

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ НЕДОСТУПНОЙ ТОЧКИ ОБЪЕКТА

В настоящем исследовании разработан оптимизационный подход к определению параметров недоступной точки объекта. Выявлена проблема и поставлены первостепенные задачи. Сутью проблемы является объективное противоречие между необходимостью получения точного значения определяемого параметра и наличием погрешности при любом измерении. Цель настоящей работы — разработать комплексно трехмерную геометрическую и аналитическую модели определения минимальной области значений параметров недоступной точки объекта. Задачи статьи: 1. Разработать трехмерную геометрическую модель со скрещивающимися визирными лучами для бесконтактного определения координат недоступной точки объекта при заданном расположении геодезического оборудования. 2. Разработать оптимизационную аналитическую модель определения области значений параметров недоступной точки объекта в соответствии с предложенной трехмерной геометрической моделью со скрещивающимися визирными лучами. В предлагаемом оптимизационном подходе разработана комбинированная трехмерная геометрическая модель со скрещивающимися визирными лучами. Определяемые точки S и S' располагаются в областях $[C_{DM}, C_{EM}]$, $[C'_{DM}, C'_{EM}]$ минимального расстояния ρ_{\min} между скрещивающимися визирными лучами. Оптимизационная задача определения координат недоступной точки объекта в пространстве сводится к задаче определения минимального расстояния между двумя скрещивающимися визирными лучами. Задача имеет единственное решение, если визирные лучи не параллельны. Поиск экстремума функции расстояния между двумя визирными лучами, и именно минимума, имеет реальную геометрическую интерпретацию. Функция расстояния $\rho = f(t_{CD}, t_{CE})$ достигает своего экстремума ρ_{\min} , когда её частные производные по каждой переменной равны нулю. Поэтому решается система дифференциальных уравнений. Искомая точка $S'(x_C, y_C, z_C)$ может, например, располагаться в середине минимального отрезка $[C'_{DM}, C'_{EM}]$. Предложенный подход проверен на реальных экспериментальных данных.

Ключевые слова — объект, точка, экстремум, визирный луч, координаты точки, геометрическая модель, аналитическая модель.

Актуальность исследования. Формирование паспорта реконструируемых или восстанавливаемых исторических объектов предполагает определение их геометрических параметров. Такими параметрами являются высота объекта и размеры охранной зоны.

Постановка проблемы. Основная *проблема* заключается в объективном *противоречии* между необходимостью получения точного значения определяемого параметра и наличием погрешности при любом измерении.

Анализ исследований и публикаций. В предыдущих исследованиях реализована попытка получить аналитически точный результат для геометрической модели измерений с пересекающимися в требуемой точке визирными лучами [1, 2]. Для предложенной геометрической модели измерений разработан алгоритм расчета параметров недоступной точки объекта [3]. Разработанная алгоритмически корректная аналитическая модель [2, 3], при обработке результатов экспериментальных измерений, показала необходимость перехода к геометрической модели со скрещивающимися визирными лучами и созданию аналитической модели для определения минимальной области с исследуемой точкой объекта.

Цель и задачи статьи. *Цель* настоящего исследования – разработать комплексно трехмерную геометрическую и аналитическую модели определения минимальной области значений параметров недоступной точки объекта. *Задачи* статьи: 1. Разработать *комбинированную* трехмерную *геометрическую* модель со скрещивающимися визирными лучами для бесконтактного определения координат недоступных точек объекта при заданном расположении геодезического оборудования. 2. Разработать *оптимизационную аналитическую* модель определения области значений параметров недоступных точек объекта в соответствии с предложенной *комбинированной* трехмерной геометрической моделью.

Основная часть. В предлагаемом *оптимизационном подходе* разработана *комбинированная* трехмерная геометрическая модель определения координат недоступных точек объекта (рис. 1). *Комбинированная* модель объединяет модели, расположенные выше и ниже нулевой горизонтальной плоскости. Рассмотрим *аналитическую* модель для *нижней* части *комбинированной* геометрической модели.

Координаты $x_{C'D'}$, $y_{C'D'}$, $z_{C'D'}$, любой точки $C'D'$ ($x_{C'D'}$, $y_{C'D'}$, $z_{C'D'}$) визирного луча AD' можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{C'D'} = r_{D'x} \cdot t_{C'D'} + x_{D'} \\ y_{C'D'} = r_{D'y} \cdot t_{C'D'} + y_{D'} \\ z_{C'D'} = r_{D'z} \cdot t_{C'D'} + z_{D'} \end{cases} \quad (1)$$

где $t_{C'D'}$ - значение параметра $t_{D'}$, определяющего положение любой точки $C'D'$ на луче AD' .

