УДК 517.929
DOI: 10.32347/0131-579x.2020.99.16-27

к.ф.-м.н., доцент **Бондаренко Н. В.**
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Печук В. Д.
pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
Київський національний університет будівництва і архітектури

ПОБУДОВА ЯВНИХ МЕТОДІВ РУНГЕ-КУТТИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ

У роботі на прикладі методу п'ятого порядку збіжності наведено основні принципи побудови явних методів Рунге-Кутти для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням. На основі побудови поліномів Ньютона та рядів Тейлора розроблено алгоритм, що дозволяє використовувати явні методи Рунге-Кутти для розв'язання систем з запізнюванням і величину кроку чисельного інтегрування більшу, ніж величина запізнювання.

Ключові слова: системи диференціальних рівнянь з запізнюванням; методи Рунге-Кутти; поліноми Ньютона; чисельні методи; екстраполяція.

Постановка проблеми. Динамічні системи, що мають запізнювання у часі, виникають при моделюванні складних фізичних та фізико-механічних процесів, пов'язаних з передачею енергії, маси, інформації. В цьому випадку досить складно записати чітку математичну модель. Тому для опису впливу деяких факторів доводиться враховувати, що від впливу до чіткого наслідку проходить деякий проміжок часу – запізнювання. Запізнювання може бути обумовлене різними причинами – обмеженістю швидкості поширення взаємодії, наявністю інерційності деяких елементів, обмеженістю протікання технологічних процесів та інше. Не можна нехтувати факторами запізнювання в інженерних дослідженнях, як великих за розміром механічних систем, так і наносистем теплообміну. Наприклад, процес поширення тепла в дуже малих динамічних системах не може бути коректно описаний звичайним рівнянням теплопровідності, оскільки воно отримане за припущення нескінченно великої швидкості розповсюдження тепла і дифузійного характеру розповсюдження носіїв тепла. Це не виконується в малих динамічних системах, тому при їх моделюванні потрібно враховувати запізнювання дифузійного транспорту і балістичний характер розповсюдження тепла [1], [2].

Математична модель динамічних процесів з запізнюванням описується диференціальним рівнянням з запізнюванням або в більш складних випадках системою диференціальних рівнянь з запізнюванням. Для знаходження розв’язку систем диференціальних рівнянь з запізнюванням зазвичай використовують чисельні методи Рунге-Кутти і методи розкладання в ряд Тейлора по запізнюванню.

Чисельний розв’язок систем диференціальних рівнянь з запізнюванням при величині запізнювання більшої, ніж крок чисельного інтегрування, не викликає складності. Для цього використовують інтерполяцію передісторії моделі і чисельні методи для звичайних систем диференційних рівнянь. Наприклад, явні методи Рунге-Кутти. Застосовуючи метод кроків, отримують чисельний розв’язок на необхідний проміжок часу. Але, якщо проміжок часу досить великий у порівнянні з запізнюванням, то число кроків стає більшим, що уповільнює процес чисельного інтегрування і приводить до накопичення помилки.

Для малих за величиною запізнювань застосовують розклад в ряд Тейлора по запізнюванню і далі розв’язують звичайну систему диференціальних рівнянь чисельним методом, наприклад, методом Рунге-Кутти. Такий підхід має обмеження на величину запізнювання і не може бути застосований для багатьох моделей задач.

Таким чином, часто доводиться застосовувати крок чисельного інтегрування більший, ніж величина запізнювання, і неперервні неявні методи Рунге-Кутти. Це приводить до ускладнення чисельного алгоритму, оскільки на кожному кроці чисельного інтегрування доводиться розв’язувати системи нелінійних рівнянь.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження розв’язків різного типу диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь з запізнюванням розглядалися в роботах багатьох авторів [1–10]. При дослідженні таких динамічних систем з запізнюванням використовувались чисельні методи та методи усереднення.

У роботах [3] та [4] для чисельного розв’язку динамічних систем з запізнюванням використовуються неперервні неявні методи Рунге-Кутти, що приводять до необхідності розв'язання нелінійних систем на кожному кроці чисельного інтегрування. А це значно ускладнює процес програмування і збільшує час чисельних підрахунків. В роботі [5] використано методи Рунге-Кутти та розклад в ряд Тейлора по запізнюванню, що має суттєві обмеження на величину запізнювання. Явний метод Рунге-Кутти другого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням, що є модифікацією методу Рунге-Кутти другого порядку для звичайних диференціальних рівнянь, отримано в роботі [11].

