

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЬВЕНТНОГО ПРОФІЛЮ ЗУБА РЕЙКИ

*Військова академія (м. Одеса)¹
Національний університет «Одеська морська академія»²*

Пропонується геометричне моделювання зубів рейки евольвентного профілю для практичного використання в машинобудуванні, які мають просторово-складну поверхню тісно пов'язану з утворенням взаємно-огинаючих спряжених поверхонь.

Моделювання евольвентного профілю зуба рейки є головним завданням, що передує його виготовленню. Особливою складністю при моделюванні евольвентного профілю зуба рейки є виконання його методом копіра, інструментом, що спрофільований по точках кривої евольвенти.

Під час аналізу існуючих способів побудови евольвенти була встановлена складність вирішення цього завдання при визначенні кожної точки обчисленням системи рівнянь. Формування профілю зуба будь-яким способом виконується з урахуванням допустимої похибки відхилення від оптимальної форми. Отже, можна вести розрахунок евольвенти простішим наближеним способом, скорочуючи час розрахунку в сотні разів, забезпечуючи задану допустиму похибку відхилення.

Крім того можна знайти нескладне рішення, що дозволить обчислювати точно кожну точку евольвенти, виключаючи розрахунок складної системи рівнянь. Вирішення цих завдань є досить необхідним для моделювання евольвентних профілів зубів вкладишів, які виконуються у вигляді рейок, що з'єднані в замок.

У зв'язку з цим пропонуються нижче розроблені способи побудови евольвенти, що спрощують розрахунок її та моделювання евольвентного профілю зуба. Запропонований простий і точний радіально-кутовий спосіб побудови евольвенти доцільно застосовувати там, де потрібна висока точність профілювання поверхні зуба.

Моделювання зуба рейки дозволяє наочно уявити процес отримання профілю деталі, дати аналіз впливу кожного параметра на профіль і його конструктивні розміри, де без усиль можна виявити помилки профілювання спряжених кінематичних поверхонь.

Ключові слова: моделювання спряжених поверхонь; кінематичні поверхні; евольвента; моделювання зубів рейки.

Постановка проблеми. Виготовлення профілів зубів рейки, як важливого зуборізного інструменту і такого, що часто застосовується в

передачах зусилля машин, виконується методом копіра, який будується по точках кривої евольвенти. У зв'язку з цим простота, а отже, і економічність методу побудови евольвенти є головним завданням проектувальників.

Аналіз останніх досліджень. При дослідженні різних методів проектування евольвентного зубчатого зачеплення, було встановлено, що методи та способи, які існують, мають певні складнощі у практичному застосуванні у виробництві та потребують високої кваліфікації користувачів. У дослідженнях [1-4] сформульовані вимоги безперервності зачеплення спряжених поверхонь і закладені основні положення загальної теорії просторових зачеплень. Показано, що просторові зачеплення мають загальну дотичну площину і загальну нормаль. Використовувати результати досліджень практично важко оскільки вимагають побудови великого числа аксоїдів, для визначення взаємоогінаючих поверхонь. Теоретичний інтерес представляють роботи [5, 6] в яких, розглянуті завдання формування ділянок евольвенти дискретно. При цьому залишилися невирішеними питання безперервності контакту між спряженими поверхнями. Варіантом подолання відповідних труднощів можуть бути розроблені методи і алгоритми геометричного та комп'ютерного моделювання для формування зубчатого зачеплення на верстатах ЧПУ [7, 8]. Дослідники визначили проміжні регулювання верстатів, що використовуються для проектування евольвентних черв'ячних передач. Саме такий підхід використаний в роботі [9], однак застосування модифікації поверхонь знижує чутливість черв'ячної передачі. У статті пропонується варіант побудови евольвенти радіально - кутовим способом, що може зменшити контактних напружень при роботі спряжених поверхонь [10]. Розробка геометричного способу моделювання евольвентного профілю зуба рейки для обробки широкого класу складних виробів спрямована на вдосконалення та підвищення якості виробів машинобудування на стадії проектування. Аналіз літератури дозволяє стверджувати, що дослідження нового способу геометричного визначення радіально - кутовим способом, доцільні і наблизять нас, до точного і більш ефективної побудови евольвентного профілю в кінематичних парах.