Координаты $x_{C'E'}$, $y_{C'E'}$, $z_{C'E'}$ любой точки $C'E'$ ($x_{C'E'}$, $y_{C'E'}$, $z_{C'E'}$) визирного луча BE' можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{C'E'} = r_{E'x} \cdot t_{C'E'} + x_{E'} \\ y_{C'E'} = r_{E'y} \cdot t_{C'E'} + y_{E'} \\ z_{C'E'} = r_{E'z} \cdot t_{C'E'} + z_{E'} \end{cases} \quad (2)$$

где $t_{C'E'}$ - значение параметра $t_{E'}$, определяющего положение любой точки $C'E'$ на луче BE' .

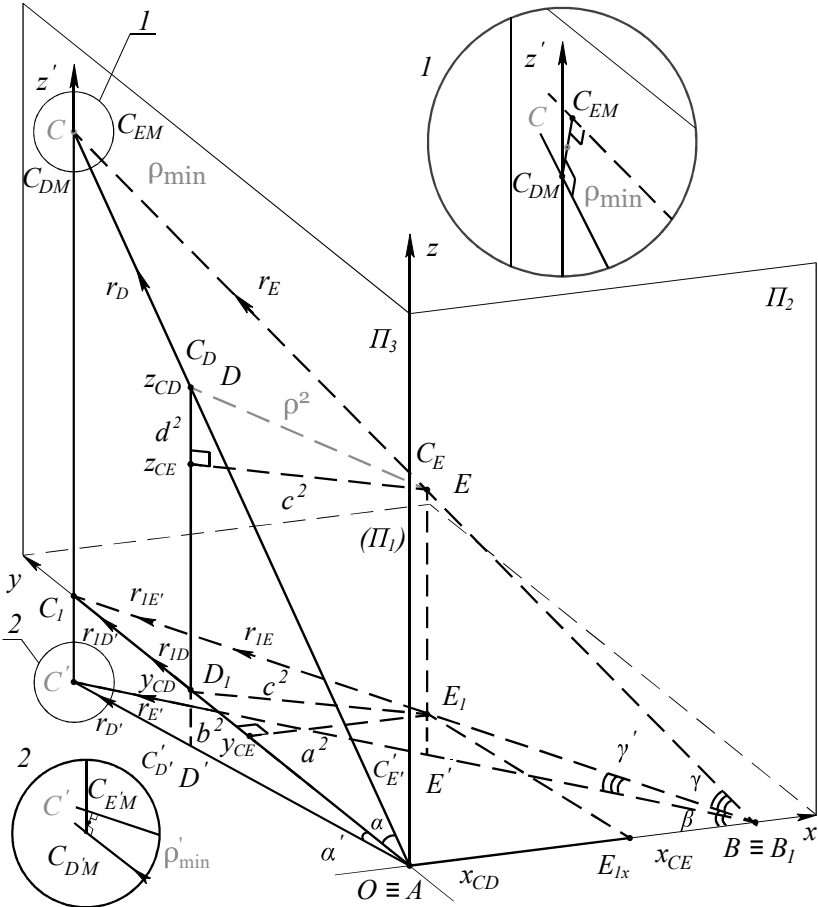


Рис. 1. Комбинированная геометрическая модель определения расстояний CC_1 и $C'C_1$ относительно нулевой плоскости ABC_1 .

Квадрат величины расстояния $[\rho(C'_D, C'_E)]^2$ между любыми двумя точками $C'_D(x_{C'D}, y_{C'D}, z_{C'D})$, $C'_E(x_{C'E}, y_{C'E}, z_{C'E})$ различных визирных лучей AD' , BE' в декартовом трехмерном пространстве представляется суммой квадратов разностей соответствующих координат этих точек:

$$f = [\rho(C'_D, C'_E)]^2 = (x_{C'D} - x_{C'E})^2 + (y_{C'D} - y_{C'E})^2 + (z_{C'D} - z_{C'E})^2. \quad (3)$$

Запишем расстояние между двумя любыми точками C'_D и C'_E двух различных визирных лучей в параметрической форме, подставляя в выражение (3) значения координат этих точек из уравнений (1) и (2):

$$\begin{aligned} f &= [\rho(C'_D, C'_E)]^2 = (x_{C'D} - x_{C'E})^2 + (y_{C'D} - y_{C'E})^2 + (z_{C'D} - z_{C'E})^2 = \\ &= (r_{Dx} \cdot t_{C'D} + x_D - r_{Ex} \cdot t_{C'E} - x_E)^2 + (r_{Dy} \cdot t_{C'D} + y_D - r_{Ey} \cdot t_{C'E} - y_E)^2 + \\ &+ (r_{Dz} \cdot t_{C'D} + z_D - r_{Ez} \cdot t_{C'E} - z_E)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку реальные измерения углов α' , β , γ' и расстояния AB (рис. 1) осуществляются с погрешностями и значения этих параметров дробные числа, визирные лучи AD' и BE' , как правило, скрещиваются, а не пересекаются в определяемой точке C' .

