

к. т. н. **Кресан Т.А.**,tanyakresan@i.ua, ORCID 0000-0002-8280-9502д. т. н., професор **Пилипака С.Ф.**,s.pylypaka@nubip.edu.ua, ORCID 0000-0002-1496-4615к. т. н., доцент **Грищенко І.Ю.**,irgr@yahoo.com, ORCID 0000-0002-1000-9805к. п. н., доцент **Федорина Т.П.**,fedoryna@gmail.com, ORCID 0000-0002-8854-3768к. т. н. **Кремець Я.С.**,psf55@ukr.net, ORCID 0000-0003-0675-5757

Національний університет біоресурсів і природокористування України

КОНГРУЕНТНІ АКСОЇДИ НЕКРУГЛИХ КОНІЧНИХ КОЛІС, УТВОРЕНІ ЗА ДОПОМОГОЮ СИМЕТРИЧНИХ ДУГ ЛОКСОДРОМИ

Якщо дві лінійчаті поверхні перекочуються одна по одній без ковзання, то їх можна розглядати, як аксоїди твердого тіла, що здійснює відповідний рух у просторі. Якщо аксоїди є циліндричними поверхнями, то дослідження їх кочення можна замінити дослідженням кочення центроїд – кривих ортогонального перерізу цих циліндричних поверхонь. Зазвичай розглядається кочення рухомої центроїди по нерухомій. Однак існують випадки, коли центроїди котяться одна по одній, одночасно обертаючись навколо нерухомих центрів. Прикладом круглих центроїд є кола, некруглих – конгруентні еліпси, у яких центрами обертання є фокуси. У обох випадках міжцентрова відстань є сталою. Точка контакту кіл розташована на міжцентровій відстані і є нерухомою під час їх обертання, а для еліпсів вона «плаває» на цьому відрізьку.

У статті [1] розглянуті конгруентні центроїди, утворені симетричними дугами логарифмічної спіралі. Центрами обертання центроїд є полюси спіралей. Характерною особливістю логарифмічних спіралей є те, що вони перетинають всі радіус-вектори, які виходять із полюса, під сталим кутом. Для кулі прообразом логарифмічної спіралі є локсодрома, яка перетинає всі меридіани під сталим кутом і закручується навколо полюса кулі. В статті висунута гіпотеза, що замкнені сферичні криві, утворені із дуг локсодроми подібно до центроїд із дуг логарифмічної спіралі на площині, теж можуть обкочуватися навколо осей, що перетинаються в центрі сфери. Якщо ці замкнені криві сполучити прямолінійними відрізьками із центром сфери, то утворяться два конуси – аксоїди не круглих конічних коліс. Ця гіпотеза ґрунтується на тому, що при нескінченному зростанні радіуса кулі її поверхня в околі полюса перетворюється у площину, а меридіани – у прямі лінії, що виходять із полюса. Відповідно, локсодрома перетворюється у логарифмічну спіраль.

В статті показано, що висунута гіпотеза підтверджується. В ній побудовано аксоїди некруглих коліс, осі яких перетинаються під прямим кутом. Знайдено вираз довжини дуги локсодроми і показано, що при повороті кінцевих аксоїдів на відповідні кути навколо своїх осей криві дотику проходять рівні шляхи. Це означає, що обкочування аксоїдів відбувається без ковзання.

Ключові слова: логарифмічна спіраль; локсодрома; еліпс; аксоїди; сферичні центроїди.

Постановка проблеми. Кочення циліндричних поверхонь одна по одній без ковзання можна замінити аналогічним коченням центроїд – кривих поперечного перерізу цих циліндрів. При коченні кінцевих поверхонь одна по одній в ролі центроїд можна розглядати сферичні криві – лінії перетину цих поверхонь із поверхнею кулі, центр якої збігається із вершинами конусів. Таким чином, з допомогою сферичних кривих можна конструювати конуси із спільними вершинами в центрі кулі, які будуть котитися один по одному без ковзання. При цьому можна ставити додаткові умови: побудувати такі конуси, які будуть котитися один по одному одночасно обертаючись навколо нерухомих осей, що перетинаються в центрі кулі. У теорії кінцевих передач такі конуси називаються аксоїдами. У статті розглянуто конструювання конгруентних кінцевих аксоїдів за допомогою сферичної кривої – локсодроми. Такі поверхні є базовими для проектування зубчастих зачеплень для передачі обертального руху між осями, що перетинаються.

