

## ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО СПІРАЛЬНОМУ ЖОЛОБУ ПІД ДІЄЮ СИЛИ ВЛАСНОЇ ВАГИ

*У роботі складено диференціальні рівняння руху частинки по шорткій поверхні спірального жолобу під дією сили власної ваги. Крива перерізу жолоба вертикальною площиною, що проходить через вісь поверхні, задана параметричними рівняннями у загальному вигляді. Розглянуто часткові випадки для окремих ліній перерізу (прямої та кола). Рівняння розв'язано чисельними методами та побудовано траєкторії руху частинки по гвинтовій поверхні. Після стабілізації руху частинка має сталу швидкість та її траєкторією є гвинтова лінія. Для цього часткового випадку знайдено аналітичні залежності, що дозволяють розрахувати швидкість руху частинки та її віддалення від осі поверхні. Розглянуто також випадок, коли найнижча гвинтова лінія жолобу має кут підйому, рівний куту тертя частинки по поверхні.*

*Ключові слова: спіральний жолоб; частинка; лінія перерізу; траєкторія руху; диференціальні рівняння.*

**Постановка проблеми.** Гвинтові поверхні є універсальним робочим органом багатьох машин. Пристрої з вертикальним гвинтовим жолобом використовуються в гірничорудній промисловості для збагачення корисних копалин і називаються гвинтовими сепараторами. Переріз жолоба вертикальною площиною, що проходить через вісь гвинтової поверхні, може мати різну форму. Характер руху окремого елемента матеріалу по гвинтовій поверхні залежить від форми цієї поверхні, тобто від кривої перерізу жолоба. Описати рух тіла по гвинтовій поверхні надзвичайно складно, оскільки потрібно враховувати додаткові сили інерції від його обертання. Тому в деяких випадках ці сили не враховуються при малих розмірах тіла [1] або при невеликих куткових швидкостях обертання тіла, наприклад, при роботі підйомно-транспортних машин [2]. У цих випадках тіло приймається за частинку. Для вивчення режимів руху частинки в залежності від конструктивних параметрів жолоба важливо мати аналітичні залежності, які описують цей рух.

**Ціль статті.** Дослідити закономірності руху матеріальних частинок по гвинтовій поверхні із заданою лінією її осевого перерізу.

**Аналіз основних досліджень і публікацій.** Частинки, що контактують з поверхнею і рухаються по ній можуть мати різне походження: механічні частинки [3], частинки в потоці [4, 5], частинки

газу або рідини [6]. Звичайно, рух окремої частинки не може ідентифікуватися з рухом тіла чи технологічного матеріалу, що складається з окремих частинок. Проте, на основі руху окремої частинки, можна знайти залежності, що можуть бути застосовані до тіла або матеріалу, або визначити напрямок подальших досліджень. Так, у роботі [7] розглянуто рух матеріальної частинки по поверхні косоного закритого гелікоїда під дією сили власної ваги, а у роботі [8] – по поверхні гвинтового коноїда з обмежуючим вертикальним співвісним циліндром.

**Основна частина.** Лінію осьового перерізу жолоба задаємо параметричними рівняннями у плоскій системі координат  $\rho\theta h$  (рис. 1,а). У цій системі рівняння лінії у функції незалежної змінної  $u$  в загальному випадку будуть мати вигляд:

$$\rho = \rho(u); \quad h = h(u). \quad (1)$$

В окремому випадку, коли обидва рівняння (1) є лінійними, вони опишуть пряму лінію, а в загальному – криву, яка може бути зміщена від осі  $\theta h$  на відстань  $d$  (рис. 1,а).

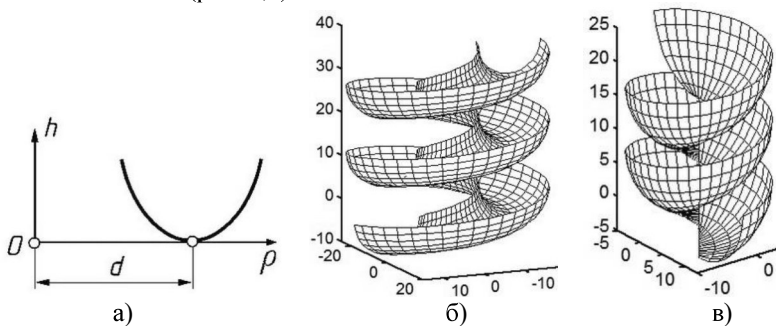


Рис. 1. До утворення гвинтової поверхні за допомогою кривої осьового перерізу:  
 а) крива осьового перерізу зі зміщенням вздовж осі  $\rho$  на величину  $d$ ;  
 б) гвинтова поверхня у загальному вигляді;  
 в) гвинтова поверхня при  $d = 0$

Наприклад, якщо кривою осьового перерізу гвинтової поверхні є дуга кола радіуса  $r$ , зміщена на величину  $d$ , то рівняння  $\rho = \rho(u); h = h(u)$  набувають вигляду:

$$\rho = r \cos u + d; \quad h = r \sin u. \quad (2)$$

Для того, щоб утворилася дуга півкола потрібного розташування, незалежна змінна  $u$  повинна змінюватися у межах  $u = \pi \dots 2\pi$ . Для утворення поверхні необхідно площину з кривою рівномірно обертати навколо осі  $\theta h$  і одночасно переміщати її вздовж цієї осі, тобто надати площині гвинтовий рух. Безліч положень кривої у цьому русі утворює гвинтову поверхню. Математично таке утворення описується параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \alpha; \\ Y &= \rho \sin \alpha; \\ Z &= h + b\alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\alpha$  – друга незалежна змінна поверхні (кут повороту кривої перерізу жолоба навколо вертикальної осі  $Oh$ ).

