УДК 514.1+519.6
DOI: 10.32347/0131-579x.2020.98.35-42

В.В.Ванін, д.т.н. професор
О.В. Залевска, к.т.н
Ю.В. Сидоренко, к.т.н., доцент

ДО ПИТАННЯ СТІЙКОСТІ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМ

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

При розв'язанні прикладних задач, виникає потреба в дослідженні стійкості даної математичної моделі. Такі задачі потребують аналізу результату, оцінки якості роботи систем автоматики чи управління, а також дослідження стійкості розв'язку крайових задач, що виникають в процесі дослідження. Крайові задачі з початковими та граничними умовами, так звані початково-граничні багатовимірні нестаціонарні задачі можна віднести до числа достатньо складних задач, оскільки методи розв'язання її можуть бути достатньо специфічними та не схожими на інші методи розв'язання. В результаті спочатку досліджують природу задачі та звертають особливу увагу на задані умови, щоб потім більш точно визначити необхідну інформацію, що потрібна для розв'язку початкової задачі. Кожна задача потребує математичної моделі, яка має визначити її геометрію, лінійність, параметри, область розрахунку.

Розв'язки крайових задач потребують залучення різноманітних чисельних методів розв'язку нестаціонарних багатовимірних задач. Але деякі методи не є оптимальними або ж працюють тільки для певного типу задач, а отже для інших типів не підходять. Також, залишається відкритим питання стійкості математичної моделі чисельного методу вирішення нестаціонарних задач. Є методи, які є абсолютно стійкі, а є ті, які потребують особливої уваги, так як найменша помилка в алгоритмі може привести до анулювання результату. Для методів, які не є стійкими, потрібно перевіряти стійкість на кожному кроці – це дає малу ймовірність помилки в написанні програми та різкому зростанні похибки. У більшості задач результат є досить неочікуваним, що не дозволяє дослідити стійкість математичної моделі на початку досліджень. Але такі методи є повільно збіжні, але дають змогу скоротити час на виконання задачі в декілька разів.

Ключові слова: теорія стійкості; математична модель; динамічна система; чисельні методи; крайова задача.

Постановка проблеми. В даній роботі розглянуто стійкість чисельних методів математичної моделі динамічної системи на прикладі розв'язку крайової задачі. Під крайовою задачею будемо розуміти задачу. В якій з певного класу функцій, що визначені в деякій області. Необхідно знайти ту, що задовольняє на границі області заданим умовам. Функції, що описують конкретні явища природи представляють собою рішення рівнянь математичної фізики. В зв'язку с цим постає питання про дослідження розв'язку нестаціонарної двовимірної задачі теплопровідності в прямокутній області різними методом та визначення стійкості кожного методу.

Ціль статті. Дослідити стійкість чисельних методів математичної моделі нестаціонарної двовимірної задачі теплопровідності в прямокутній порожнині.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Сучасна обчислювальна техніка і накопичений обчислювальний досвід дозволяють наближено розраховувати рішення великих і складних завдань для диференціальних рівнянь. Важливу роль при чисельних розрахунках має гарантована точність обчисленого рішення. Вона залежить від точності використовуваної комп'ютерної техніки та впливу на рішення задачі неминучих помилок вхідних даних і помилок округлення. Існують потужні пакети, що дозволяють вирішувати як аналітично, так і за допомогою чисельних методів багато завдань для звичайних диференціальних рівнянь [1]. Використання таких пакетів допомагають знаходити за допомогою чисельних методів рішення звичайних диференційних рівнянь та досліджувати їх особливості. Зустрічаються задачі для яких потрібно модифікувати старі або створювати нові методи та алгоритми. Найбільш поширені методи вирішення крайових задач можна розділити на три групи [2]:

- методи зведення до задачі Коші;
- різницеві методи;
- проекційні методи;
- варіаційні методи.