Ціль статті. Аналітично обґрунтувати, що циліндричним передачам з некруглими центроїдами із симетричних дуг логарифмічної спіралі існує аналог кінцевих передач, у яких аксоїди не є круговими конусами, а роль центроїд відіграє сферична замкнена крива із дуг локсодроми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Висвітленню теоретичних питань побудови центроїд для зубчастих зачеплень з паралельними осями присвячено праці [2, 3], причому в праці [3] розглянуто процес проектування центроїд некруглих зубчастих коліс. В праці [4] проведено аналіз публікацій з геометрії і кінематики зачеплення передач некруглими зубчастими колесами, а також їх виготовлення і застосування в різних областях машинобудування. Проектування некруглих зубчастих зачеплень з паралельними осями на основі побудови центроїд розглянуто в численних статтях як вітчизняних [5–7], так і зарубіжних авторів [8–10]. Стосовно проектування кінцевих передач, у яких аксоїди не є круговими конусами, дослідження мають обмежений характер і мало висвітлені в науковій літературі.

Основна частина. В статті [1] наведено аналітичні викладки і за їх результатами побудовано конгруентні центроїди некруглих коліс, утворені дугами логарифмічної спіралі. Вони можуть котитися одна по одній без

ковзання, одночасно обертаючись навколо центрів O і O_1 (рис. 1). Центри O і O_1 є полюсами логарифмічних спіралей (ділянки цих спіралей всередині центроїд зображено тонкою лінією, щоб показати, що вони прямують до полюса). Властивістю логарифмічних спіралей є те, що вони перетинають всі радіус-вектори (включаючи і осі координат) під сталим кутом. Для спіралей на рис 1 цей кут становить 45° , тому в точках перетину спіралей на центроїдах утворюються прямі кути. Міжцентрова відстань r визначається відстанню між полюсами при розташуванні центроїд із спільною точкою контакту, як показано на рис. 1.

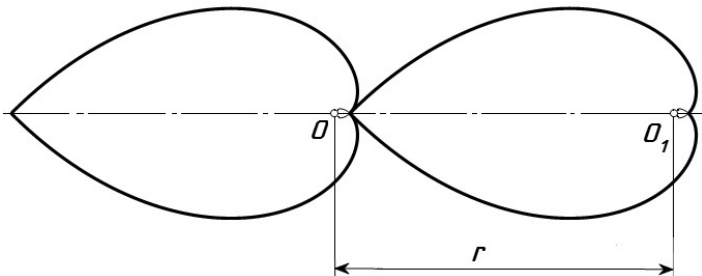


Рис. 1. Конгруентні центроїди із дуг логарифмічних спіралей із спільною точкою контакту

Припустимо, що аналогом циліндричної передачі, зображеної на рис.1, існує конічна передача із подібними властивостями. Тоді аксоїдами будуть не циліндри, а конуси. Подібно, як результатом перетину циліндрів площиною є центроїди, що складаються із дуг логарифмічних спіралей, так і результатом перетину конусів сферою, центр якої збігається із вершинами конусів, буде крива, яка перетинатиме всі меридіани під сталим кутом. Сферична крива із такою властивістю називається локсодроною. Для її побудови зручно скористатися рівнянням сфери в ізометричних координатах. Властивістю таких координат є те, що нескінченно малий елемент координатної сітки є квадрат. В зв'язку із цим координатна сітка поверхні конформно відображається на плоску координатну сітку. Якщо на площині задати пряму лінійною залежністю $y=x \cdot \operatorname{tg} \beta$, то вона перетинатиме координатні лінії, паралельні осі Ox , під кутом β . Аналогічно відбувається і на поверхні при лінійно заданій залежності між її внутрішніми координатами.

Поверхня кулі, віднесена до ізометричних координат, описується наступними параметричними рівняннями [11]:

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{sech} \varepsilon \cos \gamma; \\ Y &= R \operatorname{sech} \varepsilon \sin \gamma; \\ Z &= R \tanh \varepsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

де R – радіус кулі; γ і ε – незалежні змінні поверхні, причому γ чисельно дорівнює кутові повороту точки поверхні навколо осі Oz , а ε – друга координата, відлік якої починається від екватора вздовж меридіана в напрямі верхнього полюса кулі.