Скрещивающиеся визирные лучи AD' и BE' имеют соответственно две точки C'_{DM} и C'_{EM} , между которыми расстояние ρ минимально ρ_{min} (рис. 1).

Наиболее вероятно, что определяемая точка C' располагается в области $[C'_{DM}, C'_{EM}]$ минимального расстояния ρ_{min} между скрещивающимися визирными лучами.

Таким образом, задача определения координат недоступной точки объекта в пространстве, на первом этапе, сводится к задаче определения минимального расстояния между двумя скрещивающимися визирными лучами:

$$f = [\rho(C'_D, C'_E)]^2 = f(t_{C'D}, t_{C'E}) \rightarrow \min. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) видно, что расстояние $\rho(C'_D, C'_E)$ между двумя любыми точками C'_D и C'_E двух различных визирных лучей AD' и BE' есть функция от двух переменных $f(t_{C'D}, t_{C'E})$. Такими переменными являются параметры $t_{C'D}$ и $t_{C'E}$ двух лучей AD' и BE' соответственно. Следовательно, задача сводится к определению таких значений параметров $t_{C'D}$ и $t_{C'E}$, при которых расстояние ρ (4) между двумя визирными лучами минимально ρ_{min} . Причем, задача имеет единственное решение, если визирные лучи не параллельны.

Поиск экстремума функции расстояния (4) между двумя визирными лучами, и именно минимума, имеет реальную геометрическую интерпретацию. Из теории функции нескольких переменных известно, что функция $f(t_{C'D}, t_{C'E})$ достигает своего экстремума, когда её частные производные по каждой переменной равны нулю [4].

Следовательно, для определения значений параметров $t_{C'D'}$ и $t_{C'E'}$, при которых расстояние между скрещивающимися визирными лучами минимально, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(t_{C'D'}, t_{C'E'})}{\partial t_{C'D'}} = 0 \\ \frac{\partial f(t_{C'D'}, t_{C'E'})}{\partial t_{C'E'}} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Дифференцируя функцию расстояния (4) по переменным $t_{C'D'}$ и $t_{C'E'}$, систему уравнений (6) представим в виде (7):

$$\begin{cases} 2(r_{D'x} \cdot t_{C'D'} + x_{D'} - r_{E'x} \cdot t_{C'E'} - x_{E'}) \cdot r_{D'x} + \\ + 2(r_{D'y} \cdot t_{C'D'} + y_{D'} - r_{E'y} \cdot t_{C'E'} - y_{E'}) \cdot r_{D'y} + \\ + 2(r_{D'z} \cdot t_{C'D'} + z_{D'} - r_{E'z} \cdot t_{C'E'} - z_{E'}) \cdot r_{D'z} = 0 \\ 2(r_{D'x} \cdot t_{C'D'} + x_{D'} - r_{E'x} \cdot t_{C'E'} - x_{E'}) \cdot (-r_{E'x}) + \\ + 2(r_{D'y} \cdot t_{C'D'} + y_{D'} - r_{E'y} \cdot t_{C'E'} - y_{E'}) \cdot (-r_{E'y}) + \\ + 2(r_{D'z} \cdot t_{C'D'} + z_{D'} - r_{E'z} \cdot t_{C'E'} - z_{E'}) \cdot (-r_{E'z}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Разделив каждое из уравнений системы (7) на два и сгруппировав члены с переменными $t_{C'D'}$ и $t_{C'E'}$, получим систему из двух линейных уравнений (8):

$$\begin{cases} (r_{D'x}^2 + r_{D'y}^2 + r_{D'z}^2) \cdot t_{C'D'} - (r_{E'x} \cdot r_{D'x} + r_{E'y} \cdot r_{D'y} + r_{E'z} \cdot r_{D'z}) \cdot t_{C'E'} = \\ = -[(x_{D'} - x_{E'}) \cdot r_{D'x} + (y_{D'} - y_{E'}) \cdot r_{D'y} + (z_{D'} - z_{E'}) \cdot r_{D'z}] \\ - (r_{D'x} \cdot r_{E'x} + r_{D'y} \cdot r_{E'y} + r_{D'z} \cdot r_{E'z}) \cdot t_{C'D'} + (r_{E'x}^2 + r_{E'y}^2 + r_{E'z}^2) \cdot t_{C'E'} = \\ = (x_{D'} - x_{E'}) \cdot r_{E'x} + (y_{D'} - y_{E'}) \cdot r_{E'y} + (z_{D'} - z_{E'}) \cdot r_{E'z} \end{cases} \quad (8)$$