В основі таких алгоритмів лежить однакова ідея, тому їх можна називати методами стрільби, хоча, як правило, так називають лише один з них. Розв'язок навіть чітко поставленої задачі може бути нестійким при чисельному вирішенні, тобто малі помилки при введенні даних і неминучі помилки округлення можуть привести до великої похибки результату [3].

Для дослідження стійкості та точності розв'язку крайової задачі було обрано методи, що базуються на наступних принципах:

- найпопулярніший метод;
- загальний метод;
- метод, що базується на специфіці досліджень.

Для дослідження було обрано метод стрільби, метод Гальоркіна та метод найменших квадратів відповідно [5]. Ці методи широко використовуються при аналітичних розрахунках математичних та фізичних процесах, при автоматизації роботи розрахункової техніки та при автоматизації промисловості.

Основана частина. Розглянемо нестаціонарну двомірну задачу теплопровідності в прямокутній області з розмірами $a = 0.5$ м і $b = 0.5$ м, в якій генерується теплова енергія з питомою потужністю $g = 2.0 \cdot 10^5$ В/м^3. Ліва межа області розсіює тепло з постійним коефіцієнтом теплопередачі $h_Л = 400$ Вт/(м^2·град) в навколишнє середовище з температурою $T_{Л,\infty} = 20$ ^oC, а права межа розсіює тепло з тепловим потоком $Q_П = 1000$ Вт/м^2. Нижня межа розсіює тепло з постійним коефіцієнтом теплопередачі $h_Н = 100$ Вт/(м^2·град) в навколишнє середовище з температурою $T_{Н,\infty} = 50$ ^oC, а верхня поверхня розсіює тепло з тепловим потоком $Q_В = 1500$ Вт/м^2. Математична модель даної задачі зводиться до розв'язку змішаної задачі в прямокутній системі координат

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g(x)}{k}$$

з граничними та початковими умовами

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} + h_Л T(0,y,t) = h_Л T_{Л,\infty}, \qquad 0 \le y \le b, \qquad t > 0,$$

$$k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=a} = -Q_П, \qquad 0 \le y \le b, \qquad t > 0,$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{y=0} + h_Н T(x,0,t) = h_Н T_{Н,\infty}, \qquad 0 \le x \le a, \qquad t > 0,$$

$$k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=b} = -Q_В, \qquad 0 \le x \le a, \qquad t > 0,$$

$$T(x,y,0) = T^0, \qquad 0 \le x \le a, \qquad 0 \le y \le b,$$

Для даної задачі:

1. Сформовано систему вузлових точок, розділивши простір в області на 50 рівних чистин в горизонтальному і вертикальному напрямках.
2. Використовуючи кінцеві різниці другого порядку, сформульовано кінцево-різницеві представлення вибраних методів вирішення нестаціонарної двомірної задачі теплопровідності.
3. Визначено критерій стійкості методів
4. Проведено чисельне вирішення отриманої системи рівнянь обраними методами.

Нехай поставлена задача має єдиний розв'язок в певній області, що залежить від вхідних даних. Метод стрільби розглядається для нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь. Це пояснюється тим, що диференціальне рівняння будь-якого порядку зводиться до еквівалентної нормальної системи.

Стійким будемо називати алгоритм в якому будь-яке збудження ε, внесене на поточному часовому кроці та на наступному задовольняє співвідношення:

$$\left|\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^{n}}\right| \le 1.$$

Для дослідження стійкості необхідно на кожному кроці алгоритму внести збудження ε і прослідкувати його розвиток на наступних кроках.