У разі, коли рівняннями кривої  $\rho=\rho(u)$ ;  $h=h(u)$  є рівняння кола (2), рівняння (3) описують поверхню, зображену на рис. 1,б. При  $d=0$  гвинтову поверхню описуємо чвертю кола, тобто при зміні незалежної змінної  $u$  в межах  $u=1,5\pi \dots \pi$  (рис. 1,в). Координата  $\rho$  має фізичний сенс – це відстань від точки на гвинтовій поверхні до її осі.

Нехай крива осьового перерізу буде задана залежностями  $\rho=\rho(u)$ ;  $h=h(u)$ . Складемо диференціальні рівняння руху матеріальної точки по відповідній гвинтовій поверхні в проекціях на осі нерухомої системи координат. При цьому нам знадобиться напрямок нормалі до поверхні, оскільки вздовж неї спрямована сила реакції.

Координати вектора нормалі до поверхні знаходимо як векторний добуток двох векторів, дотичних до координатних ліній. Проекціями цих векторів є часткові похідні першого порядку поверхні (3):

$$\begin{aligned} X_u &= \rho'_u \cos \alpha; & Y_u &= \rho'_u \sin \alpha; & Z_u &= h'_u; \\ X_\alpha &= -\rho \sin \alpha; & Y_\alpha &= \rho \cos \alpha; & Z_\alpha &= b. \end{aligned} \quad (4)$$

Нижнім індексом позначена змінна, по якій проводиться диференціювання. Знаходимо векторний добуток векторів (4):

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} b\rho'_u \sin \alpha - \rho h'_u \cos \alpha; \\ -b\rho'_u \cos \alpha - \rho h'_u \sin \alpha; \\ \rho\rho'_u. \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Після приведення вектора нормалі (5) до одиничного його проєкції запишуться:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{b\rho'_u \sin \alpha - \rho h'_u \cos \alpha}{\sqrt{\rho^2(\rho_u'^2 + h_u'^2) + b^2 \rho_u'^2}}; \\ N_y &= -\frac{b\rho'_u \cos \alpha + \rho h'_u \sin \alpha}{\sqrt{\rho^2(\rho_u'^2 + h_u'^2) + b^2 \rho_u'^2}}; \\ N_z &= \frac{\rho\rho'_u}{\sqrt{\rho^2(\rho_u'^2 + h_u'^2) + b^2 \rho_u'^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Диференціальне рівняння руху частинки по гвинтовій поверхні (3) складемо у вигляді  $m\bar{w} = \bar{F}$ , де  $m$  – маса частинки,  $\bar{w}$  – вектор прискорення,  $\bar{F}$  – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є: сила ваги частинки  $mg$  ( $g=9,81 \text{ м/с}^2$ ), реакція поверхні і сила тертя  $fR$ , що надає опір ковзанню частинки по поверхні ( $f$  – коефіцієнт тертя). Наведене

векторне рівняння розпишемо в проекціях на осі координат, в результаті чого отримаємо систему з трьох диференціальних рівнянь.

Незалежними змінними поверхні (3) є  $u$  і  $\alpha$ . Щоб утворилася лінія на поверхні (у нашому випадку траєкторія руху частинки), пов'яжемо змінні  $u$  і  $\alpha$  між собою за допомогою нової змінної – часу  $t$ . При цьому зберігається зовнішня схожість рівнянь поверхні і лінії, але в першому випадку маємо залежності двох змінних –  $u$  і  $\alpha$ , а в другому – однієї змінної  $t$ . Щоб розрізнити рівняння поверхні і лінії на ній, для позначення координат точок поверхні застосуємо великі літери « $X$ », « $Y$ », « $Z$ », а для точок лінії на поверхні – малі « $x$ », « $y$ », « $z$ ». Знайдемо проекції швидкості частинки диференціюванням рівнянь (3) з урахуванням того, що  $u=u(t)$  і  $\alpha=\alpha(t)$ . При цьому похідні  $\rho$  і  $h$  по змінній  $u$  будемо позначати з відповідним нижнім індексом, а похідні за часом  $t$  – без індексу:

$$\begin{aligned}x' &= \rho'_u u' \cos \alpha - \rho'_u \alpha' \sin \alpha; \\y' &= \rho'_u u' \sin \alpha + \rho'_u \alpha' \cos \alpha; \\z' &= h'_u u' + b \alpha'.\end{aligned}\quad (7)$$

Знайдемо величину швидкості руху частинки:

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh'_u u' \alpha' + u'^2(h_u'^2 + \rho_u'^2)}. \quad (8)$$

