відбиті промені складають пучок нормалей продемонстрована в статті [2] для випадку паралельних падаючих променів. В роботах [1-2] основою конструктивних побудов обрано наступний апарат відбиття. При відбитті від лінії ортотоміка є обвідною однопараметричної множини кіл, що дотикаються прямої, ортогональної до падаючих променів, і центри яких розташовані на відбивальній кривій. Пряма й ортотоміка на площині є фронтами, відповідно, падаючих і відбитої хвиль, тому що падаючі і відбиті промені є їх нормаллями.

Пояснимо це на прикладі. Нехай на криву  $x = t; y = f(t)$  падає фронт хвилі, точкове джерело якої розташоване в початку координат  $Oxy$ . Опис падаючих фронтів хвилі має вигляд  $x^2 + y^2 = r^2$ . В роботі [3] наведено рівняння ортотоміки як фази відбитої хвилі при  $r=0$ :

$$x_{ORT} = 2f' \frac{t f' - f}{f'^2 + 1}; \quad y_{ORT} = 2 \frac{f - t f'}{f'^2 + 1}. \quad (1)$$

Але на практиці необхідно мати описи фаз відбитої хвилі при довільних значеннях  $r$ . Для цього слід розглянути опис сім'ї кіл з центрами на кривій  $x=t; y=f(t)$

$$F = (x - t)^2 + (y - f(t))^2 - \left( \sqrt{t^2 + f^2(t)} - r \right)^2, \quad (2)$$

кожне коло б якої дотикалося б кола падаючого фронту хвилі при обраному значенню  $r$ . Розв'язок відносно координат  $x$  і  $y$  системи рівнянь

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

дозволяє формально визначати ортотоміку як обвідну сім'ї кіл з центрами на відбивальній кривій, і які дотикаються «фазового кола»  $x^2 + y^2 = r^2$ . У

випадку, коли джерело променів розташоване в точці початку координат ( $r=0$ ), зображення ортотоміки наведено на рис. 1 (запозичено з роботи [4]).

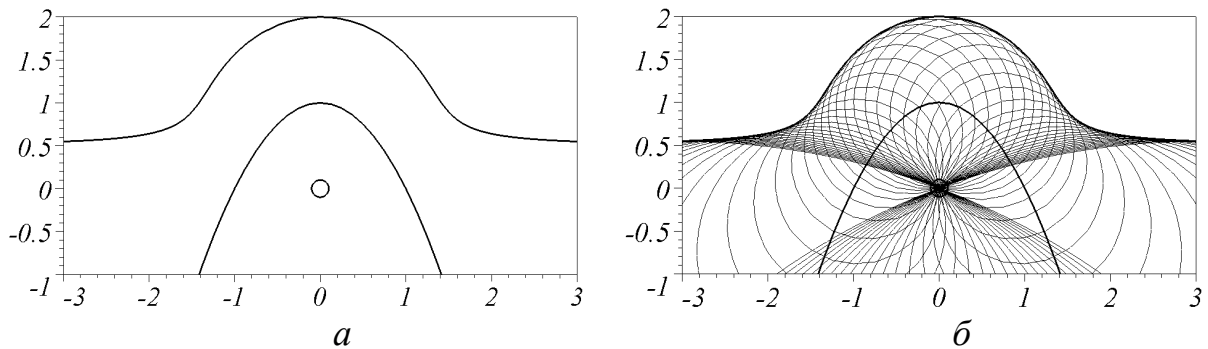


Рис. 1. Ортотоміка параболи  $y = 1 - x^2$  (а) як обвідна сім'ї кіл (б)

В сучасних умовах поширення обчислювальної техніки з'явилися можливості більш ефективного використання на практиці розглянутих положень. Можливо розробити «комп'ютерний» метод опису і визначення окремих фаз відбитих хвиль залежно від геометричної форми відбивальної лінії. Дана робота присвячена розв'язанню частини цієї проблеми.

**Формулювання задачі.** За умови, що джерелом падаючої хвилі є точка, необхідно розробити метод опису і унаочнення окремих фаз відбитих хвиль залежно від геометричної форми відбивальної лінії.

