УДК 519.21 **Наголкіна З.І.**, канд. ф-м. наук доц.

СХЕМА МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ ЛІНЕАРІЗАЦІЇ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Київський національний університет будівництва і архітектури

В даній роботі розглядається метод мультиплікативної лінеаризації випадкового процесу, який є розв'язком нелінійного стохастичного диференціального рівняння. Цей метод можна інтерпретувати, як метод наближеного обчислення , який спрощує дослідження відповідного нелінійного рівняння.

Ключові слова: функціональний простір; випадковий процес; мультиплікативність; стохастичне рівняння; нелінійні коефіцієнти; диференціювання; алгебра; підалгебра; норма;, вимірність; еволюційний; оператор; еквівалентність; границя; неперервність; умовне математичне сподівання.

При дослідженні надійності будівельних споруд буває необхідним враховувати різні випадкові фактори. Як правило, це вплив атмосферних явищ на технологічні характеристики конструктивних елементів. Одна з математичних моделей, яка дає можливість це врахувати, є стохастичне диференціальне рівняння. Теорія стохастичних рівнянь в скінченновимірному і в функціональному просторі була розвинена відповідно в [1] і [2].

У роботі розглядається метод мультиплікативної лінеаризації випадкового процесу, який є розв'язком нелінійного стохастичного диференціального рівняння. Цей метод може інтерпретуватись, як метод наближеного обчислення, який дещо спрощує дослідження відповідного рівняння.

Розглянемо в нескінченновимірному гільбертовому просторі H стохастичне диференціальне рівняння в формі Іто

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a\big(s, x(s)\big)ds + \int_{t_0}^{t} b\big(s, x(s)\big)dw(s) \tag{1}$$

Введемо необхідні позначення. (Ω,□,P) -імовірнісний простір, $\mathcal{F}_t$ - потік σ −підалгебр σ–алгебри □ стандартним чином узгоджений з вінеровським процесом w(t), $\mathcal{H}_t$ – банахів простір $\mathcal{F}_t$ вимірних випадкових величин зі значеннями в H і нормою

$$\|x\|^2_{\mathcal{H}} = sup\,\mathrm{E}\|x(s)\|^2_H,\ s \in [t_0, T].$$

Коефіцієнти $a\big(s, x(s)\big) \in H$, $b\big(s, x(s)\big)\, \epsilon \Upsilon_2(H)$,($\Upsilon_2(H)$ – простір операторів Гільберта-Шмідта) $\mathcal{F}_s$ – вимірні функції, що задовольняють умовам

$$\|a(s,x)\|^2 + \sigma^2 b(s,x) \le k_1\|x\|^2 + k_2 \quad (2)$$

$$\|a(s,x) - a(s,y)\|^2 + \sigma^2(b\,(s,x) - b(s,y) \le k_3\|x-y\|^2 \quad (3)$$

Де σ^2 – норма в $\Upsilon_2(H)$, а $\|\cdot\|$ - норма в H, k_1, k_2, k_3 – невипадкові сталі. Згідно з класичною теорією стохастичних диференціальних рівнянь в гільбертовому просторі [2] при виконанні умов (2),(3) існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності вимірний випадковий процес, який задовольняє (1) з імовірністю 1, і мають місце оцінки

$$E_0\left\|x_{x_0}(t)\right\|^2 \le e^{\alpha_1(t-t_0)}\|x_0\|^2 + \alpha_2(t-t_0) \quad (4)$$

$$E_0\left\|x_{x_0}(t) - x_{y0}(t)\right\|^2 \le e^{\alpha_3(t-t_0)}\|x_0 - y_0\|^2 \quad (5)$$

Де сталі $\alpha_1, \alpha_{2,}\ \alpha_{\ 3}$залежать від $k_1, k_2, k_3,\ x_0, y_0 \epsilon\ \mathcal{H}_{t_0}$.

Позначимо T(t,t_0) $: \mathcal{H}_{t_0} \to \mathcal{H}_t$відображення, яке визначається розв'язком рівняння (1) за формулою $x(t) = T(t, t_0, x_0) = T(t, t_0)\cdot x_0$.

Це нелінійне відображення називають розрішаючим оператором рівняння (1).