Напрямок швидкості знайдемо приведенням її вектора до одиничного шляхом ділення проекцій (7) на величину швидкості (8):

$$\begin{aligned}T_x &= \frac{\rho'_u u' \cos \alpha - \rho'_u \alpha' \sin \alpha}{\sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh'_u u' \alpha' + u'^2(h_u'^2 + \rho_u'^2)}}; \\T_y &= \frac{\rho'_u u' \sin \alpha + \rho'_u \alpha' \cos \alpha}{\sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh'_u u' \alpha' + u'^2(h_u'^2 + \rho_u'^2)}}; \\T_z &= \frac{h'_u u' + b \alpha'}{\sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh'_u u' \alpha' + u'^2(h_u'^2 + \rho_u'^2)}}.\end{aligned}\quad (9)$$

Диференціюванням виразів (7) отримуємо другі похідні рівнянь траєкторії, тобто проекції прискорення:

$$\begin{aligned}x'' &= \left( \rho'_u u'' + \rho''_u u'^2 - \rho \alpha'^2 \right) \cos \alpha - (\rho \alpha'' + 2\rho'_u u' \alpha') \sin \alpha; \\y'' &= \left( \rho'_u u'' + \rho''_u u'^2 - \rho \alpha'^2 \right) \sin \alpha + (\rho \alpha'' + 2\rho'_u u' \alpha') \cos \alpha; \\z'' &= h''_u u'^2 + h'_u u'' + b \alpha''.\end{aligned}\quad (10)$$

Векторне рівняння  $m\bar{w} = \bar{F}$  розпишемо в проекціях на осі координат з урахуванням того, що сила тертя діє уздовж дотичної до траєкторії в протилежну сторону вектора швидкості:

$$\begin{aligned}
mx'' &= -fRT_x + RN_x; \\
my'' &= -fRT_y + RN_y; \\
mz'' &= -fRT_z + RN_z - mg.
\end{aligned}
\tag{11}$$

Після підстановки напрямних косинусів (6) і (9), а також других похідних (10) у рівняння (11) отримаємо систему диференціальних рівнянь, що описують рух частинки. Розв'язавши її відносно невідомих функцій  $\alpha'' = \alpha''(t)$ ,  $u'' = u''(t)$  та  $R=R(t)$ , отримаємо:

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= -\left(\frac{\alpha'f\rho}{AV} + \frac{b\rho'_u}{A^2}\right)\left(\alpha'^2\rho h'_u + g\rho'_u + u'^2B\right) + \\
&\quad + 2\alpha'u'\rho'_u\left[\frac{\alpha'fb\rho'_u}{AV} - \frac{\rho}{A^2}(\rho'^2 + h_u'^2)\right]; \\
u'' &= u'^2\left[\frac{u'f\rho B}{AV} - \frac{\rho^2(\rho''_u\rho'_u + h_u''h'_u) + b^2\rho''_u\rho'_u}{A^2}\right] + \\
&\quad + \left(\frac{\rho h'_u}{A^2} + \frac{u'f\rho'_u}{AV}\right)(2b\alpha'u'\rho'_u - g\rho) + \\
&\quad + \alpha'^2\rho\left[\frac{\rho'_u(\rho^2 + b^2)}{A^2} - \frac{u'f\rho h'_u}{AV}\right]; \\
R &= \frac{m}{A}\left[\alpha'^2\rho^2 h'_u - 2b\alpha'u'\rho'^2 + \rho(g\rho'_u - u'^2B)\right]
\end{aligned}
\tag{12}$$

У диференціальних рівняннях (12) символом  $V$  позначена швидкість руху частинки, вираз якої дано у (8). Крім того, введені ще два символи, які замінюють повторювані вирази:

$$A = \sqrt{\rho^2 h_u'^2 + \rho_u'^2(\rho^2 + b^2)}; \quad B = h'_u\rho''_u - h_u''\rho'_u.
\tag{13}$$

Розв'язання системи диференціальних рівнянь (12) дає всі необхідні характеристики руху матеріальної точки: траєкторію, швидкість і реакцію поверхні.

Розглянемо приклади. Нехай осьовим перерізом гвинтової поверхні буде пряма лінія, нахилена до горизонтальної площини під кутом  $\beta$ . У такому випадку утвореною поверхнею буде косий (нерозгортний) гелікоїд. У цьому випадку рівняння (1)  $\rho = \rho(u)$ ;  $h = h(u)$  матимуть лінійний характер:

$$\rho = u \cos \beta; \quad h = u \sin \beta,
\tag{14}$$

де змінна  $u$  має фізичний сенс: вона є довжиною прямолінійної твірної косоного гелікоїда, причому точка відліку знаходиться на його осі. Знаходимо перші і другі похідні рівнянь (14) по змінній  $u$ :

$$\begin{aligned}
\rho'_u &= \cos \beta; & h'_u &= \sin \beta; \\
\rho''_u &= 0; & h''_u &= 0.
\end{aligned}
\tag{15}$$