Запишем систему линейных уравнений (8) в классическом виде (9) для применения формул Крамера [5]:

$$\begin{cases} a'_{11} \cdot t_{C'D'} + a'_{12} \cdot t_{C'E'} = C'_1 \\ a'_{21} \cdot t_{C'D'} + a'_{22} \cdot t_{C'E'} = C'_2 \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a'_{11} &= (r_{D'x}^2 + r_{D'y}^2 + r_{D'z}^2), \quad a'_{22} = (r_{E'x}^2 + r_{E'y}^2 + r_{E'z}^2), \\ a'_{12} &= a'_{21} = -(r_{E'x} \cdot r_{D'x} + r_{E'y} \cdot r_{D'y} + r_{E'z} \cdot r_{D'z}), \\ C'_1 &= -[(x_{D'} - x_{E'}) \cdot r_{D'x} + (y_{D'} - y_{E'}) \cdot r_{D'y} + (z_{D'} - z_{E'}) \cdot r_{D'z}], \\ C'_2 &= [(x_{D'} - x_{E'}) \cdot r_{E'x} + (y_{D'} - y_{E'}) \cdot r_{E'y} + (z_{D'} - z_{E'}) \cdot r_{E'z}]. \end{aligned}$$

Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений (8), представленных в виде системы (9), имеют вид (10):

$$t_{C'D'} = \frac{\Delta'_1}{\Delta'}, t_{C'E'} = \frac{\Delta'_2}{\Delta'}, \Delta' \neq 0, \quad (10)$$

где

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11}a'_{12} \\ a'_{21}a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11} \cdot a'_{22} - a'_{12} \cdot a'_{21},$$

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} C'_1a'_{12} \\ C'_2a'_{22} \end{vmatrix} = C'_1 \cdot a'_{22} - a'_{12} \cdot C'_2,$$

$$\Delta'_2 = \begin{vmatrix} a'_{11}C'_1 \\ a'_{21}C'_2 \end{vmatrix} = C'_2 \cdot a'_{11} - a'_{21} \cdot C'_1.$$

Значения параметров $t_{C'D'}$ и $t_{C'E'}$, полученные по формулам (10), являются значениями параметров $t_{D'M}$ и $t_{E'M}$, при которых расстояние между скрещивающимися лучами AD' и BE' (рис. 1) минимально:

$$t_{D'M} = t_{C'D'} \text{ и } t_{E'M} = t_{C'E'}. \quad (11)$$

Координаты $x_{D'M}, y_{D'M}, z_{D'M}$ (12), $x_{E'M}, y_{E'M}, z_{E'M}$ (13) точек $C'_{D'M}(x_{D'M}, y_{D'M}, z_{D'M})$, $C'_{E'M}(x_{E'M}, y_{E'M}, z_{E'M})$, для которых расстояние $\rho(C'_{D'M}, C'_{E'M})$ между двумя скрещивающимися лучами AD' и BE' минимально ρ_{min} , получаются подстановкой значений выражений (11) в систему уравнений (1) и (2) соответственно:

$$\begin{cases} x_{D'M} = r_{D'x} \cdot t_{D'M} + x_{D'} \\ y_{D'M} = r_{D'y} \cdot t_{D'M} + y_{D'} \\ z_{D'M} = r_{D'z} \cdot t_{D'M} + z_{D'} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x_{E'M} = r_{E'x} \cdot t_{E'M} + x_{E'} \\ y_{E'M} = r_{E'y} \cdot t_{E'M} + y_{E'} \\ z_{E'M} = r_{E'z} \cdot t_{E'M} + z_{E'} \end{cases} \quad (13)$$

Точки $C'_{D'M}(x_{D'M}, y_{D'M}, z_{D'M})$, $C'_{E'M}(x_{E'M}, y_{E'M}, z_{E'M})$ являются граничными точками отрезка $[C'_{D'M}, C'_{E'M}]$ с минимальным расстоянием между скрещивающимися визирными лучами AD' и BE' (рис. 1).