Ціль статті. Побудувати явний метод Рунге-Кутти для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням п’ятого порядку. Метод Рунге-Кутти п'ятого порядку є найбільш поширений для звичайних систем диференціальних рівнянь. А також встановити основні принципи побудови явних методів Рунге-Кутти вищих порядків для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням. Побудова таких методів має спростити та прискорити дослідження актуальних на даний момент систем диференціальних рівнянь з запізнюванням при дослідженні на досить великі, порівняно з запізнюванням, проміжки часу. Для досягнення даної мети будуть використані явні методи Рунге-Кутти для систем звичайних диференціальних рівнянь, поліноми Ньютона, скінченні різниці та ряди Тейлора.

Основна частина. Найпростіше диференціальне рівняння з одним сталим запізнюванням $\tau > 0$ має вигляд:

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(t, y(t), y(t-\tau)), \tag{1}$$

де $F: R^3 \to R$ – деяка функція.

Задача Коші полягає в відшуканні неперервного розв'язку $y(t)$ рівняння (1) при $t > t_0$, за умови, що $y(t) = \varphi(t)$ при $t_0 - \tau \le t \le t_0$, де $\varphi(t)$ – задана неперервна функція.

Число τ визначає величину наслідків. Якщо $\tau = 0$, тобто післядія відсутня, то рівняння (1) перетворюється в звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(t, y(t)). \tag{2}$$

В рівнянні (2) швидкість динамічних процесів визначається станом системи в заданий момент часу t, тобто в математичній моделі (2) не враховується залежність швидкості динамічних процесів від стану системи в момент часу, що передує t. Врахування цієї залежності, тобто властивостей пам'яті і спадковості динамічної системи, післядія в законі взаємодії в динамічній системі, приводить до рівняння (1).

Якщо в рівнянні (1) і в початкових умовах $y(t)$, F і $\varphi(t)$ вважати вектор-функціями, то ми отримаємо задачу Коші для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з запізнюванням такого вигляду:

$$\frac{dy^J(t)}{dt} = f^J\left(t, y^1(t), \ldots, y^n(t), y^1(t-\tau), \ldots, y^n(t-\tau)\right), \tag{3}$$
$$J = 1, \ldots, n, \quad \tau = const > 0,$$

з початковими умовами:

$$y^J(t) = \varphi^J(t),\ t \in \left[t^0 - \tau,\ t^0\right],\ J = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Нехай для даної системи виконані умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші [12]. Кажуть, що чисельний метод має порядок p, якщо для досить гладких задач (3) має місце наступна нерівність:

$$\left\| y(t_0 + h) - y_1 \right\| \le Kh^{p+1},\ y(t) = \left(y^1(t), ..., y^n(t)\right),$$

де K – стала, а $\left\| y(t) \right\| = \left| y^1(t) \right| + ... + \left| y^n(t) \right|$, y_1 – шукане наближення невідомої функції y в точці $t_0 + h$, де h – крок чисельного інтегрування.

Побудуємо для систем (3) явні методи Рунге-Кутти п’ятого порядку.

Нехай $\varphi^J \in C^4[t^0 - \tau]$, $J = 1,...,n$. Розкладемо в ряд Тейлора функції φ^J в точці $t^0 - \tau$:

$$\varphi^J(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^J (t - t^0 + \tau)^i, \quad \text{де } \varphi_i^J = \frac{\varphi^J(t_0 - \tau)^{(i)}}{i!},\ i = 0,1,2,...$$

Тоді $y_{-\tau}^J = \sum_{i=0}^{4} \varphi_i^J h^i$ є наближенням четвертого порядку значення функції y^J в точці $t^0 + h - \tau$, де $h > 0$ – крок чисельного інтегрування.

За твердженням 2 з [11], якщо s – стадійний метод Рунге-Кутти для систем звичайних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами a_{ij}, b_j [13] має порядок збіжності п'ять, то і метод

$$g_i^J = y_0^J + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J \left(t_0 + c_j h, g_j^1, ..., g_j^n, y_{-\tau}^1, ..., y_{-\tau}^n\right),$$

$$y_1^J = y_0^J + \sum_{j=1}^{s} b_j h f^J \left(t_0 + c_j h, g_j^1, ..., g_j^n, y_{-\tau}^1, ..., y_{-\tau}^n\right),$$

$$t = t + h, \quad c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{s} b_j = 1, \quad i = 1,...,s.$$

для систем з запізнюванням (3) має порядок збіжності п'ять на кроці $[t^0, t^0 + h]$. Тут $y_0{}^J$ – початкове значення функцій y^J в точці t_0, $y_1{}^J$ – шукане наближення невідомих функцій y^J за один крок чисельного інтегрування h, $J = 1,...,n$.