Підстановкою виразів (14) і (15) у формулу для визначення швидкості (8) і у вирази (13) отримаємо:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\alpha'^2(u^2 \cos^2 \beta + b^2) + 2bu'\alpha' \sin \beta + u'^2}; \\ A &= \cos \beta \sqrt{u^2 + b^2}; \quad B = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Після підстановки (14), (15) і (16) у (12) отримуємо систему диференціальних рівнянь, що описують рух частинки по поверхні косоного гелікоїда:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= - \left( \frac{\alpha' f u \cos \beta}{V \sqrt{u^2 + b^2}} + \frac{b}{u^2 + b^2} \right) (\alpha'^2 u \sin \beta + g) + \\ &\quad + 2\alpha' u' \left( \frac{\alpha' f b \cos \beta}{V \sqrt{u^2 + b^2}} - \frac{u}{u^2 + b^2} \right); \\ u'' &= \alpha'^2 u \left( \frac{u^2 \cos^2 \beta + b^2}{u^2 + b^2} - \frac{u u' f \cos \beta \sin \beta}{V \sqrt{u^2 + b^2}} \right) + \\ &\quad + \left( \frac{f u' \cos \beta}{V \sqrt{u^2 + b^2}} + \frac{u \sin \beta}{u^2 + b^2} \right) (2b\alpha' u' - g u); \\ R &= \frac{m \cos \beta}{\sqrt{u^2 + b^2}} (\alpha'^2 u^2 \sin \beta - 2b\alpha' u' + g u). \end{aligned} \quad (17)$$

Щоб знайти залежності  $\alpha = \alpha(t)$  та  $u = u(t)$ , досить вирішити систему перших двох рівнянь (17), бо вони між собою пов'язані, а реакція поверхні  $R$  визначається з цих розв'язків.

Розв'язання системи (17) здійснювалося чисельними методами при параметрах гелікоїда  $b = 0,2$  м та  $\beta = \pi/6$ . Частинка подавалася на поверхню з нульовою початковою швидкістю  $V_0 = 0$  при  $u_0 = 0,5$  м, тобто на відстані  $0,5$  м від осі гелікоїда уздовж прямолінійної твірної або на відстані  $\rho_0 = u_0 \cos \beta = 0,43$  м. У початковий момент руху частинки напрямком її швидкості збігається з лінією найбільшого нахилу (рис. 2). Згодом частинка рухається по поверхні на певній відстані від її осі, причому ця відстань залежить від коефіцієнта тертя  $f$ .

На рис. 3 наведені графіки зміни відстані  $u$  і швидкості  $V$ . З часом процес руху частинки стабілізується, і ці величини наближаються до постійних значень. Таким чином, частинка з часом починає рухатися по гвинтовій лінії з постійною швидкістю, причому віддалення частинки від осі поверхні і її швидкість залежать від коефіцієнта тертя  $f$ . Кінематичні характеристики встановленого руху можна знайти аналітично.

Після стабілізації руху кутове прискорення  $\alpha' = \omega$ , швидкість  $V$  і відстань  $u$  стають сталими, отже,  $\alpha'' = 0$ ,  $u'' = u' = 0$ . Підставляючи ці значення у перше рівняння системи (17), ми отримуємо рівність нулю

добутку перших двох виразів у дужках. Оскільки друга дужка не може бути рівною нулю, прирівняємо до нуля першу дужку і отримаємо:

$$f u \cos \beta \sqrt{u^2 + b^2} + b \sqrt{u^2 \cos^2 \beta + b^2} = 0. \quad (18)$$

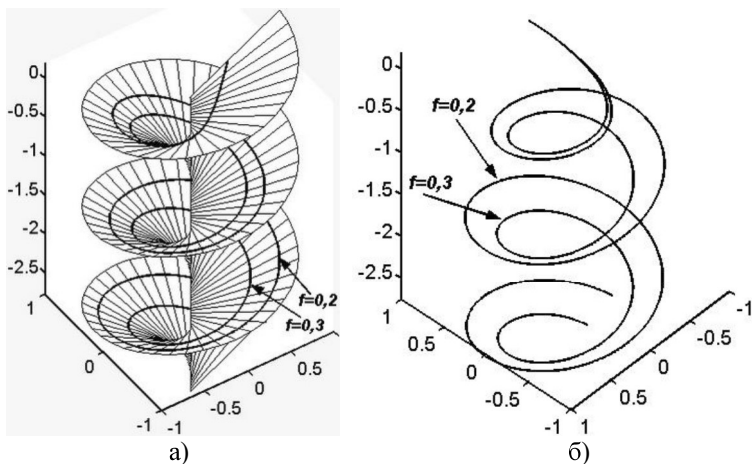


Рис. 2. Траєкторії руху частинок з різним коефіцієнтом тертя по поверхні косої гелікоїди:

- а) поверхню видима;
- б) поверхню не відображено

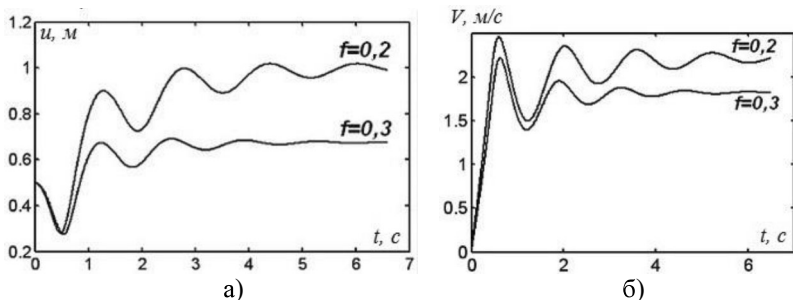


Рис. 3. Графіки, що характеризують рух частинок з різним коефіцієнтом тертя по поверхні косої гелікоїди:

