УДК 004.925.8
DOI: 10.32347/0131-579x.2020.98. 29-34

В.В. Ванін, д.т.н., проф.
Г.А. Вірченко, д.т.н., проф.
П.М. Яблонський, к.т.н., доц.

ДО ПИТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ КРИВИХ БЕЗЬЄ

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна

У наш час геометричне моделювання є одним із базових компонентів комп'ютерних інформаційних технологій. Зазначений факт обумовлений простотою, наочністю та зручністю використання графічних засобів. Тому подальше вдосконалення методів, способів, прийомів й алгоритмів геометричного моделювання становить актуальну науково-прикладну проблему.

У нинішніх комп'ютерних графічних системах доволі широко застосовуються криві Безьє. Ці лінії забезпечують передбачуване формоутворення різноманітних фігур двовимірного та тривимірного геометричного моделювання, гнучке та продуктивне проведення необхідних їх модифікацій. Криві Безьє мають нескладний математичний опис, ефективно реалізуються комп'ютерними програмно-технічними засобами.

Дану статтю присвячено задачі обчислення площ криволінійних трапецій, обмежених зазначеними лініями. При цьому докладно розглянуто запропонований математичний апарат, визначено його переваги порівняно з існуючими методами, наведено належні приклади, окреслено перспективні напрямки практичного застосування. Напрацьовані результати можуть бути впроваджені для покращення різноманітних засобів комп'ютерної графіки.

Ключові слова: геометричне моделювання; комп'ютерні інформаційні технології; криві Безьє, площі криволінійних трапецій.

Постановка проблеми. Нині геометричне моделювання є однією з фундаментальних складових комп'ютерних інформаційних технологій, що обумовлено простотою, наочністю та зручністю використання графічних засобів у багатьох сферах життєдіяльності людини. Тому створення нових і вдосконалення існуючих методів, способів, прийомів та алгоритмів геометричного моделювання становить важливу науково-прикладну проблему. Це стосується автоматизованого проектування різноманітних технічних виробів, комп'ютерних систем наукових досліджень, сучасного промислового, медичного та побутового обладнання, розважальних графічних ігор і т. д.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Прикладом застосування кривих Безьє для проектування технічних об’єктів є публікації [1-3], де проаналізовано питання формоутворення поверхонь крила та фюзеляжу сучасного літака. Теоретичні основи геометричного моделювання даними кривими наведено у праці [4]. Відомості стосовно обчислення площі криволінійної трапеції містить видання [5].

Формулювання цілей та завдання статті. Метою даної публікації є подання розробленого математичного апарату для розрахунку площ криволінійних трапецій, обмежених кривими Безьє третього степеня, аналіз відповідних прикладів та визначення перспектив практичного використання запропонованого підходу в сучасних комп’ютерних інформаційних технологіях.

Основна частина. Кубічна крива Безьє (рис. 1) у декартовій системі координат *Oxy* визначається векторним параметричним рівнянням

$$r(u) = (1-u)^3 r_0 + 3u(1-u)^2 r_1 + 3u^2(1-u) r_2 + u^3 r_3, \tag{1}$$

де $\mathbf{r}_0(x_0,\ y_0)$, $\mathbf{r}_1(x_1,\ y_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2,\ y_2)$, $\mathbf{r}_3(x_3,\ y_3)$ – радіуси-вектори вершин характеристичної ламаної, яка в даному випадку є опуклою та однозначною, що забезпечує відповідну властивість кривої [6]; $u \in [0,\ 1]$ – параметр.