Искомая точка $C'(x_C, y_C, z_C)$ может, например, располагаться в середине минимального отрезка $[C'_{D'M}, C'_{E'M}]$. Тогда формулы для расчета координат x_C, y_C, z_C такой "единственной" точки имеют вид:

$$x_C = (x_{D'M} + x_{E'M})/2, \quad (14)$$

$$y_C = (y_{D'M} + y_{E'M})/2, \quad (15)$$

$$z_C = (z_{D'M} + z_{E'M})/2. \quad (16)$$

Для разработанной геометрической модели измерений (рис. 1)

координату x_C точки C' целесообразно принимать равной нулю ($x_{C'} = 0$), так как визирный луч AD' принадлежит плоскости $AD'C'$. Все точки плоскости $AD'C'$ с визирным лучом AD' имеют координату абсцисс со значением ноль.

Предлагаемый теоретический подход экспериментально проверен при реконструкции "Дома Руссова" в городе Одессе, Украина (рис. 2).

Определялись координаты самой высокой точки C шпиля на крыше здания от нулевой горизонтальной плоскости ABC_I и точки C' уровня земли от нулевой горизонтальной плоскости ABC_I .



Рис. 2. Лицевой фасад "Дома Руссова" в городе Одессе, Украина

На основании прямых измерений четырех параметров: углов α , β , γ , расстояния AB и данных разработанной геометрической модели получали значения координат четырех исходных точек A , B , D , E . Координаты этих четырех точек являются исходными данными для определения координат самой высокой точки C шпиля на крыше здания от нулевой горизонтальной плоскости ABC_I .

В соответствии с предложенной геометрической моделью (рис. 1) экспериментально теодолитом ЗТ5КП (№71923А) измерены углы $\alpha = 21,18^\circ$, $\beta = 63,9^\circ$, $\gamma = 19,5^\circ$ и расстояние между точками A и B — $AB = 45600$ мм.

Расстояние между точками A и D_I принималось равным 10000 мм и между точками B и E_I 15000 мм — $y_D = AD_I = 10000$ мм, $BE_I = 15000$ мм.

В соответствии с разработанной трехмерной геометрической моделью измерений (рис. 1) все три координаты точки A равны нулю — $x_A = 0$, $y_A = 0$, $z_A = 0$.

Координаты y_B и z_B точки B и координата x_D точки D также равны нулю — $y_B = 0$, $z_B = 0$, $x_D = 0$. Координата z_D точки D и координаты y_E , z_E и x_E точки E рассчитываются по формулам —
 $z_D = |AD_I| \cdot \operatorname{tg} \alpha = 10000 \cdot 0,3875 = 3875$ мм;
 $y_E = |BE_I| \cdot \sin \beta = 15000 \cdot 0,8985 = 13470$ мм;

$$z_E = |BE| \cdot \operatorname{tg} \gamma = 15000 \cdot 0,3634 = 5312 \text{ мм};$$

$$x_E = |AB| - |BE| \cdot \cos \beta = 45600 - 15000 \cdot 0,4399 = 39001 \text{ мм}.$$

На основании полученных координат всех четырех исходных точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $D(x_D, y_D, z_D)$, $E(x_E, y_E, z_E)$ решается задача определения минимального расстояния между скрещивающимися визирными лучами AD и BE (рис. 1). Рассчитываются координаты $x_{DM}, y_{DM}, z_{DM}, x_{EM}, y_{EM}, z_{EM}$ точек $C_{DM}(x_{DM}, y_{DM}, z_{DM})$, $C_{EM}(x_{EM}, y_{EM}, z_{EM})$, для которых расстояние $\rho(C_{DM}, C_{EM})$ между двумя скрещивающимися лучами AD и BE минимально ρ_{\min} — $x_{DM} = 0$ мм; $x_{EM} = 7,61$ мм; $y_{DM} = 93279$ мм; $y_{EM} = 93066$ мм; $z_{DM} = 36149$ мм; $z_{EM} = 36699$ мм.

Искомая точка $C(x_C, y_C, z_C)$ располагается в середине минимального отрезка $[C_{DM}, C_{EM}]$. Поэтому её координаты легко рассчитываются — $x_C = 3,81$ мм, $y_C = 93172,1$ мм, $z_C = 36423,8$ мм.

Абсолютная погрешность расчетов по каждой из координат составляет $\Delta x = 3,81$ мм, $\Delta y = 106,5$ мм, $\Delta z = 275,7$ мм. Относительная погрешность решения экстремальной задачи равна $\Sigma_x = 100$ %, $\Sigma_y = 0,11$ %, $\Sigma_z = 0,75$ %. Для $\Sigma_x = 0,9$ % $x_C = 0,034$ мм.

Разработанная *комбинированная* геометрическая модель объединяет модели, расположенные выше и ниже нулевой горизонтальной плоскости ABC_I [6-7].

Часть параметров являются общими параметрами как для геометрической модели, расположенной выше нулевой горизонтальной плоскости ABC_I , так и для геометрической модели, расположенной ниже нулевой горизонтальной плоскости ABC_I .