- а) зміна відстані  $u$ ;
- б) зміна швидкості  $V$

Розв'язання рівняння (18) відносно  $u$  дає:

$$u = \frac{b}{\sqrt{2}f} \sqrt{1 - f^2 + \sqrt{\frac{4f^2}{\cos^2 \beta} + (1 - f^2)^2}}. \quad (19)$$

При  $b=0,2$ ,  $\beta=\pi/6$  і  $f=0,2$  формула (19) дає:  $u=1$  м. При тих же значеннях  $b$  і  $\beta$  та  $f=0,3$  маємо:  $u=0,68$  м. Отримані результати повністю узгоджуються з величинами, до яких наближається відстань  $u$  на відповідному графіку (рис. 3, а).

Для знаходження кутової швидкості  $\omega$  обертання частинки скористаємося другим рівнянням системи (17), з якої знаходимо:

$$\omega = \sqrt{g \sin \beta / (u^2 \cos^2 \beta + b^2)}. \quad (20)$$

При підстановці у (20) значень  $u$  із (19) одержимо величину кутової швидкості, яка дорівнює  $2,5 c^{-1}$  для частинок з коефіцієнтом тертя  $f=0,2$  і  $2,9 c^{-1}$  для частинок з коефіцієнтом тертя  $f=0,3$ . Нарешті, швидкість руху  $V$  визначимо за формулою (16), яка після стабілізації руху набуває вигляду:

$$V = \omega \sqrt{u^2 \cos^2 \beta + b^2}. \quad (21)$$

Відповідно до формули (21) отримуємо дві величини швидкості:  $2,2$  м/с і  $1,8$  м/с, що теж цілком узгоджується з даними графіка швидкостей на рис. 3,б. Для встановленого руху можна знайти при необхідності реакцію поверхні, яка теж буде постійною і визначиться з третього рівняння (17):

$$R = m \cos \beta (\omega^2 u^2 \sin \beta + g u) / \sqrt{u^2 + b^2}. \quad (22)$$

Розглянемо рух частинки по криволінійному жолобу, утвореному гвинтовим рухом півкола (рис. 1,б), яка описується параметричними рівняннями (2). Знайдемо перші і другі похідні рівнянь (2) за змінною  $u$  і підставимо у систему (12). Після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -\frac{r}{A} \left( \frac{\alpha' f \rho}{V} - \frac{b r \sin u}{A} \right) (\alpha'^2 \rho \cos u - g \sin u - r u'^2) + \\ &\quad + \frac{2 \alpha' u' r^2 \sin u}{A} \left( \frac{\alpha' f b \sin u}{V} + \frac{\rho r}{A} \right); \\ u'' &= -\frac{r^2 u'^2}{A} \left( \frac{b^2 \sin u \cos u}{A} + \frac{u' \rho f}{V} \right) - \\ &\quad - \frac{r}{A} \left( \frac{\rho \cos u}{A} - \frac{f u' \sin u}{V} \right) (2 b r \alpha' u' \sin u + g \rho) - \\ &\quad - \frac{\alpha'^2 \rho r}{A} \left( \frac{(\rho^2 + b^2) \sin u}{A} + \frac{f \rho u' \cos u}{V} \right); \\ R &= \frac{m r}{A} \left[ \alpha'^2 \rho^2 \cos u - 2 b r \alpha' u' \sin^2 u + \rho (r u'^2 - g \sin u) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

де  $\rho = r \cos u + d$ ;  $A = r \sqrt{\rho^2 + b^2 \sin^2 u}$ ;  $V = \sqrt{\alpha'^2 (\rho^2 + b^2) + 2 b r \alpha' u' \cos u + r u'^2}$ .



Чисельне інтегрування системи диференціальних рівнянь (23) проводилося для трьох випадків. В основу їх поділу був покладений кут  $\varphi$  підйому нижньої гвинтової лінії – дна жолоба. Розглядалися випадки, коли кут  $\varphi$  був менше кута тертя, дорівнював куту тертя і був більше кута тертя. Кут  $\varphi$  визначається через співвідношення сталих  $b$  і  $d$ :  $\operatorname{tg}\varphi=b/d$ . На рис. 4 представлені графічні ілюстрації руху частинки по гвинтовій поверхні для випадку, коли  $b/d < f$ , тобто для випадку, коли кут  $\varphi$  менше кута тертя. Частинка подавалася на поверхню біля верхньої межі жолоба з нульовою початковою швидкістю. Пройшовши певну траєкторію, вона зупинялася на дні жолоба (рис. 4, а). Зміна швидкості руху частинки показана на графіку (рис. 4, б). У такому випадку рух технологічного матеріалу по жолобу неможливий – будуть виникати затори.