Формування цілей та завдання статті. Запропоновано радіально-кутовий спосіб побудови евольвенти спряжених кінематичних поверхонь зубчастого зачеплення.

Основна частина. Радіально-кутовий спосіб побудови евольвенти розроблений координатним способом [10]. Для визначення точки $M_{(X,Y)}$ евольвенти (Рис.1), замість обчислення двох координат X та Y , пропонується визначити одне значення радіуса цієї точки за заданим кутом. З цією метою з'єднуємо точку $M_{(X,Y)}$ з початком координат у точці O , яка є центром еволюти радіусом $R_{евт}$. Опускаємо з точки $M_{(X,Y)}$ перпендикуляр MP на вісь X . Таким чином, дану точку евольвенти уклали в прямокутний

трикутник OMP , діагональ якого є радіусом евольвенти $R_{евн}^T$ заданої точки з кутом φ нахилу до вісі X .

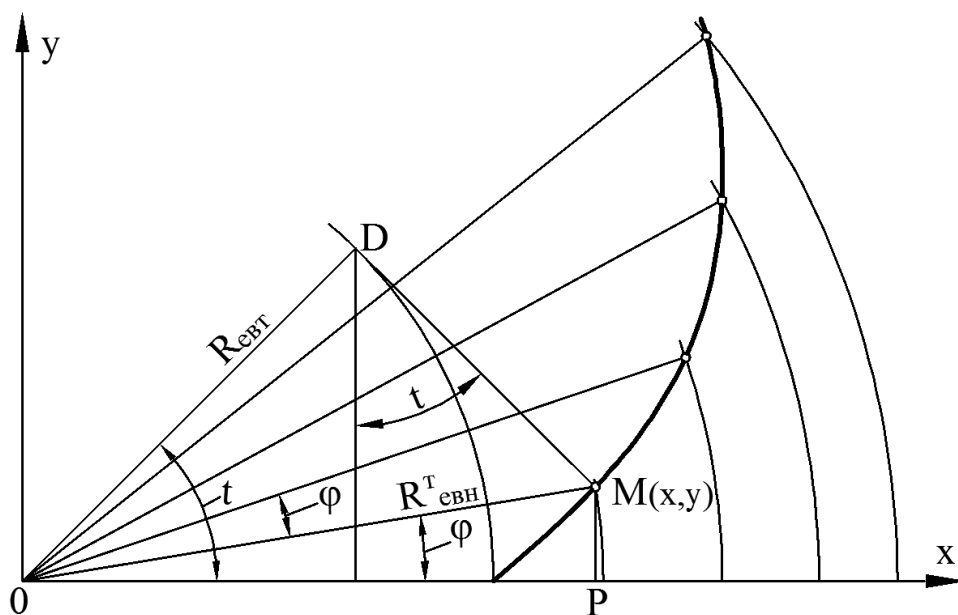


Рис. 1. Схема визначення радіально - кутовим способом радіусу $R_{евн}^T$ евольвенти за заданим кутом φ

На першому етапі розв'язання цієї задачі визначимо зв'язок між кутом φ та параметром t , що визначає декартові координати зазначеної точки. Зафіксуємо цю точку $M_{(x,y)}$ на евольвенті та на основі ΔOMP . Визначаємо тангенс кута φ :

$$tg \varphi = \frac{MP}{OP} = \frac{Y}{X}. \quad (1)$$

Встановимо залежність між кутом φ нахилу радіуса евольвенти в точці $M_{(x,y)}$ та параметром t за відомою системою рівнянь [1], що визначає декартові координати тієї ж точки. Для цього в отримане рівняння (1) Підставами замість X і Y їх значення з відомої параметричної системи рівнянь, отримаємо

$$tg \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{R \sin t - Rt \cos t}{R \cos t + Rt \sin t} = \frac{\sin t - t \cos t}{\cos t + t \sin t}$$

або

$$tg \varphi = \frac{tg t - t}{1 + t tg t} = \frac{tgt - tg(\arctg t)}{1 + t tg \cdot tg(\arctg t)} = tg(t - \arctg t).$$