**Основна частина.** Зазначимо, що розв'язок системи рівнянь (3) має надто громіздкий вигляд. Навіть для параболи, описаної тривіальними рівняннями  $x = t$ ;  $y = t^2$  (вирази одержано за допомогою пакету maple):

$$x := \frac{\left( 4t^7 + t^3 + 5t^5 + (12t^8 r^2 + 17t^{10} + 8t^{14} + 20t^{12} + r^2 t^4 + 6t^8 + 8t^{10} r^2 + 12t^6 \sqrt{(t^2 + t^4)t^4(t^2 + t^4 - 2\sqrt{t^2 + t^4} r + r^2)} + 5t^6 r^2 + 4t^4 \sqrt{(t^2 + t^4)t^4(t^2 + t^4 - 2\sqrt{t^2 + t^4} r + r^2)} + 8t^8 \sqrt{(t^2 + t^4)t^4(t^2 + t^4 - 2\sqrt{t^2 + t^4} r + r^2)} + t^6 - 10t^6 \sqrt{t^2 + t^4} r - 8t^4 \sqrt{t^2 + t^4} r \sqrt{(t^2 + t^4)t^4(t^2 + t^4 - 2\sqrt{t^2 + t^4} r + r^2)} - 4t^2 \sqrt{t^2 + t^4} r \sqrt{(t^2 + t^4)t^4(t^2 + t^4 - 2\sqrt{t^2 + t^4} r + r^2)} - 24t^8 \sqrt{t^2 + t^4} r - 2t^4 \sqrt{t^2 + t^4} r - 16t^{10} \sqrt{t^2 + t^4} r \right) \left( \frac{1}{2} \right)}{(t^2 + t^4)(1 + 4t^2)}$$

$$y := \frac{\left( 4t^2 \sqrt{t^2 + t^4} r + 8t^4 \sqrt{t^2 + t^4} r - 2t^4 - 2t^6 + 2\sqrt{t^8 r^2 + t^{12} + t^6 r^2 - 2t^6 \sqrt{t^2 + t^4} r - 2t^8 \sqrt{t^2 + t^4} r + t^8 + 2t^{10}} \right)}{(2(5t^4 + 4t^6 + t^2))}$$

При розв'язанні системи рівнянь (3) в загальному випадку виникає важко формалізуємо питання, яке полягає у впорядкуванні множини

обчислених координат точок на відповідних гілках ортотоміки. Спрощення цього процесу у даній роботі пропонується досягти завдяки визначенню координат точок перетину, розташованих на парах «сусідніх» кіл. А саме, із  $N$  кіл сім'ї  $S_N$  послідовно обираються їх пари  $S_K$  і  $S_{K+1}$  ( $K=1..N-1$ ), і для них обчислюються спільні точки. Тоді можна стверджувати, що множина всіх знайдених точок перетинів кіл буде розташована на (принаймні двох) гілках шуканої ортотоміки. Це дозволить наближено описати ортотоміку.

Розглянемо два «сусідні» кола з центрами на кривій  $x = t; y = f(t)$ , які б дотикалися кола фронту хвилі  $x^2 + y^2 = r^2$ . За умовами задачі існують точки  $M_4$  і  $M_5$ , у яких кола перетинаються (рис. 1).