Отримаємо наближення четвертого порядку $y_{-\tau}^J$ для наступного кроку чисельного інтегрування $h > \tau$. Зауважимо, якщо крок чисельного інтегрування $h \le \tau$, то чисельний розв'язок системи (3) не викликає труднощів [11]. Але, якщо потрібно підрахувати чисельний розв'язок на досить великий, порівняно з τ, проміжок часу, то доцільно використовувати крок $h > \tau$.

Поліном Ньютона побудований по п’яти точках x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 для функції $z(x)$ має вигляд [14]:

$$\begin{aligned} N(x) = z_0 &+ (x - x_0)[x_0, x_1]z + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]z + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3]z + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]z, \end{aligned} \tag{5}$$

де $[x_0,x_1]z$, $[x_0,x_1,x_2]z$, $[x_0,x_1,x_2,x_3]z$, $[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]z$ – роздільні різниці (різницеві похідні вперед, чисельне наближення похідних) першого, другого, третього, четвертого порядків відповідно. Роздільні різниці визначаються таким чином:

$$[x_i,x_{i+1}]=\frac{z(x_{i+1})-z(x_i)}{x_{i+1}-x_i},$$

$$[x_i,x_{i+1},...,x_{i+j}]=\frac{[x_{i+1},x_{i+2},...,x_{i+j}]z-[x_i,x_{i+1},...,x_{i+j-1}]z}{x_{i+j}-x_i},\ i,j=0,...,4.$$

Позначимо:

$$f_1^J=f^J\left(t_0,y^1\left(t_0\right),...,y^n\left(t_0\right),y_{-\tau}^1\left(t_0-\tau\right),...,y_{-\tau}^n\left(t_0-\tau\right)\right),$$

$$f_2^J=f^J\left(t_1,y^1\left(t_1\right),...,y^n\left(t_1\right),y_{-\tau}^1\left(t_1-\tau\right),...,y_{-\tau}^n\left(t_1-\tau\right)\right),\ J=1,...,n.$$

Запишемо інтерполяційні поліноми Ньютона четвертого порядку для функцій y^J на проміжку $[t_0,t_1]$, в точках $t_0,\ t_1-\tau,\ t_1$. Отримаємо многочлени $N^J(t)$ з кратними точками інтерполяції $t_0,\ t_0,\ t_1-\tau,\ t_1,\ t_1$. Перші і останні роздільні різниці першого порядку для многочленів $N^J(t)$ відповідно рівні $[t_0,t_0]y^J=f_1^J$, $[t_1,t_1]y^J=f_2^J$, оскільки f_1^J та f_2^J – наближення похідної четвертого порядку в точках t_0 і t_1.

Побудуємо таблицю роздільних різниць.

Аргумент	Функції	Роздільні різниці: 1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку
t_0	y_0^J				
		f_1^J			
t_0	y_0^J		$\dfrac{\Delta_1^J-f_1^J}{h-\tau}$		
		$\dfrac{y_{-\tau}^J-y_0^J}{h-\tau}=\Delta_1^J$		$\dfrac{\Delta_2^J-\Delta_1^J}{h^2}-\dfrac{\Delta_1^J-f_1^J}{h(h-\tau)}$	
$t_1-\tau$	$y_{-\tau}^J$		$\dfrac{\Delta_2^J-\Delta_1^J}{h}$		$\dfrac{f_2^J-\Delta_2^J}{\tau h^2}-2\dfrac{\Delta_2^J-\Delta_1^J}{h^3}+\dfrac{\Delta_1^J-f_1^J}{(h-\tau)h^2}$
		$\dfrac{y_1^J-y_{-\tau}^J}{\tau}=\Delta_2^J$		$\dfrac{f_2^J-\Delta_2^J}{\tau h}-\dfrac{\Delta_2^J-\Delta_1^J}{h^2}$	
t_1	y_1^J		$\dfrac{f_2^J-\Delta_2^J}{\tau}$		
		f_2^J			
t_1	y_1^J				