Задамо лінійну залежність ε у внутрішніх (криволінійних) координатах поверхні кулі (1):

$$\varepsilon = \gamma g \beta + a. \quad (2)$$

При конформному відображенні на плоску декартову систему рівняння (2) опише пряму лінію (рис. 2, а). При підстановці (2) в (1) ми отримаємо параметричні рівняння локсодроми, яка перетинатиме паралелі під кутом β , а меридіани – під кутом $\pi/2-\beta$. На рис. 2, б побудована локсодрома при $R=1$, $\beta=15^\circ$, $a=0,15$ і при зміні γ в межах $\gamma=0\dots 8\pi$.

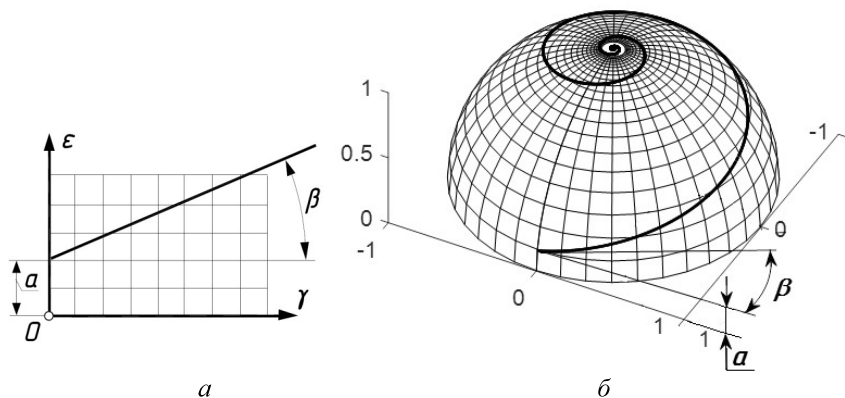


Рис. 2. До побудови локсодроми на поверхні кулі:

- а) конформне відображення локсодроми з ізометричних координат кулі на плоску декартову систему;
- б) локсодрома на поверхні кулі

Подібно до логарифмічної спіралі, локсодрома на поверхні кулі закручується навколо полюса, наближаючись до нього. Побудуємо на поверхні кулі прообраз центроїди, зображеної на рис. 1. Для цього побудуємо дві симетричних вітки при $\beta=45^\circ$ і зміні γ в межах $\gamma=0\dots\pi$ (рис. 3, а). Полюсом сферичної фігури, зображеної на рис. 3,а, є точка перетину осі OZ із поверхнею кулі, яка відповідає точці O на рис. 1. Побудуємо ще одну конгруентну фігуру на кулі так, щоб вона дотикалася до першої, як показано на рис. 1 для плоских центроїд. В ролі другого полюса, що відповідає полюсу O_1 (рис. 1), візьмемо точку перетину осі OX із поверхнею кулі із протилежної сторони. В цьому випадку міжцентровій відстані r (рис. 1) буде відповідати кут θ між осями OZ і OX , тобто $\theta=90^\circ$. Отже другу фігуру отримаємо після повороту першої фігури (рис. 3, а) навколо осі OY на кут $\theta=90^\circ$. Для того, щоб фігури не були ізольовані одна

від одної, а дотикалися в точці, як показано на рис.1, потрібно певним чином вибрати значення сталої a .

Параметричні рівняння локсодроми після підстановки (2) в (1) запишуться:

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{sech}(\mu g \beta + a) \cos \gamma; \\ y &= R \operatorname{sech}(\mu g \beta + a) \sin \gamma; \\ z &= R \tanh(\mu g \beta + a). \end{aligned} \quad (3)$$

Симетрична вітка дуги локсодроми будується теж за рівняннями (3) при введенні знака « \leftrightarrow » перед першим рівнянням $x=x(\gamma)$. Другу криву отримуємо поворотом першої навколо осі OY за відомими формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \operatorname{sech}(\mu g \beta + a) \cos \gamma \cos \theta - R \tanh(\mu g \beta + a) \sin \theta; \\ y_1 &= R \operatorname{sech}(\mu g \beta + a) \sin \gamma; \\ z_1 &= R \operatorname{sech}(\mu g \beta + a) \cos \gamma \sin \theta + R \tanh(\mu g \beta + a) \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 3, б за рівняннями (3) і (4) побудовані сферичні фігури, які перебувають у контакті одна з одною подібно до центроїд на рис. 1. Кут $\theta=90^\circ$, значення сталої a , що забезпечує контакт, становить $a=0,08$.