Таким чином,

$$tg \varphi = tg(t - arctg t), \varphi = t - arctg t. \quad (2)$$

Одержали основну формулу, за допомогою якої визначається значення параметра t (при заданому φ), що відповідає точці евольвенти $M_{(X,Y)}$. Щоб розв'язати це рівняння, використовуємо метод дотичних Ньютона, записавши рівняння (2) у вигляді

$$\varphi(t) = \varphi_0 - t + arctg t = 0 \quad (3)$$

З огляду на, що ітераційний процес, що задається формулою Ньютона має вигляд

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\varphi(t_n)}{\varphi'(t_n)}, \quad (4)$$

Одержимо необхідну розрахункову формулу для обчислення параметра t . Отже, підставивши замість t в рівнянні (3) t_n , маємо

$$\varphi(t_n) = \varphi_0 - t_n + arctgt_n \quad (5)$$

обчислимо похідну функції $\varphi(t)$

$$\varphi'(t) = -1 + \frac{1}{1+t^2} = -\frac{t^2}{1+t^2},$$

знаходимо

$$\varphi'(t_n) = -\frac{t_n^2}{1+t_n^2}. \quad (6)$$

Після цього підставимо $\varphi(t_n)$ та $\varphi'(t_n)$ у рівняння (4).

Одержимо

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\varphi_0 - t_n + arctgt_n}{-\frac{t_n^2}{1+t_n^2}},$$

звідки

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\varphi_0 + arctgt_n - t_n}{t_n^2} (1 + t_n^2),$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{(1 + t_n^2)}{t_n^2} t_n + \frac{(\varphi_0 + arctgt_n)}{t_n^2} (1 + t_n^2),$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{1}{t_n} - t_n + (\varphi_0 + \arctgt t_n) \left(1 + \frac{1}{t_n^2}\right),$$

тоді

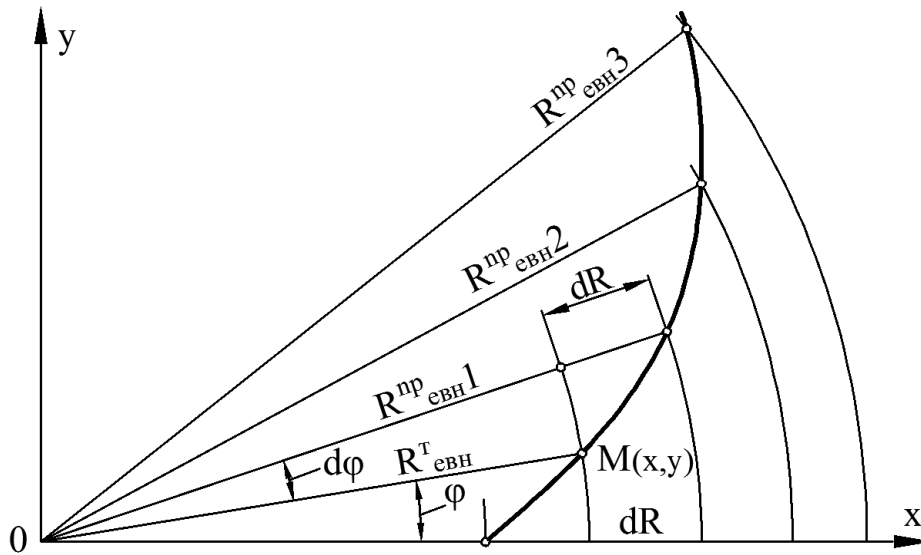


Рис. 2. Схема визначення геометричним способом наближеного радіусу $R^{\text{np}}_{\text{евн}}$ евольвенти збільшенням кута $d\varphi$ і радіусу dR

Підставимо замість X і Y їх значення з відомої параметричної системи рівнянь [1], матимемо

$$t_{n+1} = (\varphi_0 + \arctgt t_n) \left(1 + \frac{1}{t_n^2}\right) - \frac{1}{t_n}. \quad (7)$$

Одержали формулу (7), за якою визначається корінь параметру t подальшого обчислення рівняння (2).