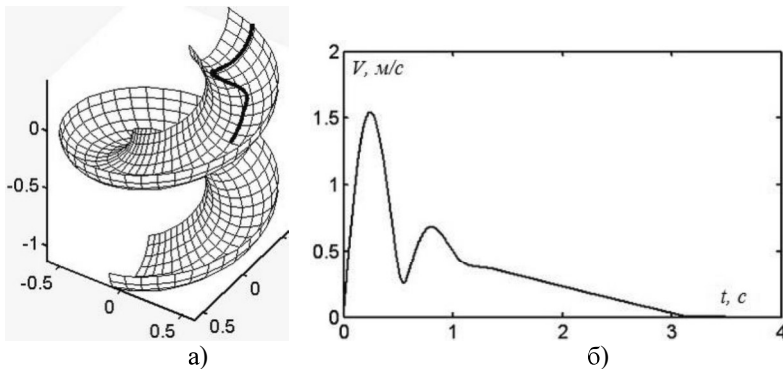


Рис. 4. Графіки, що характеризують рух частинки по жолобу гвинтової поверхні при  $r=0,25, d=0,5, b=0,14, f=0,3$ :  
 а) траєкторія руху;  
 б) графік зміни швидкості  $V$

Якщо  $b/d > f$ , тобто кут підйому нижньої гвинтової лінії жолоба більше за кут тертя, то рух частинок з часом стабілізується. На рис. 5 наведені графічні ілюстрації руху частинок з різними коефіцієнтами тертя по гвинтовій поверхні, побудованій при  $r=0,25, d=0,5, b=0,2$ . Цифрою 1 позначені графіки, що стосуються руху частинки з коефіцієнтом тертя  $f=0,3$ , а цифрою 2 – графіки, що стосуються руху частинки з коефіцієнтом тертя  $f=0,2$ . В обох випадках частинки подавалися на поверхню у верхній частині жолоба з нульовою початковою швидкістю. Їх траєкторії у початковій фазі руху практично збігаються, а потім розділяються і наближаються до гвинтових ліній, розташованих на різній відстані від осі поверхні (рис. 5,а). На рис. 5,б ці траєкторії для більшої наочності показані на вигляді зверху без поверхні. Графіки зміни швидкості (рис. 5,в) показують, що з часом швидкість руху наближається до сталого значення. При необхідності, як і в попередньому випадку, можна знайти точний

аналітичний розв'язок і визначити кінематичні параметри руху частинки після його стабілізації.

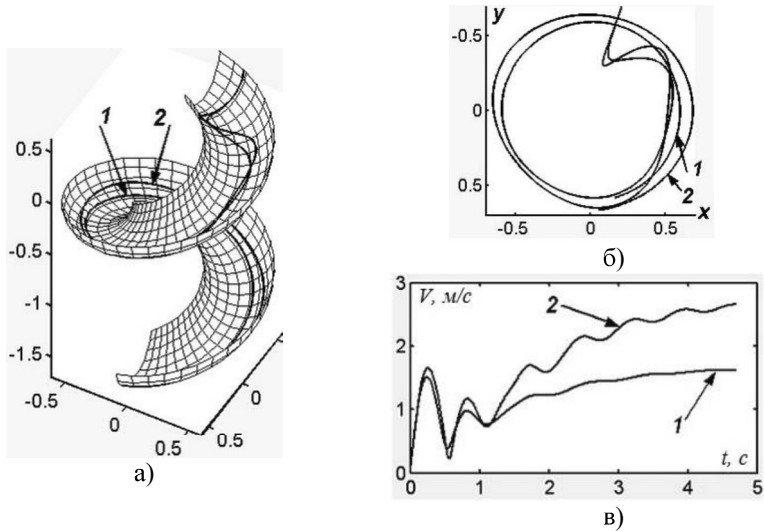


Рис. 5. Графіки, що характеризують рух частинки по жолобу гвинтової поверхні (1 – для  $f=0,3$ , 2 – для  $f=0,2$ ):  
 а) траєкторії руху на поверхні;  
 б) траєкторії руху – вид зверху;  
 в) графіки зміни швидкості  $V$

Нарешті, останній випадок є граничним між першим і другим, тобто при  $b/d=f$ . Це означає, що кут підйому нижньої гвинтової лінії жолоба дорівнює куту тертя. Якби ця лінія була прямою, то частинка по дну жолоба рухалася б з постійною швидкістю, як по дну похилого циліндра. Але криволінійна форма дна жолоба змінює характер руху. Інтегрування системи (23) при  $r=0,25$ ,  $d=0,5$ ,  $b=0,15$ ,  $f=0,3$  (тобто при дотриманні умови  $b/d=f$ ) показало, що незалежно від величини і напрямку початкової швидкості траєкторія руху частинки з часом асимптотично наближається до гвинтової лінії – дна жолоба. На рис. 6,а,б побудована траєкторія частинки, яка починає свій рух з нульовою початковою швидкістю у верхній частині жолоба. Швидкість руху з часом теж асимптотично наближається до нуля (рис. 6,в) і частинка рухається нескінченно довго.

Слід зазначити, що при  $b=0$  система (23) опише окремий випадок руху частинки по внутрішній поверхні тора.