Розглянемо рішення крайової задачі теплопровідності. Внесемо збудження $\varepsilon_{i-1,j}^{n+1}$ при $i=i-1$, тоді отримаємо формулу для підрахунку

$$\mathrm{T}_{i-1,j}^{n+1}+\varepsilon_i^{n+1}=(1-4\beta)(T_{i-1,j}^{n}+\varepsilon_i^{n})+\beta[\mathrm{T}_{i,j}^{n}+\varepsilon+\mathrm{T}_{i-2,j}^{n}+\mathrm{T}_{i-1,j+1}^{n}+\mathrm{T}_{i-1,j-1}^{n}]+\frac{\beta G_{i-1,j}^{n}\delta^{2}}{k},$$

а початкове збудження на поточному n-му часовому кроці та його розповсюдження на наступному (n+1)-му часовому кроці в двовимірній нестаціонарній крайовій задачі зобразимо схематично на рис. 1.

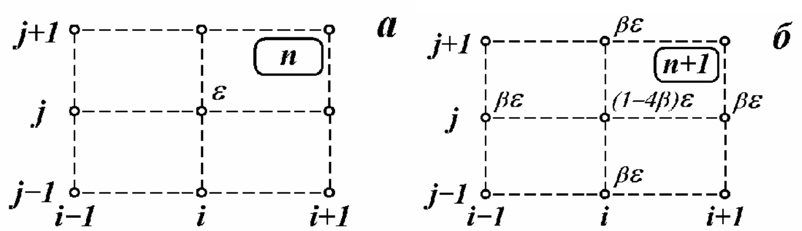

Рис.1. Початкове збудження на поточному n-му часовому кроці: *а*) та його розповсюдження на наступному (n+1)-му часовому кроці *б*)в методі рішення двомірної нестаціонарної початково-крайової задачі

Виконавши відповідні перетворення отримуємо формулу для підрахунку збудження:

$$\varepsilon_{i,j}^{n+2}=4\beta^{2}\varepsilon+(1-4\beta^{2})\varepsilon=[1-8\beta+20\beta^{2}]\varepsilon\approx(1-8\beta)\varepsilon, \tag{1}$$

Звідси випливає, що

$$\left|\frac{\varepsilon_{i,j}^{n+2}}{\varepsilon_{i,j}^{n+1}}\right| = |1-8\beta| \le 1, \qquad (2)$$

Перша умова є умовою статичної стійкості, а другу умови називають **умовою періодичної стійкості** методу для двовимірної задачі з початковими та крайовими умовами. Результати дослідження занесемо до таблиці 1.

Таблиця 1.

Значення абсолютної похибки, часу затраченого на виконання методу в секундах та стійкість методу стрільби, методу Гальоркіна та методу найменших квадратів при розв’язанні крайової задачі

	Метод стрільби	Метод Гальоркіна	Метод найменших квадратів
Абсолютна похибка методу	0,0087517	0,04250485	0,063028
Стійкість методу при вказаних крайових умовах	Статистично стійкий	Періодично стійкий	Стійкий
Час, затрачений на виконання методу в секундах	0,002001	0,004983	0,042885

Для статистичних крайових задач краще використовувати метод стрільби, оскільки він для цих задач є стійким та найшвидшим. Для задач, розв’язками яких є періодичні функції можливо використовувати метод Гальоркіна, а для інших задач можливо використовувати метод неменших квадратів, оскільки він є стійким. Недоліком методу найменших квадратів є час виконання який є майже в 22 рази повільніший ніж метод стрільби.

Висновки та перспективи. Метод Гальоркіна і найгіршому випадку розв’язує крайову задачу за 0.004983 секунди з абсолютною похибкою 0.0450485 одиниці. Метод найменших квадратів є повільніший за метод Гальоркіна та має досить високу похибку, даний метод не є раціональним для будь-якої крайової задачі. Метод стрільби має найменшу похибку та є найшвидшим. Для стаціонарних крайових задач краще використовувати даний метод.