Для подальшого розглядання сформулюємо деякі факти, пов'язані з теорією еволюційних сімей розрішаючих операторів. Під стохастичною сім'єю еволюційних відображень розуміють двопараметричну сім'ю відображень

U(t,τ): $\mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_t$, t,$\tau \epsilon [t_0, T]$. Суперпозиція таких відображень означає, що з імовірністю 1 справедливе співвідношення

$$\mathrm{U}(t,\tau)\cdot V(\tau, s)\cdot x = U(t, \tau, V(\tau, s, x))$$

$x \epsilon \mathcal{H}_s,\ V(\tau, s)\cdot x \epsilon \mathcal{H}_\tau,$ U(t,τ)$\cdot V(\tau, s)\cdot x\ \epsilon \mathcal{H}_t$.

Позначимо $M_{[t_0,T]}$ клас стохастичних сімей відображень U(t,τ), які задовольняють наступним умовам

$$\mathrm{U}(t,\tau):\ \mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_t\ , E_\tau\|U(t,\tau)\cdot x\ \ \|^2 \le c_1\|x\|^2 + c_2,$$

де c_1, c_2 невипадкові сталі , $x \epsilon \mathcal{H}_\tau,\ E_\tau -$ умовне математичне сподівання. Стохастична сім'я відображень називається мультиплікативною, якщо з імовірністю 1 має місце співвідношення

$$\mathrm{U}(t,s)\cdot U(s,\tau)\cdot x = U(t,\tau)\cdot x$$

$$U(\tau,\tau)\cdot x = x,\ x \epsilon \mathcal{H}_\tau, s \epsilon [\tau, t]\ .$$

Розглянемо розбиття відрізку $[t_0, T\ ]$ точками $q: t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_{n+1} = T$.

$$U_q(t,\tau)\cdot x = \prod_{k=0}^{n} U(t_{k+1}, t_k)\cdot x.$$

Якщо існує границя, яка не залежить від розбиття, то сім'я U(t,τ) називається еволюційною

$$\mathrm{U}(t,\tau)\cdot x = P - \lim_q U_q(t,\tau)\cdot x.$$

Має місце лема, доведення якої наведено в [3].

Лема. Нехай U_q, V_q дві мультиплікативних сім'ї відображень. $U_q \epsilon M_{[t_0,T]}$.Тоді, якщо виконуються умови

$$E_k\|V(t_{k+1},t_k)\cdot x - V(t_{k+1},t_k)\cdot y\|^2 \le e^{\beta_1(t_{k+1}-t_k)}\|x-y\|^2, \quad (6)$$

$$E_k\|V(t_{k+1},t_k)\cdot x - U(t_{k+1},t_k)\cdot x\|^2 \le (\beta_2\|x\|^2+\beta_3)\varepsilon(\Delta_k t)|\Delta_k t|^2, \quad (7)$$

Де $\varepsilon(\Delta_k t) \to 0$ при $\max_k |t_{k+1}-t_k| \to 0$.

Тоді із існування границі

$$\text{P-}\lim_q U_q\,(t,t_0)\cdot x = \widetilde{U}(t,t_0)\cdot x$$

випливає існування

$$\text{P-}\lim_q V_q\,(t,t_0)\cdot x = \tilde{V}(t,t_0)\cdot x, \text{ і } \widetilde{U}(t,t_0)\cdot x = \tilde{V}(t,t_0)\cdot x$$

з точністю до стохастичної еквівалентності.

З існування єдиного розв'язку стохастичного рівняння (1) випливає, що розрішаючий оператор (1) $T(t,t_0)\epsilon M_{[t_0,T]}$ і існує границя вигляду

$$x(t)=\mathrm{P}-\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n} T(t_{k+1},t_k)\cdot x_0. \quad (8)$$

Таким чином згідно з наведеною лемою, аби показати, що розв'язок рівняння (1) допускає мультиплікативні представлення у вигляді інших операторів, треба перевірити виконання вимог леми .

Розкладемо коефіцієнти рівняння (1) за формулою Тейлора на елементарному відрізку $[t_{k+1},t_k]$

$$a\big(t,x(t)\big) \approx a(t,x_k) + a'_x(t,x_k)(x(t)-x_k) + R_a \quad (9)$$

$$b\big(t,x(t)\big) \approx b(t,x_k) + b'_x(t,x_k)(x(t)-x_k) + R_b \quad (10)$$

R_a , R_b - залишкові члени в формулі Тейлора у вигляді Лагранжа.

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння на відрізку $[t_{k+1},t_k]$.