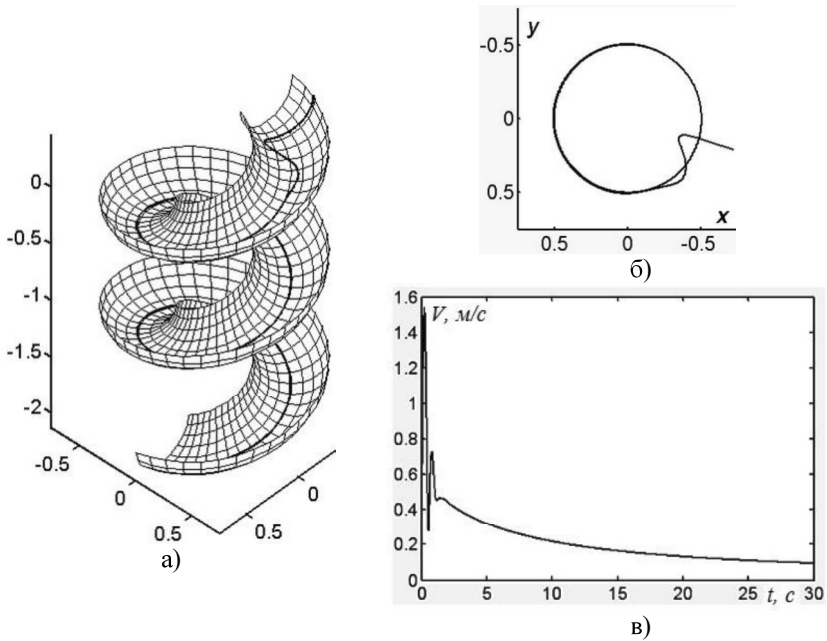


Рис. 6. Графіки, що характеризують рух частинки по жолобу гвинтової поверхні при  $r=0,25$ ,  $d=0,5$ ,  $b=0,15$ ,  $f=0,3$ :  
 а) траєкторія руху на поверхні;  
 б) траєкторія руху – вид зверху;  
 в) графік зміни швидкості  $V$

**Висновки та перспективи.** Отримані диференціальні рівняння дозволяють описувати рух частинки по гвинтовій поверхні при різних кривих перерізу цієї поверхні площиною, що проходить через вісь. Якщо перерізом є дуга кола, то утворюється спіральний жолоб. В окремому випадку, коли перерізом є пряма лінія, нахилена від осі вгору, то гвинтовою поверхнею буде косий гелікоїд. В обох випадках частинка після стабілізації рухається по гвинтовій лінії, тобто на певній відстані від осі поверхні. Ця відстань залежить від коефіцієнта тертя при заданих конструктивних параметрах гвинтової поверхні і може бути знайдена аналітично. У разі спірального жолоба кут підйому його нижньої гвинтової лінії повинен бути більше кута тертя з метою уникнення заторів при транспортуванні частинок технологічного матеріалу.

### Література

1. *Pylypaka, S., Klendii, M., Kremets, T., Klendii, O.* Particle motion over the surface of a cylinder, which performs translational oscillations in a vertical

- plane. *Engineering Journal*, 2018. Vol. 22(3). P. 83–92. DOI: <https://doi.org/10.4186/ej.2018.22.3.83>.
2. Loveikin, V.S., Romesevych, Yu.O. Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2017. Vol. 4. P. 81 – 87.
  3. Hevko, R., Vitrovyi, A., Klendii, O., Liubezna, I. Design engineering and substantiation of the parameters of sectional tools of flexible screw conveyers. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov*, 2017. Vol. 10(59). P. 39–46.
  4. Hevko, R.B., Liubin, M.V., Tokarchuk O.A., Lyashuk, O.L., Pohrishchuk, B.V., Klendii, O.M. Determination of the parameters of transporting and mixing feed mixtures along the curvilinear paths of tubular conveyors. *INMATEH: Agricultural engineering*, 2018. Vol.55, no.2. P. 97–104.
  5. Hevko, R.B., Yazlyuk, B.O., Liubin, M.V., Tokarchuk, O.A., Klendii, O.M., Pankiv, V.R. Feasibility study of mixture transportation and stirring process in continuous-flow conveyors. *INMATEH: Agricultural engineering*, 2017. Vol.51, no.1. P. 49–58.
  6. Liaposchenko, O., Pavlenko, I., Nastenکو, O. The model of crossed movement and gas-liquid flow interaction with captured liquid film in the inertial-filtering separation channels. *Separation and Purification Technology*, 2017. Vol. 173. P. 240 – 243.
  7. Кресан Т.А. Розрахунок гравітаційного спуску, утвореного поверхню косою закритою гелікоїдою. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Ukraine*, 2020. Vol. 11, No 2. P. 49-57. DOI: 10.31548/machenergy.2020.02.049-057.
  8. Пилипака С.Ф., Клендїй М.Б., Кресан Т.А. Рух частинки по гвинтовому коноїду, обмеженому вертикальним шортским циліндром. *Вісник ХНТУ. Фундаментальні науки*, 2018. №4 (67). С. 20–30.