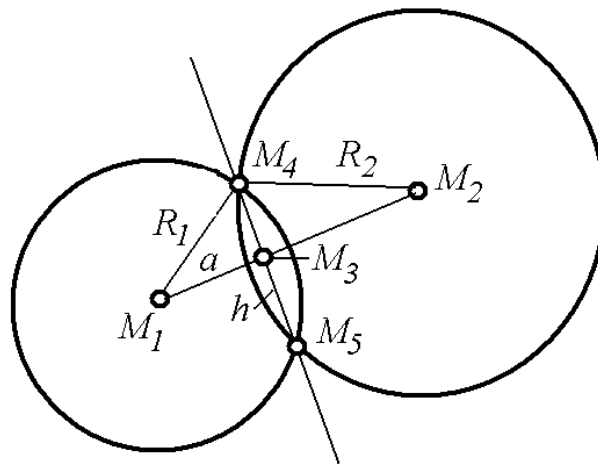


Рис. 1. Два кола для визначення координат точки на ортотоміці

Якщо центри обох кіл розташовані на лінії  $x = t; y = f(t)$ , то можна позначити  $x_1 = t_1; y_1 = f(t_1)$ . Близькість центрів кіл визначається малою величиною  $\delta$ , за допомогою якої обчислюються координати наступної точки. Враховуючи  $x_2 = x_1 + \delta$ , визначаємо координати центра другого кола:  $x_2 = t_2; y_2 = f(t_2)$ . Тоді радіуси обох кіл можна обчислити за виразами  $R_1 = \sqrt{t_1^2 + f^2(t_1)} - r$ ,  $R_2 = \sqrt{t_2^2 + f^2(t_2)} - r$ .

Позначимо відстань між центрами кіл  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

Тоді відстань між точками  $M_1$  і  $M_3$  буде  $a = \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d}$ , відстань

між точками  $M_4$  і  $M_5$  перетину кіл буде  $h = 2\sqrt{R_1^2 - a^2}$ .

З врахуванням одержаних виразів обчислимо координати точки  $M_3$ :

$$x_3 = x_1 + \frac{a(x_2 - x_1)}{d}; \quad y_3 = y_1 + \frac{a(y_2 - y_1)}{d}. \quad (4)$$

Одержані співвідношення (4) дозволяють обчислити шукані координати точок перетину кіл:

$$x_4 = x_3 - \frac{h(y_2 - y_1)}{2d}; \quad y_4 = y_3 + \frac{h(x_2 - x_1)}{2d};$$

$$x_5 = x_3 + \frac{h(y_2 - y_1)}{2d}; \quad y_5 = y_3 - \frac{h(x_2 - x_1)}{2d}.$$

Наведемо приклади побудови множини кіл з центрами на відбивальній кривій та обчислення координат точок, належних ортотоміці.

*Приклад 1.* Маємо опис відбивальної кривої у вигляді

$$x = t; \quad f = 1 + 0.5(\operatorname{tgh}(15(t + 1)) - \operatorname{tgh}(15(t - 1))).$$

Для обчислень оберемо межі зміни параметра  $t$ :  $-2 < t < 2$ , кількість кіл  $N=60$ , «відстань» між суміжними колами  $\delta = 0.07$ . На рис. 2 зображено множини кіл і ортотоміки для фази  $r=1.5$  хвили падіння. На рис. 3, рис. 4 і рис. 5 зображено те саме для  $r=1$ ,  $r=0.5$  і  $r=0$ , відповідно. В останньому випадку всі кола сім'ї проходять через початок координат.