Позначимо

$$N_2^J=\frac{\Delta_1^J-f_1^J}{h-\tau},\qquad N_3^J=\frac{\Delta_2^J-\Delta_1^J}{h^2}-\frac{\Delta_1^J-f_1^J}{(h-\tau)h},\tag{6}$$

$$N_4^J = \frac{f_2^J - \Delta_2^J}{\tau h^2} - 2\frac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h^3} + \frac{\Delta_1^J - f_1^J}{(h-\tau)h^2}.$$

Тоді поліноми Ньютона $N^J(t)$ за формулою (5) мають вигляд :

$$N^J(t) = y_0^J + (t-t_0)f_1^J + (t-t_0)^2 N_2^J + (t-t_0)^2(t-t_1+\tau)N_3^J + \\ + (t-t_0)^2(t-t_1+\tau)(t-t_1)N_4^J. \quad (7)$$

Запишемо поліноми (7) за степенями $(t-t_1+\tau)$:

$$N^J(t) = \sum_{i=0}^{4} K_i^J (t-t_1+\tau)^i, \text{ де } K_i^J = \frac{N^J(t_1-\tau)^{(i)}}{i!}, \ i = 0,...,4. \quad (8)$$

Знайдемо похідні поліномів $N^J(t)$:

$$N^J(t)^{(1)} = f_1^J + 2(t-t_0)N_2^J + \left(2(t-t_0)(t-t_1+\tau) + (t-t_0)^2\right)N_3^J + \\ + \left(\left(2(t-t_0)(t-t_1+\tau) + (t-t_0)^2\right)(t-t_1) + (t-t_0)^2(t-t_1+\tau)\right)N_4^J;$$

$$N^J(t_1-\tau)^{(1)} = f_1^J + 2N_2^J(h-\tau) + (h-\tau)^2 N_3^J - \tau(h-\tau)^2 N_4^J;$$

$$N^J(t)^{(2)} = 2N_2^J + \left(2(t-t_1+\tau) + 4(t-t_0)\right)N_3^J + ((2(t-t_1+\tau) + \\ + 4(t-t_0))(t-t_1) + 4(t-t_0)(t-t_1+\tau) + 2(t-t_0)^2)N_4^J;$$

$$N^J(t_1-\tau)^{(2)} = 2(N_2^J + 2(h-\tau)N_3^J + (h-\tau)(h-3\tau)N_4^J);$$

$$N^J(t)^{(3)} = 6N_3^J + \left(6(t-t_1) + 6(t-t_1+\tau) + 12(t-t_0)\right)N_4^J;$$

$$N^J(t_1-\tau)^{(3)} = 6(N_3^J + (2h-3\tau)N_4^J);$$

$$N^J(t)^{(4)} = 24N_4^J.$$

Таким чином, маємо:

$$K_0^J = y_{-\tau}^J;$$

$$K_1^J = f_1^J + 2N_2^J(h-\tau) + (h-\tau)^2 N_3^J - \tau(h-\tau)^2 N_4^J;$$

$$K_2^J = N_2^J + 2(h-\tau)N_3^J + (h-\tau)(h-3\tau)N_4^J;$$

(9)

$$K_3^J = N_3^J + (2h-3\tau)N_4^J;$$

$$K_4^J = N_4^J.$$

Оскільки многочлени Ньютона (8) четвертого порядку, то вони мають порядок наближення чотири [14]. Отже, многочлени (8) співпадають з розкладами в ряд Тейлора до четвертого порядку функції y^J в точці $t_1-\tau$.

Таким чином, маємо необхідне для чисельного розв’язку на наступному кроці $[t_1, t_1+h]$ наближення четвертого порядку функції y^J в точці $t_1+h-\tau$:

$$y^J(t_1+h-\tau)=\sum_{i=0}^{4}K_i^J h^i \ .$$

Помітимо, що дане наближення явно виражається формулами (6), (9) зі значень $y_0^J, y_{-\tau}^J, y_1^J, f_1^J, f_2^J$ попереднього кроку чисельного інтегрування.