Таковыми общими параметрами для верхней части и нижней части модели являются угол $\beta = 63,9^\circ$ и расстояние $AB = 45600$ мм. Поэтому для определения координат точки C' уровня земли до нулевой горизонтальной плоскости ABC_I измерять эти параметры не нужно.

В соответствии с предложенной геометрической моделью (рис. 1) для определения параметров точки C' теодолитом ЗТ5КП (№71923А) измерены углы $\alpha' = 1,5^\circ$, $\gamma' = 1,33^\circ$.

Координата $x_{D'}$ точки D' равна нулю — $x_{D'} = 0$. Координата $z_{D'}$ точки D' и координаты $y_{E'}$, $z_{E'}$ и $x_{E'}$ точки E' рассчитываются по формулам — $z_{D'} = |AD| \cdot \operatorname{tg} \alpha' = 261,86$ мм; $y_{E'} = y_E = |BE| \cdot \sin \beta = 13470,41$ мм; $z_{E'} = |BE| \cdot \operatorname{tg} \gamma' = 349,1$ мм; $x_{E'} = x_E = |AB| - |BE| \cdot \cos \beta = 39001$ мм.

На основании полученных координат всех четырех исходных точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $D'(x_{D'}, y_{D'}, z_{D'})$, $E'(x_{E'}, y_{E'}, z_{E'})$ решается задача определения минимального расстояния между скрещивающимися визирными лучами AD' и BE' (рис. 1).

Рассчитываются координаты $x_{D'M}, y_{D'M}, z_{D'M}, x_{E'M}, y_{E'M}, z_{E'M}$ точек $C'_{D'M}(x_{D'M}, y_{D'M}, z_{D'M})$, $C'_{E'M}(x_{E'M}, y_{E'M}, z_{E'M})$, для которых расстояние $\rho(C'_{D'M}, C'_{E'M})$ между двумя скрещивающимися лучами AD' и BE' минимально ρ_{\min} — $x_{D'M} = 0$ мм; $y_{D'M} = 93080,5$ мм; $z_{D'M} = 2437,4$ мм; $x_{E'M} = 0,0136$ мм; $y_{E'M} = 93081,15$ мм; $z_{E'M} = 2412,5$ мм.

Пусть искомая точка $C'(x_{C'}, y_{C'}, z_{C'})$ располагается в середине минимального отрезка $[C'_{DM}, C'_{EM}]$ и её отклонение от профильной плоскости находится в пределах одного процента срединного отклонения по оси абсцисс Ox . Тогда её координаты легко рассчитываются — $x_{C'} = 0,0068$ мм, $y_{C'} = 93080,8$ мм, $z_{C'} = 2424,95$ мм.

Абсолютная погрешность расчетов по каждой из координат составляет $\Delta'_x = 6,8 \cdot 10^{-3}$ мм = 0,0068 мм; $\Delta'_y = 0,325$ мм; $\Delta'_z = 12,45$ мм. Относительная погрешность решения экстремальной задачи равна $\Sigma'_x = 100$ %, $\Sigma'_y = 0,0004$ %, $\Sigma'_z = 0,5$ %. Для $\Sigma'_x = 0,9$ % $x_{C'} = 0,00006$ мм.

Таким образом, расстояние от самой высокой точки C шпиля на крыше здания до нулевой горизонтальной плоскости ABC_I равно 36423,8 мм — $CC_I = 36423,8$ мм. Расстояние от точки C' уровня земли до нулевой горизонтальной плоскости ABC_I равно 2424,95 мм — $C'C_I = 2424,95$ мм.

Суммарное значение расстояний ($C'C = CC_I + C'C_I$) от самой высокой точки C , шпиля на крыше здания, до нулевой горизонтальной плоскости ABC_I и расстояния от точки C' , уровня земли, до нулевой горизонтальной плоскости ABC_I , равно расстоянию от уровня земли (точка C') до самой высокой точки C шпиля на крыше здания "Дома Руссова" — $C'C = 38848,8$ мм.

Выводы. 1. Разработанная *комбинированная* геометрическая модель объединяет модели, расположенные выше и ниже нулевой горизонтальной плоскости ABC_I .

Комбинированная геометрическая модель позволяет определять параметры объекта, имеющего наиболее общее расположение относительно нулевой горизонтальной плоскости измерительного оборудования.

2. Часть параметров являются общими параметрами как для геометрической модели, расположенной выше нулевой горизонтальной плоскости ABC_I , так и для геометрической модели, расположенной ниже нулевой горизонтальной плоскости ABC_I .

Таковыми общими параметрами для верхней части и нижней части модели являются угол β и расстояние AB .