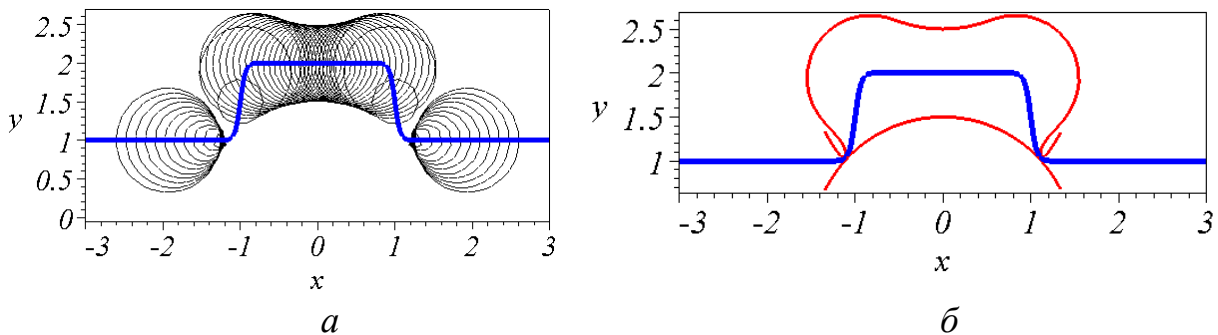


Рис. 2. Множини кіл (а) і ортотоміка (б) для фази  $r=1.5$

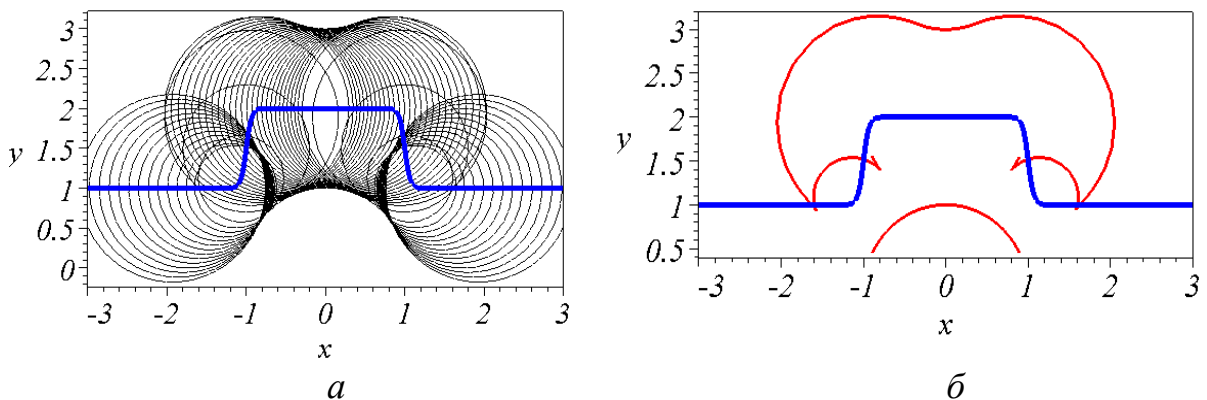


Рис. 3. Множини кіл (а) і ортотоміка (б) для фази  $r=1$

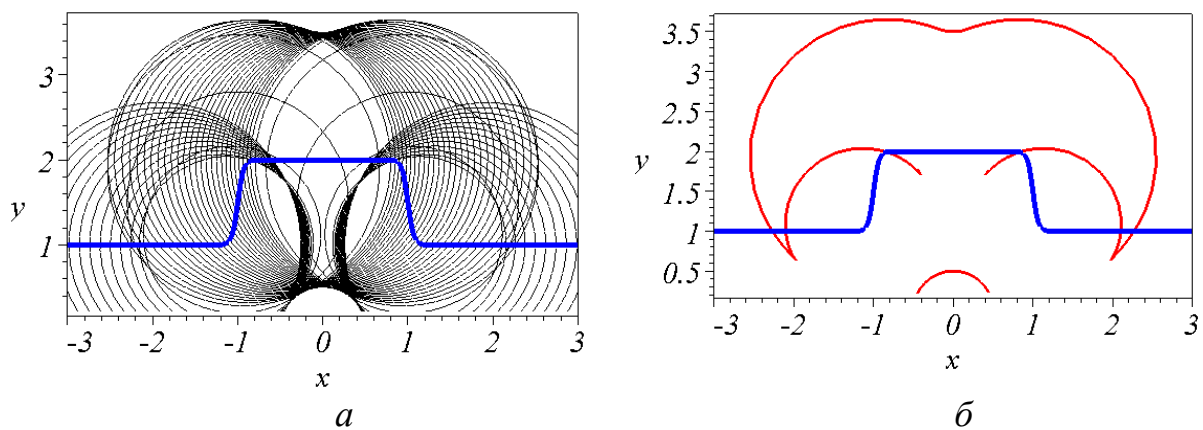


Рис. 4. Множини кіл (а) і ортотоміка (б) для фази  $r=0.5$