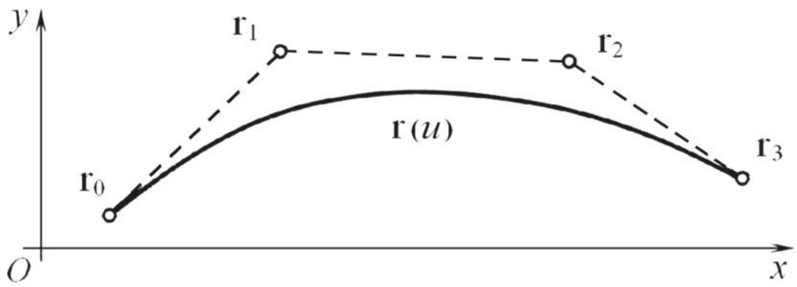

Рис. 1. Плоска опукла крива Безьє третього степеня

Згідно з виданням [5] площа *S* криволінійної трапеції, що обмежена параметричною кривою $\mathbf{r}(u)$, визначається наступним чином

$$S = \int_{u_1}^{u_2} \mathrm{r}_y(u)\dot{\mathrm{r}}_x(u)du, \tag{2}$$

де $\mathrm{r}_x(u)$ та $\mathrm{r}_y(u)$ – це $x(u)$ та $y(u)$ координати радіуса-вектора $\mathbf{r}(u)$.

Для залежності (1) маємо

$$r_y(u) = (1-u)^3 y_0 + 3u(1-u)^2 y_1 + 3u^2(1-u) y_2 + u^3 y_3, \tag{3}$$

$$r_x(u) = -3(1-u)^2 x_0 + (3-12u+9u^2) x_1 + (6u-9u^2) x_2 + 3u^2 x_3, \tag{4}$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1. \tag{5}$$

Підставляємо до формули (2) значення виразів (3) ... (5) та за допомогою інтегрування отримуємо

$$S = K \cdot X \cdot Y, \tag{6}$$

де $K = (K_1, K_2, K_3, K_4, K_6)$, $K_1 = \int\limits_0^1 (1-u)^5 du = 1/6$, $K_2 = \int\limits_0^1 u(1-u)^4 du = 1/30$,

$$K_3 = \int\limits_0^1 u^2 (1-u)^3 du = 1/60,\ K_4 = \int\limits_0^1 u^3 (1-u)^2 du = 1/60,\ K_5 = \int\limits_0^1 u^4 (1-u) du = 1/30,$$

$$K_6 = \int\limits_0^1 u^5 du = 1/6;\ \ X_1=3(x_1-x_0),\ \ X_2=6(x_2-x_1),\ \ X_3=3(x_3-x_2),$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 3X_1 & 0 & 0 \\ X_3 & 3X_2 & 3X_1 & 0 \\ 0 & 3X_3 & 3X_2 & X_1 \\ 0 & 0 & 3X_3 & X_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 \end{pmatrix};\quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, нами замінено обчислення інтеграла (2) для розрахунку площі криволінійної трапеції, обмеженої кубічною кривою Безьє, добутком (6) трьох матриць, перша K із яких містить сталі числові коефіцієнти, друга X та третя Y визначаються відповідно абсцисами й ординатами вершин характеристичної ламаної.

Проаналізуємо приклад практичного використання запропонованого підходу. На рис. 2 показано поперечний переріз крила між стінками лонжеронів (крайній лівий та правий вертикальні відрізки). Верхня й нижня теоретична поверхня сформовані кривими Безьє третього степеня $\mathbf{r}_{в}(u)$ та $\mathbf{r}_{н}(u)$ вигляду (1). Координати в міліметрах

$$\mathbf{r}_{0в}=(x_{0в}, y_{0в})=(300, 800),\ \ \mathbf{r}_{1в}=(x_{1в}, y_{1в})=(1200, 890),$$

$$\mathbf{r}_{2в}=(x_{2в}, y_{2в})=(2200, 890),\ \ \mathbf{r}_{3в}=(x_{3в}, y_{3в})=(3300, 700);$$

$$\mathbf{r}_{0н}=(x_{0н}, y_{0н})=(300, 400),\ \ \mathbf{r}_{1\,н}=(x_{1н}, y_{1н})=(1200, 310),$$

$$\mathbf{r}_{2н}=(x_{2н}, y_{2н})=(2200, 310),\ \ \mathbf{r}_{3н}=(x_{3н}, y_{3н})=(3300, 400). \tag{7}$$