## References

1. Pylypaka, S., Klendii, M., Kremets, T., Klendii, O. Particle motion over the surface of a cylinder, which performs translational oscillations in a vertical plane. *Engineering Journal*, 2018. Vol. 22(3). P. 83–92. DOI: <https://doi.org/10.4186/ej.2018.22.3.83>. {in English}.
2. Loveikin, V.S., Romesevych, Yu.O. Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2017. Vol. 4. P. 81 – 87. {in English}.
3. Hevko, R., Vitrovyi, A., Klendii, O., Liubezna, I. Design engineering and substantiation of the parameters of sectional tools of flexible screw conveyers. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov*, 2017. Vol. 10(59). P. 39–46. {in English}.
4. Hevko, R.B., Liubin, M.V., Tokarchuk O.A., Lyashuk, O.L., Pohrishchuk, B.V., Klendii, O.M. Determination of the parameters of transporting and mixing feed mixtures along the curvilinear paths of tubular

- conveyors. *INMATEH: Agricultural engineering*, 2018. Vol.55, no.2. P. 97–104. {in English}.
5. Hevko, R.B., Yazlyuk, B.O., Liubin, M.V., Tokarchuk, O.A., Klendii, O.M., Pankiv, V.R. Feasibility study of mixture transportation and stirring process in continuous-flow conveyors. *INMATEH: Agricultural engineering*, 2017. Vol.51, no.1. P. 49–58. {in English}.
6. Liaposchenko, O., Pavlenko, I., Nastenka, O. The model of crossed movement and gas-liquid flow interaction with captured liquid film in the inertial-filtering separation channels. *Separation and Purification Technology*, 2017. Vol. 173. P. 240 – 243. {in English}.
7. Kresan T.A. Rozrakhunok hrvatatsiinoho spusku, utvorenoho poverkhnei u kosoho zakrytoho helikoida. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Ukraine, 2020. Vol. 11, No 2. P. 49-57. DOI: 10.31548/machenergy.2020.02.049-057. {in Ukrainian}.
8. Pylypaka S.F., Klendii M.B., Kresan T.A. Rukh chastynky po hvyntovomu konoidu, obmezenomu vertykalnym shorstkym tsylindrom. *Visnyk KhNTU. Fundamentalni nauky*, 2018. №4 (67). S. 20–30. {in Ukrainian}.

К.т.н., доцент **Волина Татьяна Николаевна**,  
[t.n.zaharova@ukr.net](mailto:t.n.zaharova@ukr.net), ORCID 0000-0001-8610-2208,

Национальный университет биоресурсов и  
природопользования Украины

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО СПИРАЛЬНОМУ ЖЕЛОБУ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

В работе составлены дифференциальные уравнения движения частицы по шероховатой поверхности спирального желоба под действием силы собственного веса. Кривая сечения желоба вертикальной плоскостью, проходящей через ось поверхности, задана параметрическими уравнениями в общем виде. Полученные дифференциальные уравнения позволяют описывать движение частицы по винтовой поверхности при различных кривых сечения этой поверхности плоскостью, проходящей через ось. Рассмотрены частные случаи для отдельных линий сечения (прямой и окружности). Если сечение представляет собой дугу окружности, образуется спиральный желоб. В частном случае, когда поперечное сечение представляет собой прямую линию, наклоненную к оси вверх, то винтовая поверхность представляет собой наклонный геликоид. В обоих случаях частица после стабилизации движется по винтовой линии, то есть на определенном расстоянии от оси поверхности. Это расстояние зависит от коэффициента трения при заданных конструктивных параметрах винтовой поверхности и может

*быть найдена аналитически. Уравнения решены численными методами и построены траектории движения частицы по винтовой поверхности. После стабилизации движения частица имеет постоянную скорость и ее траекторией является винтовая линия. Для этого частного случая найдены аналитические зависимости, позволяющие рассчитать скорость движения частицы и ее удаление от оси поверхности. Рассмотрен также случай, когда самая нижняя винтовая линия желоба имеет угол подъема, равный углу трения частицы по поверхности. В случае спирального желоба угол подъема его нижней винтовой линии должен быть больше угла трения во избежание заторов при движении частиц технологического материала.*

*Ключевые слова: спиральный желоб; частица; линия сечения; траектория движения; дифференциальные уравнения.*

Ph.D., assoc. prof. **Tatiana Volina**,  
[t.n.zaharova@ukr.net](mailto:t.n.zaharova@ukr.net), ORCID 0000-0001-8610-2208,  
National university of life and environmental sciences of Ukraine

## **THE INVESTIGATION OF PARTICLE MOVEMENT ON A HELICAL SURFACE UNDER THE EFFECT OF THE FORCE OF ITS WEIGHT**

*Differential equations of particle movement on the rough surface of the spiral gutter under the effect of the force of own weight are obtained in the article. The curve of the cross section of the gutter with a vertical plane passing through the axis of the surface is given by parametrical equations in general form. Special cases for individual cross-sectional lines (a straight line and a circle) are considered. If the section is an arc of a circle, a spiral gutter is formed. In the particular case when the cross section is a straight line inclined to the axis upwards, then the helical surface is an oblique helicoid. The equations are solved by numerical methods and trajectories of a particle movement along a helical surface are constructed. After the motion stabilizes, the particle has a constant speed and its trajectory is a helical curve. For this particular case, analytical dependencies that allow calculating the speed of a particle and its distance from the axis of the surface were found. The case, when an angle of elevation of the lowest helical curve of the gutter is equal to the angle of friction of the particle on the surface, is also considered. In the case of a spiral gutter, the elevation angle of its lower helical line should be greater than the friction angle in order to avoid congestions during transportation of particles of the technological material.*

*Keywords: spiral gutter; particle; cross-sectional line; trajectory of the movement; differential equations.*