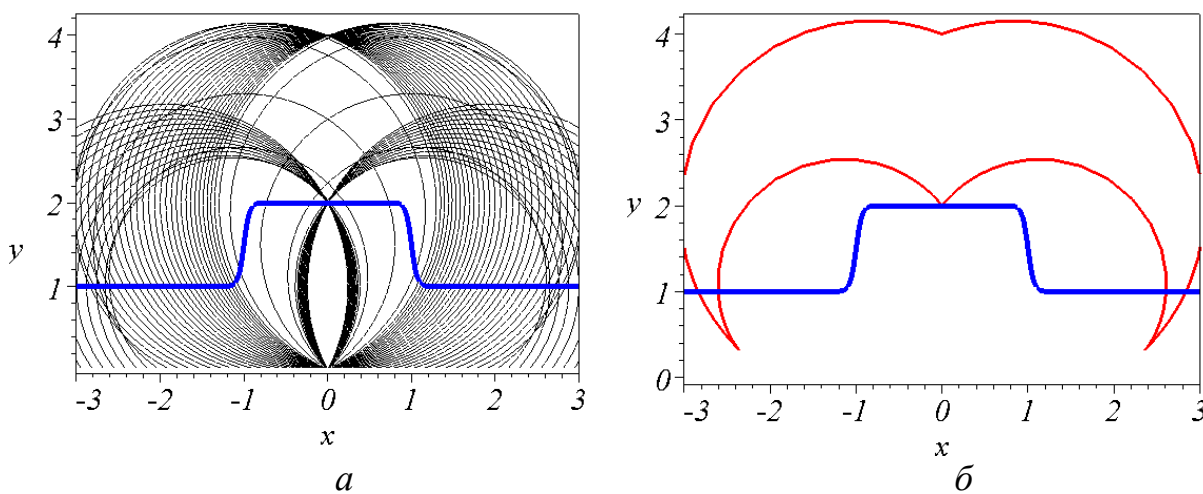


Рис. 5. Множини кіл (а) і ортотоміка (б) для фази  $r=0$

Приклад 2. Маємо опис відбивальної кривої у вигляді

$$x = t; \quad f = 2 + \arccos(\cos(t)^{10}).$$

Параметри такі як у попередньому прикладі. На рис. 6 і рис. 7 зображено множини кіл і ортотоміки для фаз  $r=1.5$ ;  $r=0.5$ ;  $r=0.25$ ; .