Таким чином, якщо a_{ij}, b_j – коефіцієнти будь-якого s - стадійного методу Рунге-Кутти для систем без запізнювання [13], то за твердженням 2 з [11] метод Рунге-Кутти для систем з запізнюванням (3) має вигляд:

$$g_i^J=y_0^J+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}hf^J\left(t_0+c_jh,g_j^1,...,g_j^n,y_{-\tau}^1,...,y_{-\tau}^n\right),$$

$$y_1^J=y_0^J+\sum_{j=1}^{s}b_jhf^J\left(t_0+c_jh,g_j^1,...,g_j^n,y_{-\tau}^1,...,y_{-\tau}^n\right),$$

$$t_1=t_0+h,\ c_i=\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\ ,\ \sum_{j=1}^{s}b_j=1, i=1,...,s,$$

де функція $y_{-\tau}^J=\begin{cases}\sum_{i=0}^{4}\varphi_i^J h^i, \text{якщо}\ t_0=t^0,\\ \sum_{i=0}^{4}K_i^J h^i, \text{якщо}\ t_0>t^0,\end{cases}$ має п'ятий порядок збіжності, $J=1,...,n$.

Зауважимо, якщо $\varphi^J\notin C^4[t^0-\tau]$, то для чисельного розв'язку так само можна використовувати апроксимацію поліномами Ньютона функцій φ^J на проміжку $[t^0-\tau;t^0]$.

Явні методи Рунге-Кутти третього та четвертого порядків наближення можна отримати аналогічно, шляхом побудови многочленів Ньютона другого і третього порядків відповідно. Явний метод Рунге-Кутти другого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням отримано в роботі [11].

Побудову явних методів Рунге-Кутти для систем з запізнюванням більшого порядку наближення p можна провести за допомогою збільшення порядку апроксимації поліномів Ньютона (збільшення точок інтерполяції) до $p-1$ і відповідно використання звичайних методів Рунге-Кутти порядку p.

Висновки та перспективи. Таким чином, ми побачили, що для побудови явних методів Рунге-Кутти для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням для кроку чисельного інтегрування більшого за величину запізнювання, достатньо записати поліноми Ньютона необхідного порядку по підрахованим наближенням і отримати розклад в ряд Тейлора для наближення на наступний крок чисельного інтегрування. Отриманий таким чином явний метод Рунге-Кутти п'ятого порядку для систем з запізнюванням, наприклад, з коефіцієнтами Кутти-Нюстрема [13]:

$$c_1 = 0;$$
$$c_2 = \frac{1}{3}, a_{21} = \frac{1}{3};$$
$$c_3 = \frac{2}{5}, a_{31} = \frac{4}{25}, a_{32} = \frac{6}{25};$$
$$c_4 = 1, a_{41} = \frac{1}{4}, a_{42} = -3, a_{43} = \frac{15}{4};$$
$$c_5 = \frac{2}{3}, a_{51} = \frac{6}{81}, a_{52} = \frac{90}{81}, a_{53} = \frac{-50}{81}, a_{54} = \frac{8}{81};$$
$$c_6 = \frac{4}{5}, a_{61} = \frac{6}{75}, a_{62} = \frac{36}{75}, a_{63} = \frac{10}{75}, a_{64} = \frac{8}{75}, a_{65} = 0;$$
$$b_1 = \frac{23}{192},\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{125}{192},\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{-81}{192},\ b_6 = \frac{125}{192}.$$

або коефіцієнтами методу Дормана-Принса, з оцінкою похибки чисельного інтегрування, добре підходить для дослідження актуальних на даний момент систем з запізнюванням на досить великі, порівняно з запізнюванням, проміжки часу. Отримані в роботі результати можуть бути використані для досліджень різного типу систем диференціальних рівнянь з запізнюванням та побудови для таких систем явних методів Рунге-Кутти більших порядків наближення.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Cattaneo C.A* Form of Heart Equation with Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagations, *C.R.Acad.Sci.*247, 1958. P. 431-433.

2. *Chen G.* Ballistic-Diffusive Heat-Conduction Equations. *Phys. Rev. Lett*., V. 86, 2001. P. 2297-2300.

3. *Beelen A.*, *Zennaro M*. Numerical Methods for Delay Differential Equations. Clarendon Press Oxford, 2003. 206 p.

4. *Joan Gimeno i Alquezar* On time Delay Dierential Equations. Final project thesis master of advanced mathematics facultat de matematiques universitat de Barcelona, 2015. 93 p.

5. *Siregar B.H, Rangkuti Y.R, Mansyur A.* Numerical Solution of Delayed SIR Model of Tuberculosis with Combination of Runge Kutta Method and Taylor Series Approach. *Proceedings of The 5th Annual International Seminar on Trends in Science and Science Education, AISTSSE* 2018, 18-19 October 2018, Medan, Indonesia. DOI 10.4108/eai.18-10-2018.2287390.