Література

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. Москва : Наука, 1978. – 512с.3.
2. *Лук'яненко С.О.* Чисельні методи в інформатиці: навч. посібн. Київ : Політехніка, 2007. – 140с.
3. Chapra S., Canale R. Numerical Methods. – 7th Edition. – McGraw-Hill Education, 2014. – 992 p. http://libgen.io/book/index.php?md5=4B1C96F1187FBDC0184EB1856D06A1E4.
4. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Пер. с англ. Москва : Наука, 1986. – 288 с. http://libgen.io/book/index.php?md5=0223DC7FDE5DF081DFC72EC4AD88263D.
5. Основы численных методов / Л.И. Турчак. Москва :Наука, 1987. – 320 с. http://libgen.io/book/index.php?md5=93EC48A0D912FA4F12247CDD42BD5532.

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В.Ванин, О.В. Залевська, Ю.В. Сидоренко

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

При решении прикладных задач, возникает потребность в исследовании устойчивости данной математической модели. Такие задачи требуют анализа результата, оценки качества работы систем автоматики или управления, а также исследования устойчивости решений краевых задач, возникающих в процессе исследования. Краевые задачи с начальными и граничными условиями, так называемые начально-граничные многомерные нестационарные задачи можно отнести к числу достаточно сложных задач, поскольку методы решения ее могут быть достаточно специфическими и не похожими на другие методы решения. В результате сначала исследуют природу задачи и обращают особое внимание на заданные условия, чтобы потом более точно определить необходимую информацию, которая нужна для решения исходной задачи. Каждая задача требует математической модели, которая должна определить ее геометрию, линейность, параметры, область расчета.

Решения краевых задач потребует привлечения различных численных методов решения нестационарных многомерных задач. Но некоторые методы не являются оптимальными или работают только для определенного типа задач, а значит для других типов не подходят.

Также, остается открытым вопрос, устойчивости математической модели численного метода решения нестационарных задач. Есть методы, которые абсолютно устойчивы, а есть те, которые требуют особого внимания, так как малейшая ошибка в алгоритме может привести к аннулированию результата. Для методов, которые не являются устойчивыми, нужно проверять устойчивость на каждом шагу - это дает малую вероятность ошибки в написании программы и резком росте погрешности.

В большинстве задач результат является достаточно неожиданным, что не позволяет исследовать устойчивость математической модели в начале исследований. Но такие методы являются медленно совпадающие, но позволяют сократить время на выполнение задачи в несколько раз.

Ключевые слова: теория устойчивости; математическая модель; динамическая система; численные методы; краевая задача.

ON THE STABILITY OF NUMERICAL METHODS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMIC SYSTEMS

V.V. Vanin, O.V. Zalevska, Yu.V. Sidorenko
National Technical University of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky"

When solving applied problems, there is a need to study the stability of this mathematical model. Such tasks require analyzing the result, evaluating the quality of the automation or control systems, and also studying the stability of the solutions of boundary value problems that arise in the process of research. Boundary-value problems with initial and boundary conditions, the so-called initial-boundary multidimensional non-stationary problems can be attributed to the number of rather complex problems, since the methods for solving it can be quite specific and not like other methods of solution.

As a result, they first investigate the nature of the problem and pay special attention to the given conditions in order to more accurately determine the necessary information that is needed to solve the original problem. Each task requires a mathematical model, which should determine its geometry, linearity, parameters, calculation area.

The solution of boundary value problems will require the involvement of various numerical methods for solving non-stationary multidimensional problems. But some methods are not optimal or work only for a certain type of tasks, which means they are not suitable for other types. The question of stability *of the mathematical model of the numerical method for solving non-stationary problems also remains open. There are methods that are absolutely stable, but there are those that require special attention, since the slightest error in the algorithm can lead to the cancellation of the result.*

For methods that are not sustainable, you need to check the stability at every step - this gives a low probability of errors in writing the program and a sharp increase in the error. In most problems, the result is quite unexpected, which does not allow us to study the stability of the mathematical model at the beginning of research. But such methods are slowly matching, but they allow you to spend time on the task several times.

Keywords: stability theory; mathematical model; dynamic system; numerical methods; boundary value problem