На другому етапі розв'язання цієї задачі визначимо форму обчислення радіуса евольвенти. Для цього з $\triangle OMP$ (Рис.5) згідно теореми Піфагора одержимо

$$(R^{\text{T}}_{\text{евн}})^2 = x^2 + y^2.$$

$$(R^{\text{T}}_{\text{евн}})^2 = (R \cos t + Rt \sin t)^2 + (R \sin t - Rt \cos t)^2.$$

Після деяких спрощень запишемо

$$(R^{\text{T}}_{\text{евн}})^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + R^2 t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2(1 + t^2).$$

Тобто

$$(R^{\text{T}}_{\text{евн}})^2 = R_{\text{евн}} \sqrt{1 + t^2} \quad (8)$$

Одержана формула (8) дозволяє обчислювати радіус $R_{\text{ЭВН}}^T$ евольвенти оскільки для розрахунку його використані значення відомої параметричної системи рівнянь.

Запропонований радіально-кутовий спосіб спрощує розрахунок кожної точки евольвенти, оскільки обчислюється один параметр t .

Причому він обчислюється один раз для всіх випадків радіусів еволут від нуля до нескінченності при фіксованому збільшенні кута φ . Це обумовлено тим, що параметр t залежить тільки від заданого кута φ (2), а не від радіуса еволути $R_{\text{евт}}$. У зв'язку з цим значення параметрів t для вище перелічених радіусів при φ , що має значення від 0° до 7200° з інтервалом у 5° , є готовим результатом для всіх випадків радіусів еволути $R_{\text{евт}}$ від нуля до нескінченності. Причому, ми обчислили для зазначених кутів повністю вираз під коренем, позначивши його $k = \sqrt{1 + t^2}$. Таким чином, обчислення радіусу евольвенти $R_{\text{ЭВН}}^T$ зведено до мінімуму – множення радіуса еволути $R_{\text{евт}}$ на табличний коефіцієнт евольвенти k .

Тобто:

$$R_{\text{ЭВН}}^T = kR_{\text{евт}} \quad (9)$$

З огляду на те, що профіль зуба охоплюється кутом φ приблизно від 0° до 80° , можна обчислити значення $k = \sqrt{1 + t^2}$ з інтервалом кута через один градус або хвилину, а результати звести в таблицю, за допомогою якої для радіусів еволут, що мають прості числа:

$R_{\text{евт}} = 0,01$, $R_{\text{евт}} = 0,1$, $R_{\text{евт}} = 1$, $R_{\text{евт}} = 10$, $R_{\text{евт}} = 20$, $R_{\text{евт}} = 30$
можна обчислювати радіуси евольвенти усно або за допомогою калькулятора без застосування програми.

Отже, без застосування простої формули (9), при наявності таблиці результатів коефіцієнта евольвенти k , дозволить все обчислення виконувати на калькуляторі, вивільняючи повністю складну і дорогу обчислювальну техніку, її машинний час і час програміста, що значно підвищить економічний ефект при моделюванні евольвентних профілів зубів.

Висновки та перспективи. Радіально-кутовий спосіб спрощує побудову евольвенти і тим, що обчислюється замість двох координат X і Y одне значення радіуса за заданим кутом. Це зручно для проектувальників при розробці креслень в простій полярній системі координат. Крім того, цей спосіб зручний тим, що всі точки евольвенти можна будувати за допомогою одного й того самого кута. Однак, багато евольвентних профілів зубів не вимагають високої точності, тому їх можна будувати в наближений спосіб, дотримуючись заданих технічних вимог.

Література

1. *Olivier Th.* Theorie geometrique des engrenages /Olivier Th.//Paris, 1842.
2. *Заблонский К.И., Белоконев И.М., Щекин Б.М.* Теория механизмов и

машин. — Київ : Выща школа, 1989. 375 с.

3. *Подкоритов А.Н.* Наукові основи спряжених квазігвинтових поверхонь, що виключають інтерференцію/ А.Н. Подкоритов/ Міжв. Наук.-техн. Збірник. КНУБА «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Київ : КНУБА, 2010. Вип. 84. С. 8-17.

4. *Куликов Л.К.* Конструирование поверхностей сопряженных поверхностей с учетом интерференции применительно к обкаточному инструменту /Куликов Л.К.// кандидатська. дис. на соиск. учен. степ. канд. технич. наук. Омск, 1979. 148 с.

5. *Dun Luu, Qing Liu Ih* Dynamic error of CNC machine tools: a state-of-the-art review. *nt J Adv Manuf Tec.* Jan 2020.