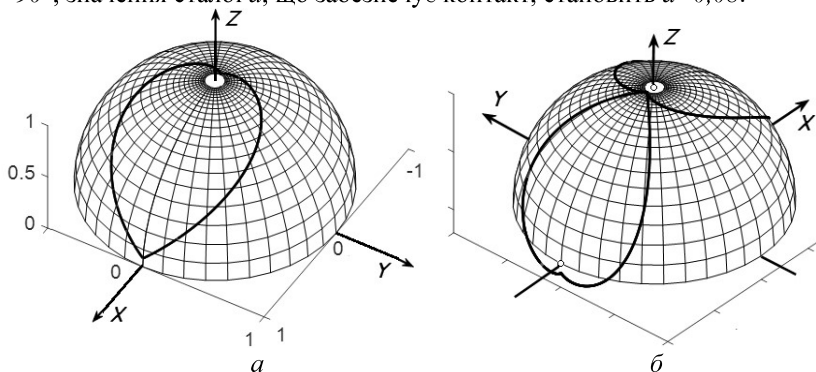


Рис. 3. Сферичні замкнені криві – аналоги центроїд на площині (рис. 1):
 а) замкнена сферична фігура із дуг локсодроми;
 б) дві конгруентні фігури із спільною точкою контакту

Ці фігури є напрямними лініями для аксоїдів. Для циліндричних передач напрямними лініями є центроїди – ортогональні перерізи циліндричних аксоїдів площиною. Для конічних – сферичні криві перерізу конічних аксоїдів поверхнею кулі, центр якої збігається із спільними вершинами цих аксоїдів. За цією аналогією напрямні криві конічних аксоїдів будемо називати сферичними центроїдами.

Для побудови кінчних аксоїдів беремо за напрямну лінію сферичну центроїду, з кожної точки якої проводимо прямолінійну твірну до центра кулі. Цим визначається напрямний вектор прямолінійної твірної аксоїда, тобто різницею координат початкової і кінцевої точок. Оскільки початкова точка відома – центр кулі в початку координат – то вирази (3) є напрямними векторами прямолінійних твірних без R , оскільки зменшення його в R раз не змінює напрямку вектора. Зважаючи на це, можемо записати параметричні рівняння кінчного аксоїда з напрямною кривою (3):

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{sech}(\gamma g \beta + a) \cos \gamma - u \operatorname{sech}(\gamma g \beta + a) \cos \gamma; \\ y &= R \operatorname{sech}(\gamma g \beta + a) \sin \gamma - u \operatorname{sech}(\gamma g \beta + a) \sin \gamma; \\ z &= R \tanh(\gamma g \beta + a) - u \tanh(\gamma g \beta + a), \end{aligned} \quad (5)$$

де u – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від напрямної кривої, тобто від сферичної центроїди.

Для другої сферичної центроїди (4) відповідний аксоїд будується аналогічно. На рис. 4 побудовані кінчні аксоїди для напрямних сферичних центроїд, зображених на рис. 3, б.

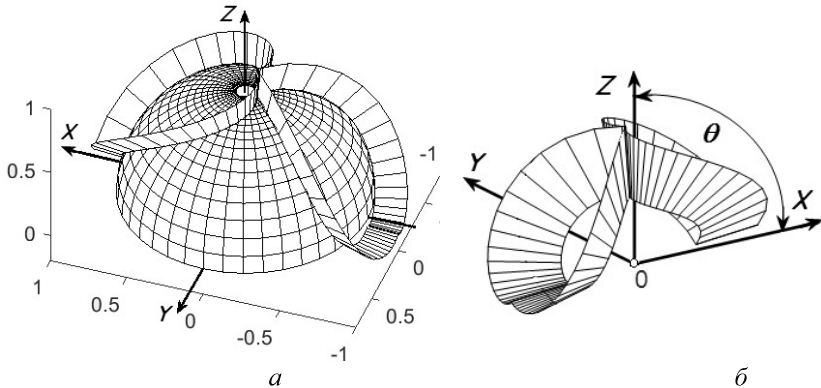


Рис. 4. Кінчні аксоїди, які відповідають сферичним центроїдам, що зображені на рис. 3, б:

- а) розташування аксоїдів по відношенню до поверхні кулі;
- б) аксоїди із позначенням кута θ між осями їх обертання

Покажемо, що аксоїди можуть котитися один по одному, одночасно обертаючись навколо осей OZ і OX . В праці [1] для центроїд на площині можливість кочення їх одна по одній з одночасним обертанням навколо центрів доведена на основі рівності відповідних дуг. У випадку сферичних центроїд аналітичні викладки значно ускладнюються, однак це можна

довести іншим шляхом, використовуючи можливості візуалізації графічних об'єктів за допомогою сучасних програмних засобів.