А саме

$$y(t) = x_k + \int_{t_k}^{t} a'_x(s,x_k)y(s)ds + \int_{t_k}^{t} b'_x(s,x_k)(y(s),dw(s)) + \int_{t_k}^{t} a(s,x_k) - a'(s,x_k)x_k ds \ + \int_{t_k}^{t} b(s,x_k) - b'(s,x_k)x_k dw(s)) \quad (11)$$

При цьому

$\mathrm{A}(s)= a'_x(s,x_k)\epsilon L(H),\ B(s) = b'_x(s,x_k)\epsilon L_2\big(H,\ \Upsilon_2(H)\big)$, $a(s,x_k) - a'(s,x_k)x_k\epsilon H,\ b(s,x_k) - b'(s,x_k)x_k\epsilon\ \Upsilon_2(H)$ - $\mathcal{F}_s$ – вимірні функції.

Теорема. Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умовам (2), (3) і мають ліпшицеві рівномірно обмежені перші похідні по x і $E\|x_0\|^4 < \infty$. Тоді розв'язок рівняння (1) допускає мультиплікативне представлення вигляду

$$x(t) = P - \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n} S(t_{k+!},t_k)\cdot x_0 \quad (12)$$

де $S(t_{k+!}, t_k)$ - розрішаючий оператор лінійного неоднорідного рівняння на відрізку $[t_{k+1}, t_k]$

$$\mathrm{S}(t_{k+1,}t_k)\cdot x_k = x_k + \int_{t_k}^{t} a'_x(s,x_k) S(s,t_k)\cdot x_k ds + \int_{t_k}^{t} b'_x(s,x_k)(S(s,t_k)\cdot x_k, dw(s)) + \int_{t_k}^{t} a(s,x_k) - a'(s,x_k)x_k ds + \int_{t_k}^{t} b(s,x_k) - b'(s,x_k)x_k dw(s)) \quad (13)$$

Доведення представлення (12) полягає в перевірці умов леми для двох розрішаючих операторів $\mathrm{S}(t_{k+1,}t_k)$ і $T(t_{k+1}, t_k)$. Умова (6) безпосередньо випливає з ліпшицевості коефіцієнтів. Для перевірки умови (7) скористаємось формулою Лагранжа для залишкового члена і отримаємо такі оцінки

$\Delta_k = E_k \left\| T\big((t_{k+1,}t_k)\big)\cdot x_k - \mathrm{S}((t_{k+1,}t_k)\cdot x_k \right\|^2 \quad \le 2(\sigma_1 + \sigma_2)$

Де $\sigma_1 = E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (a(s, T(s,t_k)\cdot x_k) - a'_x(s,x_k) S(s,t_k)\cdot x_k - (a(s,x_k) - a'(s,x_k)x_k) ds \right\|^2$,

$\sigma_2 = E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b(s, T(s,t_k)\cdot x_k) - b'_x(s,x_k) S(s,t_k)\cdot x_k - (b(s,x_k) - b'(s,x_k)x_k) dw(s) \right\|^2$

Враховуючи залишкові члени у формі Лагранжа

$\sigma_1 \le \mathrm{const} E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} R_a ds \right\|^2 + \mathrm{const}\, \Delta_k t \int_{t_k}^{t_{k+1}} E_k \| T(s,t_k)\cdot x_k - \mathrm{S}(s,t_k)\cdot x_k \|^2 \mathrm{ds}$

$\sigma_2 \le const E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} R_b dw(s) \right\|^2 + \mathrm{const} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E_k \| T(s,t_k)\cdot x_k - \mathrm{S}(s,t_k)\cdot x_k \|^2 ds$

$$E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} R_a ds \right\|^2 = E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_0^1 [a'_x(s, x_k + \theta(x(s) - x_k) - a'_x(s,x_k)](x(s) - x_k) d\theta ds \right\|^2$$

$$E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} R_b dw(s) \right\|^2 = E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_0^1 [b'_x(s, x_k + \theta(x(s) - x_k) - b'_x(s,x_k)](x(s) - x_k) d\theta dw(s) \right\|^2$$

Враховуючи оцінку четвертого моменту, маємо

$$E_k\|x(s)-x_k\|^4 \le (s-t_k)^2(c_1+c_2\|x_k\|^4)$$

$$\Delta_k = E_k\left\|T\big((t_{k+1,}t_k)\big)\cdot x_k - \mathrm{S}((t_{k+1,}t_k)\cdot x_k\right\|^2 \le const(t_{k+1}-t_k)^3 + \mathrm{const}\int_{t_k}^{t_{k+1}} E_k\|T(s,t_k)\cdot x_k - \mathrm{S}(\mathrm{s},t_k)\cdot x_k\|^2 ds.$$

Використовуючи далі лему Гронуола, отримаємо відповідну оцінку, а саме

$$E_k\left\|T\big((t_{k+1,}t_k)\big)\cdot x_k - \mathrm{S}((t_{k+1,}t_k)\cdot x_k\right\|^2 \le \mathrm{co}nst(t_{k+1}-t_k)^3.$$

А це і означає, що розв’язок нелінійного стохастичного рівняння з імовірністю 1 може бути наближено виражений як добуток процесів, лінеаризованих послідовно на елементарних проміжках.