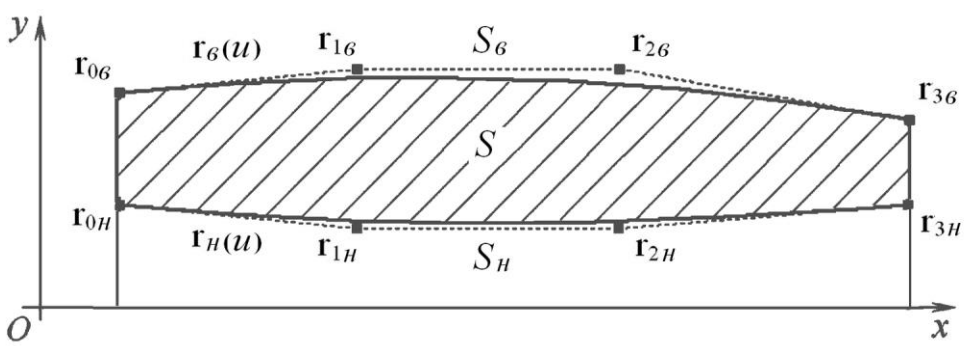

Рис. 2. Поперечний переріз кесона крила літака

Зі схеми рис. 2 видно, що необхідна площа S розраховується як різниця між площею $S_в$ верхньої та $S_н$ нижньої криволінійних трапецій

$$S = S_в - S_н. \tag{8}$$

На підставі формул (6) … (8) отримуємо

$$S = S_в - S_н = 2{,}4555\ м^2 - 1{,}065\ м^2 = 1{,}3905\ м^2.$$

Розв’язати розглянуту задачу можна й іншими способами, наприклад, чисельним інтегруванням методами прямокутників та трапецій. Перевагами запропонованого підходу є суттєве зменшення кількості математичних обчислень і точний результат. Так під час застосування методу трапецій для визначення площі $S_в$ із кроком уздовж осі абсцис 0,1 мм, тобто розбиття довжини кесона на 30 тисяч ділянок, одержано величину $S_в \approx 2{,}43\ м^2$. Похибка становить приблизно 155 см^2. Підвищення точності та продуктивності обчислень доволі важливе при оптимізаційних варіантних ітераційних розрахунках складних технічних виробів, зокрема сучасного літака, де подібних до проаналізованих прикладів виконується сотні тисяч.

На завершення коротко зупинимось на питанні можливості подальшого підвищення обчислювальної продуктивності викладеного математичного апарату, але комп’ютерними програмними засобами. Базова ідея полягає у виключенні з опрацювання нульових елементів матриці X формули (6) заміною добутку $K \cdot X$ циклом

$$M(i) = m(i)(K(i)X_1 + K(i+1)X_2 + K(i+2)X_3),\ m = (1, 3, 3, 1),\ i = 1 \ldots 4,$$

на основі якого створюється матриця-рядок M, що множиться на матрицю Y для визначення потрібної площі S.

Висновки. У даній статті подано розроблений математичний апарат обчислення площ криволінійних трапецій, обмежених кубічними кривими Безьє, наведено належні приклади та визначено перспективи практичного використання запропонованого підходу в сучасних комп’ютерних інформаційних технологіях.

Література

1. *Ванін І.В., Вірченко Г.А.* Геометричне моделювання аеродинамічних профілів кривими Безьє третього порядку. Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2004. Вип. 4. Т. 26. С. 91-95.

2. *Ванін І.В., Вірченко Г.А.* Геометричне моделювання крила літака на стадії ескізного проектування з використанням кривих Безьє третього порядку. Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2006. Вип. 4. Т. 31. С. 89-95.

3. *Вірченко Г.А.* Параметричне моделювання теоретичної поверхні хвостової частини фюзеляжу пасажирського літака. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КНУБА, 2015. Вип. 93. С. 10-13.

4. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. Москва: Мир, 2001. 604 с.

5. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. Москва: Наука, 1985. 432 с.

6. *Вірченко Г.А.* Проектування плоских обводів із використанням кривих Безьє третього порядку. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КНУБА, 2003. Вип. 72. С. 119-123.

К ВОПРОСУ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИВЫХ БЕЗЬЕ

В.В. Ванин, Г.А. Вирченко, П.Н. Яблонский
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського

В наше время геометрическое моделирование является одним из базовых компонентов компьютерных информационных технологий. Указанный факт обусловлен простотой, наглядностью и удобством использования графических средств во многих сферах жизнедеятельности человека. Поэтому дальнейшее совершенствование методов, способов, приемов и алгоритмов геометрического моделирования является важной научно-прикладной проблемой. Это относится к автоматизированному проектированию различных изделий, компьютерным программам научных исследований, современному промышленному, медицинскому и бытовому оборудованию, развлекательным играм и т. д.

В нынешних компьютерных графических системах довольно широко используются кривые Безье. Это касается всех перечисленных выше сфер применения. Данные линии обеспечивают интуитивно понятное, хорошо прогнозированное формообразование различных фигур при двумерном и трехмерном геометрическом моделировании, гибкое и производительное проведение при этом необходимых модификаций. Кривые Безье имеют несложное математическое описание, эффективно реализуются компьютерными программно-техническими средствами.

Данная статья посвящена вычислению площадей криволинейных трапеций, ограниченных указанными линиями. Такие задачи довольно часто встречаются в инженерной практике. Например, это расчеты площадей поперечных сечений различных проектируемых конструктивных элементов технических объектов. При этом в публикации подробно рассмотрен предложенный математический аппарат, указаны его преимущества по сравнению с существующими методами, приведены соответствующие примеры, определены перспективные направления практического применения в компьютерных информационных технологиях. В работе проанализированы линии третьей степени, как наиболее широко используемые. Согласно изложенному подходу имеющиеся материалы легко обобщаются на кривые Безье более высоких степеней. Таким образом, рассмотренные результаты могут быть успешно внедрены для дальнейшего совершенствования разнообразных компьютерных средств современного геометрического моделирования.

Ключевые слова: геометрическое моделирование; компьютерные информационные технологии; кривые Безье; площади криволинейных трапеций.

TO THE QUESTION OF GEOMETRIC MODELING USING BEZIER CURVES

V. Vanin, G. Virchenko, P. Yablonskyi
National technical university of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv polytechnic institute»

Nowadays, geometric modeling is one of the basic components of computer information technology. This fact is due to the simplicity, clarity and ease of use of graphic tools in many areas of human activity. Therefore, further improvement of methods, techniques and algorithms of geometric modeling is an important scientific and technical problem. This applies to the automated design of various products, computer programs for scientific research, modern industrial, medical and household equipment, entertaining games, etc.

Bezier curves are quite widely used in current computer graphics systems. This applies to all of the above areas. These lines provide intuitive, well-predicted shaping of various figures in both two-dimensional and three-dimensional geometric modeling, flexible and productive necessary modifications. The Bezier curves have a simple mathematical description and are effectively implemented by computer software and hardware.

This article is devoted to the calculating the areas of curved trapezoids bounded by the indicated lines. Such tasks are quite common in engineering practice. For example, these are calculations of cross-sectional areas of various designed structural elements of technical objects. At the same time, the publication discusses in detail the proposed mathematical apparatus, its advantages are compared with existing methods, relevant examples are given, and perspective directions of practical application in modern computer information technologies are defined. The third degree lines are analyzed in the paper as the most widely used. According to the presented approach, the available materials are easily generalized to the Bezier curves of the higher degrees. Thus, the considered mathematical results can be successfully implemented to further improve of various computer tools for modern geometric modeling.

Key words: geometric modelling; computer information technology; Bezier curves; curved trapezoid areas.