На рис. 5, *a* показано горизонтальну проекцію сферичних центроїдів 1 і 2 на поверхні кулі. Суцільними лініями зображено центроїди у вихідному положенні, як показано на рис. 3, *б*. При куті $\gamma=90^\circ$ на центроїді 1 цьому куті відповідатиме точка, яка проєкціюється на вісь OY (вона зображена колом малого радіуса). Повернемо центроїду 1 навколо осі OZ на кут 90° . Центроїда 1 в новому положенні зображена штрих-пунктирною лінією. Відповідно і точка повернеться на 90° і займе нове положення, в якому її проєкція розташована на осі OX (рис. 5, *a*). Тепер будемо обертати центроїду 2 навколо осі OX на кут φ за відомими формулами повороту. Збільшуючи кут φ на певну величину, можна спостерігати на моніторі комп'ютера її нове положення. Таким чином, можна точно підібрати значення кута φ , при якому друга центроїда торкнеться першої. Для нашого випадку (при $\gamma=90^\circ$) кут $\varphi=\pi/10$, тобто $\varphi=18^\circ$. На рис. 5 нові положення центроїдів із новою точкою контакту після повороту центроїди 1 на кут $\gamma=90^\circ$ і центроїди 2 на кут $\varphi=18^\circ$ зображено штрих-пунктирними лініями. Кут φ позначено на проєкції збоку (рис. 5, *б*). Кут φ відіграє аналогічну роль куту γ , тобто при однакових значеннях цих кутів відповідні дуги центроїдів будуть рівними.

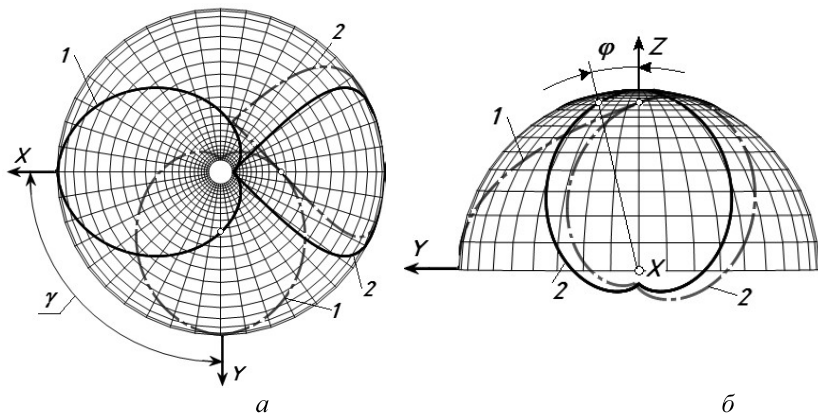


Рис. 5. Сферичні центроїди після повороту на відповідні кути навколо осей OZ (центроїда 1) і OX (центроїда 2) до нової точки контакту:
 а) горизонтальна проєкція; б) вигляд збоку

Покажемо, що при повороті центроїди 1 навколо осі OZ на кут $\gamma=90^\circ$ і центроїди 2 навколо осі OX на кут $\varphi=18^\circ$ вони пройшли однаковий шлях. Для цього знайдемо вираз довжини дуги локсодроми (3), з дуг якої утворені сферичні центроїди. Взнявши перші похідні рівнянь (3) по змінній γ , за відомою формулою знаходимо похідну дуги s :

$$\frac{ds}{d\gamma} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{R}{\cos \beta} \operatorname{sech}(\gamma \operatorname{tg} \beta + a). \quad (6)$$

Інтегрування виразу (6) дає нам формулу для визначення довжини дуги s локсодроми:

$$s = \int \frac{R}{\cos \beta} \operatorname{sech}(\gamma \operatorname{tg} \beta + a) d\gamma = \frac{2R}{\cos \beta} \operatorname{arctg} \left(\tanh \frac{\gamma \operatorname{tg} \beta + a}{2} \right) + c. \quad (7)$$

Знайдемо значення сталої інтегрування c за умови, що при $\gamma=0$ значення довжини дуги s теж дорівнює нулю і підставимо в (7). Після цього остаточно одержимо:

$$s = \frac{2R}{\cos \beta} \left[\operatorname{arctg} \left(\tanh \frac{\gamma \operatorname{tg} \beta + a}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\tanh \frac{a}{2} \right) \right]. \quad (8)$$