6. *Baker C.T.H. and Paul C.A.H.* Discontinuous solutions of neutral delay differential equations. *Applied Numerical Mathematics* V. 56, 2006. P. 284–304.

7. *Gu, K. and Niculescu, S.-I.,* Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. Journal of Dynamical Systems, Measurement, and Control, 2003. V. 125, P. 158–165.

8. *Kyrychko Y.N., Hogan S.J.* On the use of delay equations in engineering applications – Journal of Vibration and Control,16(7–8), 2010. P. 943 –960.
9. *Kainhofer R.; Tichy R.F.* QMC Methods for the solution of delay differential equationsa. *PAMM Proc. Appl. Math. Mech*. 2003. V2, P. 503–504. DOI 10.1002/pamm.200310233.
10. *Ahmad S., Ismail F., Senu N.* Solving Oscillatory Delay Differential Equations Using Block Hybrid Methods. *Journal of Mathematics*, Volume 2018, 2018. Article ID 2960237, 7 p. DOI:10.1155/2018/2960237.
11. *Бондаренко Н.В., Печук В.Д.* Моделювання динамічних систем з запізнюванням за допомогою узагальнених методів Рунге-Кутти. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, 2019. Випуск 96. С. 3–11.
12. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва. Наука, 1971. 296с.
13. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. Под ред. С.С. Филиппова. Москва. Мир, 1990. 512с.
14. *Ильин М.И.* Аппроксимация и интерполяция. Методы и приложения. Учебное пособие, Рязань, 2010. 56 с.

REFERENCES

1. *Cattaneo C.A* Form of Heart Equation with Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagations, *C.R.Acad.Sci.*247, 1958. P. 431-433. *{in English}*
2. *Chen G.* Ballistic-Diffusive Heat-Conduction Equations. *Phys. Rev. Lett*., V. 86, 2001. P. 2297-2300. *{in English}*
3. *Beelen A*., *Zennaro M*. Numerical Methods for Delay Differential Equations. Clarendon Press Oxford, 2003. 206 p. *{in English}*
4. *Joan Gimeno i Alquezar* On time Delay Dierential Equations. Final project thesis master of advanced mathematics facultat de matematiques universitat de Barcelona, 2015. 93 p. *{in English}*
5. *Siregar B.H, Rangkuti Y.R, Mansyur A.* Numerical Solution of Delayed SIR Model of Tuberculosis with Combination of Runge Kutta Method and Taylor Series Approach. *Proceedings of The 5th Annual International Seminar on Trends in Science and Science Education, AISTSSE* 2018, 18-19 October 2018, Medan, Indonesia. DOI 10.4108/eai.18-10-2018.2287390. *{in English}*
6. *Baker C.T.H. and Paul C.A.H.* Discontinuous solutions of neutral delay differential equations – *Applied Numerical Mathematics* V. 56, 2006. P. 284–304. *{in English}*
7. *Gu, K. and Niculescu, S.-I.,* Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. Journal of Dynamical Systems, Measurement, and Control, 2003. V. 125, P. 158–165. *{in English}*

8. *Kyrychko Y.N., Hogan S.J.* On the use of delay equations in engineering applications – Journal of Vibration and Control,16(7–8), 2010. P. 943 –960. *{in English}*
9. *Kainhofer R.; Tichy R.F.* QMC Methods for the solution of delay differential equationsa. *PAMM Proc. Appl. Math. Mech*. 2003. V2, P. 503–504. DOI 10.1002/pamm.200310233. *{in English}*
10. *Ahmad S., Ismail F., Senu N.* Solving Oscillatory Delay Differential Equations Using Block Hybrid Methods. *Journal of Mathematics*, Volume 2018, 2018. Article ID 2960237. 7 p. DOI:10.1155/2018/2960237 *{in English}*
11. *Bondarenko N.V., Pechuk V.D*. Modeliuvannia dynamichnykh system z zapizniuvanniam za dopomohoiu uzahalnenykh metodiv Runhe-Kutty. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 2019. Vypusk 96, P. 3-11.{in Ukranian}
12. *El'sgol'c L.E., Norkin S.B.* Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom. M.: Nauka, 1971. 296 p.{in Russian}
13. *Hajrer E., Nyorsett S., Vanner G*. Reshenie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Nezhyostkie zadachi. Pod red. S.S. Filippova. M.: Mir, 1990. 512 p. {in Russian}
14. *Il'in M.I. Approksimaciya i interpolyaciya.* Metody i prilozheniya. Uchebnoe posobie, Ryazan', 2010. 56 p. {in Russian}