Поэтому для определения координат точки C' уровня земли до нулевой горизонтальной плоскости ABC_I измерять эти параметры не нужно.

3. Только шесть исходных параметров (углы $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \gamma'$, расстояние AB) разработанной *комбинированной* геометрической модели определяются прямыми измерениями.

4. Значения еще семи исходных параметров непосредственно позволяет задать предложенная *комбинированная* геометрическая модель.

И шесть параметров рассчитываются на основании измеренных параметров и простейших геометрических соотношений.

5. Предложенный оптимизационный подход имеет реальную геометрическую интерпретацию.

6. Абсолютная погрешность расчетов координат недоступной точки реконструируемого объекта приемлема в строительстве.

Под *недоступной точкой объекта* понимается точка, с которой непосредственный контакт невозможен.

7. Низкая относительная погрешность расчетов координат недоступной точки доказывает высокую эффективность предложенного оптимизационного подхода.

Перспективы дальнейших исследований.

Предполагается для разработанных комбинированной геометрической модели и оптимизационного метода описать достаточные условия существования экстремума, изложить способ определения координат недоступной точки, удовлетворяющих требуемой относительной погрешности, и провести исследования по определению параметров компонентов Католического собора в городе Одессе.

Литература

1. *Брашлов А. Ю.* Инженерная геометрия. Киев. Каравелла, 2013. 456 с.
Brailov A. Yu. Engineering Graphics. Theoretical Foundations of Engineering Geometry for Design. – Springer International Publishing, 2016. 340 p. (ISBN 978-3-319-29717-0, DOI 10.1007/978-3-319-29719-4).
2. *Брашлов А. Ю., Панченко В. И.* Аналитическое основание геометрической модели измерений параметров недоступной точки объекта / *Вестник Херсонського національного технічного університету*. Херсон. ХНТУ, 2019. Вып. 2(69). Часть 3. С. 237–243.
3. *Брашлов А. Ю., Панченко В. И.* Алгоритм расчета параметров недоступной точки объекта / *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь. МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2019. Вип. 16. С. 39–49.
4. *Корн Г. А. Корн Т. М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва. Наука, 1978. 832 с.
5. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / *И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев*. Москва. Наука, 1986. 544 с.
6. *Брашлов А. Ю., Панченко В. И.* Комбинированная геометрическая модель в оптимизационном подходе определения параметров недоступной точки объекта / *Прикладные вопросы математического моделирования*. Херсон. ХНТУ, 2020. Том 3. № 2.1 С. 27–38. ISSN 2618-0332.
7. *Брашлов А. Ю., Панченко В. И.* Комбинированная геометрическая модель для определения высоты объекта / *Материалы XXI міжнародної конференції по математическому моделюванню*. Херсон. ХНТУ, 2020. С. 63–65.

References

1. *Brailov A.* (2013) *Inzhenernaja geometrija*. Kiev. Karavella. 456 p.
1. *Brailov A. Yu.* (2016) *Engineering Graphics. Theoretical Foundations of Engineering Geometry for Design*. – Springer International Publishing. 340 p. (ISBN 978-3-319-29717-0, DOI 10.1007/978-3-319-29719-4).
2. *Brailov A., Panchenko V.* (2019) Analytical basis of a geometric model of measurements of parameters of an inaccessible point of an object / *Bulletin of the Khersonsky National Technical University*. Kherson. KHNTU, No 2(69)/3. P. 237–243.
3. *Brailov A., Panchenko V.* (2019) Algorithm for calculating the parameters of the inaccessible point of the object / *Suchasny problems of the model. Mel_topol. MDPU im. B. Khmel'nitsky*. No 16. P. 39–49.
4. *Korn G., Korn T.* (1978) *Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers*. Moscow. Science. 832 p.
5. *Bronstein I.* (1986) *Handbook of Mathematics for Engineers and Students of Colleges / I. Bronstein, K. Semendyaev*. Moscow. Science. 544 p.
6. *Brailov A., Panchenko V.* (2020) Combined geometric model in the optimization approach of determining the parameters of an inaccessible object point / *Applied questions of mathematical modeling*. Kherson. HSTU. Volume 3. No. 2.1 P. 27-38. ISSN 2618-0332.
7. *Brailov A., Panchenko V.* (2020) Combined geometric model for determining the height of an object / *Materials of the XXI international conference on mathematical modeling*. Kherson. HSTU. P. 63-65.

д. т. н., ст. наук. співр., професор **Браїлов О.Ю.**,
brailov@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5021-8372

магістр **Панченко В.І.**,
gb126t@gmail.com

Одеська державна академія будівництва та архітектури

ОПТИМІЗАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕДОСТУПНОЇ ТОЧКИ ОБ'ЄКТА

У даному дослідженні розроблено оптимізаційний підхід для визначення параметрів недоступної точки об'єкта. Виявлено проблему і поставлені першочергові задачі.