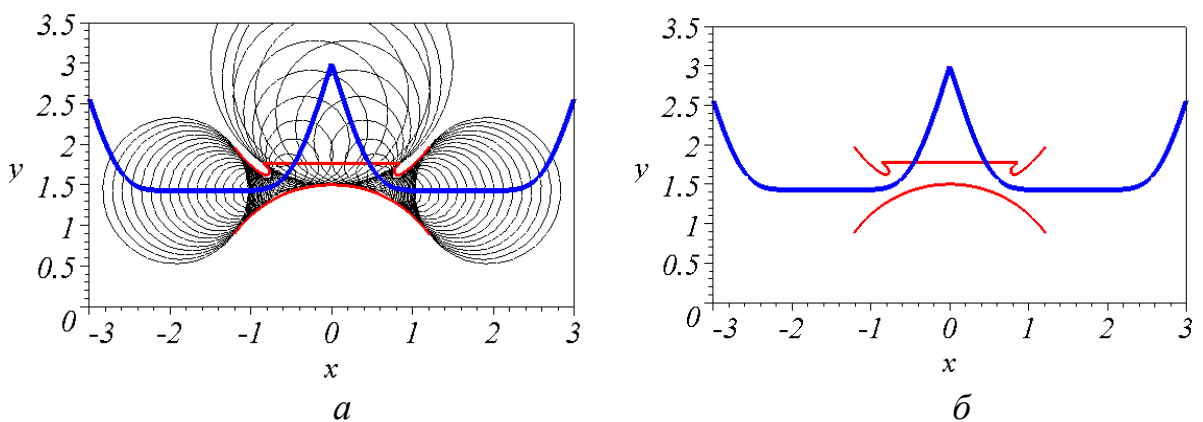


Рис. 6. Множини кіл (а) і ортотоміка (б) для фази  $r=1.5$

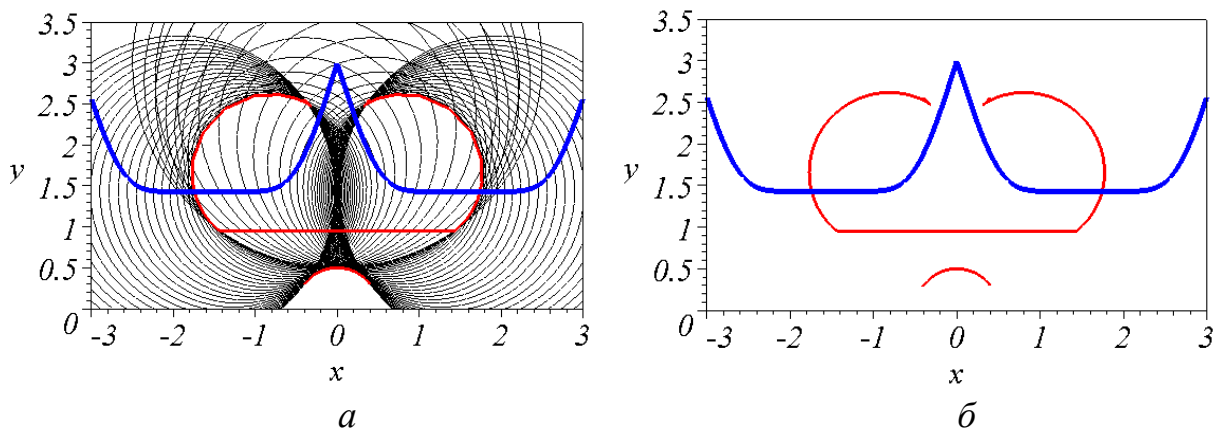


Рис. 7. Множини кіл (а) і ортотоміка (б) для фази  $r=0.5$

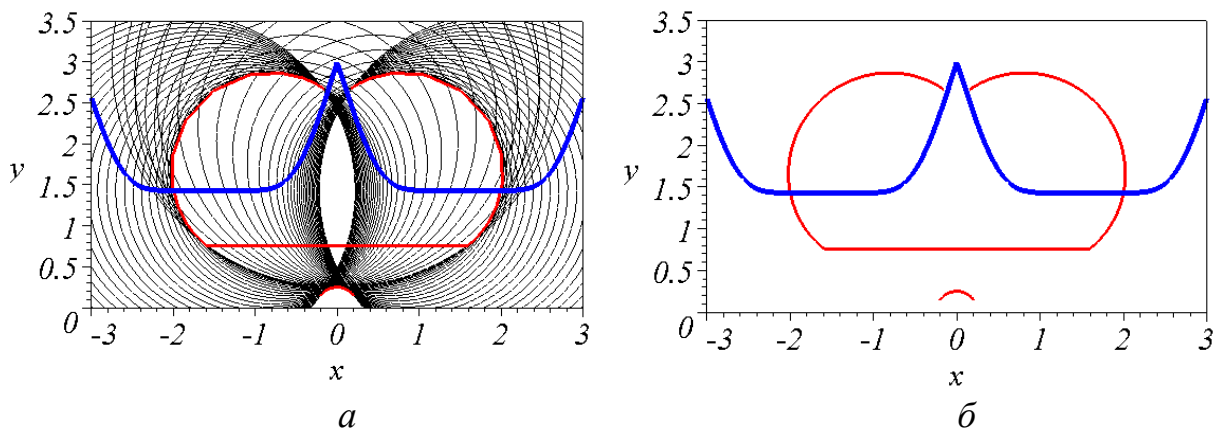


Рис. 8. Множини кіл (а) і ортотоміка (б) для фази  $r=0.25$

**Висновки.** В статті наведено можливий варіант комп'ютерної реалізації графічного методу О. Л. Підгорного визначення за допомогою ортотоміки окремих фаз відбитих хвиль, які відповідають фазам хвилі з точковим джерелом.

### Література

1. *Podgorny A.L.* Application of the Methods of Geometrical Modeling by the Chair of Architectural Constructions its Research. Proceedings 7-th International Conference on ECGDG. Krakow, 1996, Vol. 2, pp.713-716.

2. *Подгорный А.Л., Дворецкий А.Т.* Аппарат отражения для ортотоміки при параллельных падающих лучах // Труды / Таврическая государственная агротехническая академия. - Мелитополь: ТГАТА, 2002. - Вып. 4, С. 9-15.

3. *Підгорний О.Л., Куценко Л.М.* Метод побудови катакаустики для поверхні, на яку падає пучок паралельних променів // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Вип.71. Київ: КНУБА, 2002. С.18 - 22.

4. *Ситабдиева О.Л.* Описание катакаустики для гладкой кривой и лучей, исходящих из начала координат // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДАТОХ, 2002, вип. 1. С. 132-136.