к.ф.-м.н., доцент **Бондаренко Н. В.**
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Печук В. Д.
pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ПОСТРОЕНИЕ ЯВНЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием, что является математической моделью многих технических процессов с запаздыванием во времени. Наиболее часто для моделирования таких систем используют численные методы Рунге-Кутты и метод разложения в ряд Тейлора по запаздыванию.

При величине запаздывания большей, чем шаг численного интегрирования, численное решение данных систем не представляет сложности. Для этого используют интерполяцию предыстории модели и численные методы для обычных систем дифференциальных уравнений. Например, явные методы Рунге-Кутты. Применяя метод шагов получают численное решение на необходимый промежуток времени. Но,

если промежуток времени достаточно велик по сравнению с запаздыванием, то число шагов оказывается большим, что замедляет процесс численного интегрирования и приводит к накоплению ошибки.

Для малых по величине запаздываний применяют разложения в ряд Тейлора по запаздыванию и дальнейшее решение обычной системы дифференциальных уравнений численным методом, например, методом Рунге-Кутты. Такой подход имеет ограничения на величину запаздывания и не применим для многих моделей.

Таким образом, часто приходится применять шаг численного интегрирования больший, чем величина запаздывания, и непрерывные неявные методы Рунге-Кутты, что приводит к усложнению численного алгоритма, поскольку на каждом шаге численного интегрирования приходится решать системы нелинейных уравнений.

В данной работе на основе построения полиномов Ньютона рядов и Тейлора разработан алгоритм позволяющий использовать явные методы Рунге-Кутты для решения систем с запаздыванием и величиной шага численного интегрирования более чем величина запаздывания. Для систем с запаздыванием построен явный метод Рунге-Кутты пятого порядка аппроксимации на основе наиболее часто используемых явных методов Рунге-Кутты пятого порядка аппроксимаций. Данные методы удобны в программировании, имеют большую скорость подсчета, чем неявные методы, и применимы для больших в сравнении с величиной запаздывания шагов численного интегрирования.

Ключевые слова: Системы дифференциальных уравнений с запаздыванием; методы Рунге-Кутты; полиномы Ньютона; численные методы; экстраполяция.

Ph.D., assoc. prof. **Nataliya Bondarenko**,
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Vasiliy Pechuk
pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA)

CONSTRUCTION OF EXPLICIT RUNGE-KUTTA METHODS FOR MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS WITH DELAY

A system of differential equations with delay is considered, which is a mathematical model of many technical processes with a time delay. Numerical Runge-Kutta methods and the method of expansion on Taylor series on time delay are most often used to model such systems.

When the value of the delay is greater than the step of numerical integration, the numerical solution of these systems is not difficult. For this, interpolation of the prehistory of the model and numerical methods for

conventional systems of differential equations are used. For example, explicit Runge-Kutta methods. Using the method of steps, a numerical solution is obtained for the required period of time. But, if the time interval is large enough in comparison with the delay, then the number of steps turns out to be large, which slows down the process of numerical integration and leads to the accumulation of errors.

For small delays, Taylor time delay expansions are used and the further solution of the usual system of differential equations by a numerical method, for example, by the Runge-Kutta method. This approach has limitations on the amount of delay and is not applicable for many models.

Thus, it is often necessary to apply a step of numerical integration that is larger than the delay value and continuous implicit Runge-Kutta methods, which leads to a complication of the numerical algorithm, since at each step of numerical integration it is necessary to solve systems of nonlinear equations.

In this paper, based on the construction of Newton's and Taylor's polynomials, an algorithm has been developed that allows using explicit Runge-Kutta methods to solve systems with delay and the step size of numerical integration is more than the delay value. For systems with delay, an explicit Runge-Kutta method of the fifth order of approximation is constructed on the basis of the most frequently used explicit Runge-Kutta methods of the fifth order of approximation. These methods are convenient in programming, have a higher speed of calculation than implicit methods, and are applicable for steps of numerical integration that are large in comparison with the lag.

Key words: *Systems of differential equations with delay; Runge-Kutta methods; polynomies of Newton; numerical methods; extrapolation.*