Суть проблеми: об'єктивне протиріччя між необхідністю отримання точного значення потрібного параметра і наявністю похибок при будь-якому вимірюванні.

Мета дослідження – розробити комплексно тривимірну геометричну і аналітичну моделі визначення мінімальної області значень параметрів недоступної точки об'єкта.

Задачі статті:

1. Розробити тривимірну геометричну модель з перехресними візирними променями для безконтактного визначення координат недоступної точки об'єкта при заданому розташуванні геодезичного обладнання. 2. Розробити оптимізаційну аналітичну модель визначення області значень параметрів недоступної точки об'єкта відповідно до запропонованої тривимірної геометричної моделі з перехресними візирними променями.

У запропонованому оптимізаційному підході розроблена тривимірна геометрична модель з перехресними візирними променями для визначення координат недоступної точки об'єкта. Обумовлені точки C і C' розташовується в області $[C_{DM}, C_{EM}]$, $[C'_{DM}, C'_{EM}]$ мінімальної відстані ρ_{min} між перехресними візирними променями.

Оптимізаційна задача визначення координат недоступної точки об'єкта в просторі зводиться до задачі визначення мінімальної відстані між двома перехресними візирними променями. Завдання має єдине рішення, якщо візирні промені не паралельні.

Пошук екстремуму функції відстані між двома візирними променями, і саме мінімуму, має реальну геометричну інтерпретацію.

Функція відстані $\rho = f(t_{CD}, t_{CE})$ досягає свого екстремуму ρ_{min} , коли її часткові похідні по кожній змінній дорівнюють нулю. Тому вирішується система диференціальних рівнянь. Шукана точка $C'(x_C, y_C, z_C)$ може, наприклад, розташовуватися в середині мінімального відрізка $[C'_{DM}, C'_{EM}]$.

Запропонований підхід перевірений на реальних даних.

Ключові слова: об'єкт, точка, екстремум, візирний промінь, координати точки, геометрична модель, аналітична модель.

Ph. D., Dr. Sci., Professor, Member ISGG **Aleksandr Yurievich Brailov**,
brailov@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5021-8372

Magistracy, Member ISGG **Vitaliy Ivanovich Panchenko**,
gb126t@gmail.com

Odessa State Academy of Civil Building and Architecture

THE OPTIMIZING APPROACH TO DETERMINATION THE PARAMETERS OF AN INACCESSIBLE POINT

In the present research the optimizing approach to the determination of the parameters of an inaccessible point of an object is developed. The common issues are revealed and essential steps of their resolution are identified.

The essence of the problem is that the unavoidable contradiction between a need of obtaining the exact value of the determined parameter and an error involved in any measurement. The purpose of the present work is to develop in a complex three-dimensional geometrical and analytical models of the

determination of the minimum domain (area, vicinity) of values of the parameters of an inaccessible point of an object.

It is achieved in two steps: 1. Development of a three-dimensional geometrical model with crossed directional rays for contactless determination of the coordinates of an inaccessible point of an object under a given arrangement of the geodetic equipment. 2. Development of an optimizing analytical model for the determination of domain (area, vicinity) of values of parameters of an inaccessible point of an object according to the developed three-dimensional geometrical model with crossed directional rays. In the proposed optimizing approach, the three-dimensional geometrical model with crossed directional rays for the determination of coordinates of the inaccessible point of an object is developed. It is discussed that points C and C' , coordinated of which to be determined, locates in domain $[C_{DM}, C_{EM}]$, $[C'_{DM}, C'_{EM}]$ of the minimum distance ρ_{\min} between crossed directional rays. The optimizing problem of the determination of coordinates of an inaccessible point of an object in space is reduced to a problem of the determination of the minimum distance between two crossed directional rays. It is shown that the problem has a unique solution if the directional rays are not parallel. It is discussed that mathematical finding of an extremum of function of the distance between two directional rays, and the discussed minimum, has real geometrical interpretation.

It's known from the theory of function of multiple variables that function $\rho = f(t_{CD}, t_{CE})$ reaches its extremum ρ_{\min} when its partial derivatives by each variable are equal to zero. Therefore, the system of the differential equations solved. The required point $C' (x_{C'}, y_{C'}, z_{C'})$ can be located, for example, in the middle of the minimum segment $[C'_{DM}, C'_{EM}]$. The proposed approach is verified using real experimental data.

Keywords: an object, point, extremum, directional ray, collimating ray, coordinates of a point, geometrical model, analytical model.