Література

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов ,т. 3, Изд. Наука, Москва,1975.
2. *Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Изд. Наука, 1983.
3. *Белопольская Я.И., Наголкина З.И.* О мультипликативных представлениях решений стохастических уравнений. Доклады АН УССР, 1977, сер. А, №11.

СХЕМА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Наголкина З.И.
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

В данной работе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве. Это естественная ситуация при моделировании физической системы, имеющей возмущения типа белого шума. Уравнение, описывающее такой процесс, является нелинейным стохастическим уравнением в форме Ито. В данной работе рассматривается метод мультипликативной линеаризации такого уравнения. С этой целью временной промежуток существования решения разбивается на элементарные таким образом, что диаметр максимального разбиения стремится к нулю. На каждом из этих промежутков нелинейные коэффициенты уравнения разлагаются в ряд Тейлора. Это становится возможным при выполнении дополнительных условий на коэффициенты уравнения. Требуется, чтобы коэффициенты обладали липшицевыми равномерно ограниченными производными первого и второго порядка, а также, чтобы четвертый момент начального значения был ограничен. Проверяются условия леммы об эквивалентности двух мультипликативных представлений. Одним из этих мультипликативных семейств является стохастическое сильно непрерывное эволюционное семейство разрешающих операторов исходного уравнения. Другое семейство – это произведение разрешающих операторов линейных уравнений на соответствующих элементарных временных промежутках. При выполнении дополнительных условий на коэффициенты уравнения существует единственное с точностью до стохастической эквивалентности решение линейного неоднородного уравнения. Воспользовавшись формой Лагранжа для остаточных членов при разложении в ряд Тейлора и леммой Гронуола, проверено выполнение условий леммы, и тем самым доказано представление решения в виде произведения линейных процессов на каждом элементарном промежутке. Это мультипликативное произведение может быть интерпретировано как приближенное решение.

Ключевые слова: функциональное пространство; случайный процесс; мультипликативность; стохастическое уравнение; нелинейные коэффициенты; дифференцирование; алгебра; под алгебра; норма; измеримость; эволюционный оператор; эквивалентность; предел; непрерывность; условное математическое ожидание.

SCHEME OF MULTIPLICATIVE LINEARIZATION OF A RANDOM PROCESS

Nagolkina Z.I.
Kiev National University of Construction and Architecture

In this paper, we consider a stochastic differential equation in a Hilbert space. This is a natural situation when modeling a physical system having disturbances such as white noise. The equation describing such a process is a nonlinear stochastic equation in the form of Ito. In this paper, we consider the method of multiplicative linearization of such an equation. To this end, the time interval for the existence of a solution is divided into elementary ones in such a way that the diameter of the maximum partition tends to zero. At each of these intervals, the nonlinear coefficients of the equation are expanded in a Taylor series. This becomes possible when additional conditions for the coefficients of the equation are satisfied. It is required that the coefficients have Lipschitz uniformly bounded first and second order derivatives, and also that the fourth moment of the initial value be bounded. The conditions of the equivalence lemma of two multiplicative representations are verified. One of these multiplicative families is a stochastic strongly continuous evolutionary family of resolving operators of the original equation. Another family is the product of the resolving operators of linear equations on the corresponding elementary time intervals. Under the additional conditions on the coefficients of the equation, there exists a unique, up to stochastic equivalence, solution of a linear inhomogeneous equation. Using the Lagrange form for the remainder terms when expanding in a Taylor series and the Gronwall lemma, the conditions of the lemma are verified and the solution is proved to be a product of linear processes on each elementary interval. This multiplicative product can be interpreted as an approximate solution.

Keywords: functional space; random process; multiplicativity; stochastic equation; nonlinear coefficients; differentiation; algebra; subalgebra; norm; measurability; evolutionary; operator; equivalence; limit; continuity; conditional mathematical expectation.