6. *Wanhua Zhao, Hui Liu.* Fast exact digital differential analyzer for circle generation. *Applied Mathematics and Computation.* November 2015. URL: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.104>.

7. *Невлюдов И.Ш., Великодний С.С., Омаров М.А.* Использование CAD/CAM/CAE/CAPP при формировании управляющих программ для станков с ЧПУ / Научн.-техн. Журн. «Восточно-Европейский журнал передовых технологий». Харків, 2010. №2/2(44). С.37-44.

8. *Werner J.* The Case For Verifying And Optimizing Tool Paths . Irvine: CGTech, 2003. 5 p.

9. *Jueri Ol., Tanel Tärjla.* Fluid Mechanics, Material Physics and Financial Engineerin / *Mathematical Modelling of Cutting Process System.* Engineering Mathematics I, 2016, pp 173-186.

10. *Ісмаїлова Н.П., Єлісєєв І.М.* Параметричний метод моделювання спряжених гвинтових поверхонь: монографія. Харків : ФОРМ «Факт», 2018. 165 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ПРОФИЛЯ ЗУБА РЕЙКИ

Н.П. Исмаилова, И.М. Елисеев

В работе предлагается геометрическое моделирование зубьев рейки эвольвентного профиля для практического использования в машиностроении, которые имеют пространственно-сложную поверхность тесно связанную с образованием взаимно огибающих сопряженных поверхностей.

Проектирование эвольвентного профиля зуба является главной задачей, предшествующей его изготовлению. Особое затруднение при проектировании вызывает выполнение его методом копира, инструментом спрофилированным по точкам кривой эвольвентой. При анализе существующих способов построения эвольвенты была установлена сложность решения этой задачи при определении каждой точки вычислением системы уравнений. Формирования профиля зуба любым

способом выполняется с учетом допустимой погрешности отклонения от оптимальной формы. Следовательно, можно вести расчет эвольвенты более простым приближенным способом, сокращая время расчета в сотни раз, обеспечивая заданную допустимую погрешность отклонение. Кроме того, можно найти несложное решение, которое позволит вычислять точно каждую точку эвольвенты, исключая расчет сложной системы уравнения. Решение этих задач является весьма необходимым для моделирования эвольвентных профилей вкладышей зубьев, выполняемых в виде реек, соединяемое в замок. В связи с этим предлагая способ построения эвольвенты, упрощающий расчет её моделирование эвольвентного профиля зуба рейки.

Предложен радиально-угловой способ моделирования эвольвенты, позволит наглядно представить процесс получения профиля детали, дать анализ влияния каждого параметра на профиль и его конструктивные размеры, где без усилий можно выявить ошибки профилирования сопряженных кинематических поверхностей.

Ключевые слова: моделирование сопряженных поверхностей, кинематические поверхности, эвольвента, кинематический винт, радиально-угловой способ, профиль зуба, эвольвентный профиль.

GEOMETRIC MODELING OF THE EVOLVENT REIKI TOOTH PROFILE

N. Ismailova, I. Yelisyeyev

The paper proposes geometric modeling of involute profile teeth for practical use in mechanical engineering, which have a spatially complex surface closely associated with the formation of mutually enveloping mating surfaces.

Designing the involute tooth profile is the main task preceding its manufacture. A particular difficulty in designing is the execution by the copier method, a tool profiled by points with an involute curve. When analyzing the existing methods for constructing involutes, the complexity of solving this problem was established in determining each point by calculating a system of equations. Consequently, it is possible to calculate involutes in a simpler, approximate way, reducing the calculation time by hundreds of times, providing a given permissible error deviation. In addition, you can find a simple solution that will allow you to calculate exactly every point of the involute, excluding the calculation of a complex system of equations. The solution to these problems is very necessary for modeling involute profiles of tooth inserts, made in the form of racks, connected to the lock. In this regard, offering a method of constructing involute, simplifying the calculation of its modeling of the involute profile of the tooth.

A radial-angular method of simulating involute is proposed, which will allow you to visualize the process of obtaining the profile of the part, give an analysis

of the influence of each parameter on the profile and its design dimensions, where effortlessly you can identify profiling errors of conjugate kinematic surfaces, involute profile.

Key words: modeling of mating surfaces; kinematic surfaces; involute; kinematic screw; radial-angular method; tooth profile.