## МЕТОД О.Л.ПОДГОРНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗЫ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ФАЗЕ ВОЛНЫ ИЗ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

*Л. Н. Куценко, С. Н. Шевченко*

Лучевой-волновой дуализм заключается в том, что определенные физические явления и материальные микроскопические объекты могут при одних условиях проявлять свойства классических волн, а при других - иметь лучевые свойства. Типичные примеры объектов, которые проявляют двойственную лучевую-волновую поведение - электроны и свет. Чем объект массивнее, тем в меньшей степени проявляются его волновые свойства, и в большей степени - лучевые свойства. Возможны две точки зрения на место геометрической оптики в системе современных оптических представлений. Согласно первой из них геометрическая оптика рассматривается как самостоятельный раздел оптики, основанный на определенной системе законов: прямолинейного распространения света, его отражения и преломления. В такой постановке геометрическая оптика является основой вычислительной оптики, на базе которой осуществляются расчеты различных оптических элементов и систем. Согласно второй точке зрения основные выражения и соотношение аппарата геометрической оптики является по своей сути приближенными решениями волновых уравнений. Причем - что существенно - во многих случаях такие иллюстрации облегчают их анализ.

Дальнейшее развитие представлений о графических образах волновых уравнений возможно осуществить на основе концепции моделирования и иллюстрации геометрических форм соответствующих фаз волн (падающих и отраженных). Предложенный А. Л. Подгорным метод [1] базируется на графическом аппарате моделирования, в основе которого находится понятие ортотомики. В частности, при отражении от заданной на плоскости линии, ортотомика есть огибающей однопараметрического множества окружностей, соприкасающихся круга как определенной фазы «точечного» источника, и центры которых расположены на отражающей кривой. Круг и ортотомика на плоскости является фронтами двух волн - соответственно, падающих и отраженных. Эти исследования важны при решении задач в области архитектурно - строительной физики и гелиотехники, которые требуют дальнейшего развития конструктивных методов моделирования отраженных потоков звука или света. Это можно осуществить за счет объединения волнового и лучевого трактовки распространения колебаний в изотропных средах.

*Ключевые слова: лучевой-волновой дуализм; точечный источник лучей; ортотомика; фронт волны; потоки звука или света.*



## METHOD OF O.PODGORNY DETERMINATION OF THE PHASE REFLECTED WAVE CORRESPONDING WAVE PHASE FROM A POINT SOURCE

*L. Kutsenko, S. Shevchenko*

*Beam-wave dualism consists in the fact that certain physical phenomena and material microscopic objects can exhibit the properties of classical waves under some conditions, and may have radiation properties under other conditions. Typical examples of objects that exhibit dual beam-wave behavior are electrons and light. The more massive the object, the less its wave properties appear, and the more its ray properties. Two points of view on the place of geometric optics in the system of modern optical representations are possible. According to the first of them, geometric optics is considered as an independent section of optics, based on a certain system of laws: the straight-line propagation of light, its reflection and refraction. In this setting, geometric optics is the basis of computational optics, on the basis of which various optical elements and systems are calculated. According to the second point of view, the basic expressions and the ratio of the apparatus of geometric optics are inherently approximate solutions of wave equations. Moreover - which is essential - in many cases, such illustrations facilitate their analysis.*

*Further development of the concept of ray-wave dualism is possible on the basis of the concept of modeling and illustration of the geometric shapes of the corresponding phases of the waves (incident and reflected). The method proposed by O. Podgorny [1] is based on a graphic modeling apparatus based on the concept of ortotomic. In particular, when reflected from an ortotomic specified on the plane of the line, there is an envelope of a one-parameter set of circles touching a circle as a certain phase of a "point" source, and whose centers are located on the reflective curve. A circle and ortotomic on a plane are the fronts of two waves - respectively, incident and reflected. These studies are important in solving problems in the field of architectural and construction physics and solar technology, which require the further development of constructive methods for modeling the reflected streams of sound or light. This can be done by combining the wave and beam interpretations of the propagation of vibrations in isotropic media.*

*Keywords: ray-wave dualism; point source of rays; ortotomic; wave front; streams of sound or light.*