Знайдемо довжину дуги s симетричної вітки сферичної центроїди. Як зазначалося раніше, для її побудови за рівняннями (3) незалежна змінна (кут γ) змінювалася в межах $\gamma=0 \dots \pi$. Підставляємо $\gamma=\pi$ у формулу (8) при $R=1$, $a=0,08$, $\beta=\pi/4$ і отримуємо: $s=2$ *лін. од.* Тепер ще раз розглянемо дві сферичні центроїди із спільною точкою контакту після їх повороту на кути $\gamma=90^\circ$ і $\varphi=18^\circ$. На рис. 5, a на горизонтальній проекції вони зображені штрих-пунктирними лініями. На рис. 6, a вони зображені суцільними лініями з тією різницею, що ділянки дуг обох центроїд від початку відліку дуги до точки контакту показані потовщеною лінією. З рис. 6, a можна зрозуміти, що сума потовщених ділянок у випадку кочення центроїд одна по одній без ковзання має бути рівною довжині всієї вітки сферичної центроїди, тобто 2 *лін. од.* Це впливає з того, що частина потовщеної ділянки кривої від точки відліку (тобто від вершини «зуба») до точки контакту однієї кривої має бути рівною не потовщеній ділянці другої кривої від точки контакту до вершини протилежного «зуба».

Знайдемо довжину виділених ділянок кривих обох центроїд. Для цього підставляємо значення кута повороту першої центроїди $\gamma=90^\circ$ ($\gamma=\pi/2$) у формулу (8) і отримуємо: $s=1,57$ *лін. од.* Далі підставляємо у цю ж формулу $\gamma=18^\circ$ ($\gamma=\pi/10$), оскільки $\varphi=18^\circ$ і, як зазначалося раніше, кут φ відіграє аналогічну роль куту γ . Після обчислень отримуємо: $s=0,43$ *лін. од.* В сумі ці два значення дають $s=2$ *лін. од.* Це підтверджує, що обкочування сферичних центроїд одна по одній з одночасним обертанням навколо осей OZ і OX відбувається без ковзання.

На рис. 7, a зображено початкове положення сферичних центроїд потовщеною лінією і їх нове положення після повороту першої центроїди навколо осі OZ на кут $\gamma=135^\circ$ і другої навколо осі OX на кут $\varphi=47,4^\circ$. Довжина потовщеної ділянки першої кривої рівна $s=0,98$ *лін. од.* і другої –

$s=1,02$ лін. од., що в сумі становить 2 лін. од. На рис. 7, б побудовані відповідні аксоїди.

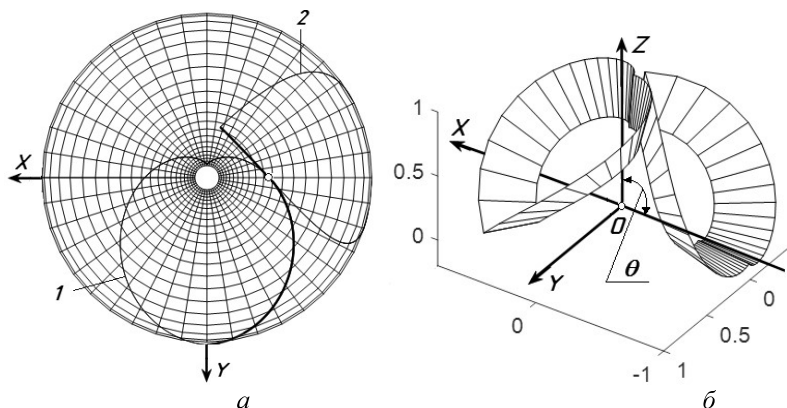


Рис. 6. Зображення положень сферичних центрів і відповідних аксоїдів після їх повороту з початкового положення навколо осей OZ і OX на кути $\gamma=90^\circ$ і $\varphi=18^\circ$ відповідно:

- а) сферичні аксоїди із спільною точкою контакту;
- б) відповідні аксоїди із спільною прямолінійною твірною контакту

Таким чином, можна встановити повну аналогію між коченням центрів із дуг логарифмічної спіралі на площині і коченням відповідних просторових кривих із дуг локсодроми на сфері. Висунута гіпотеза підтвердилася.

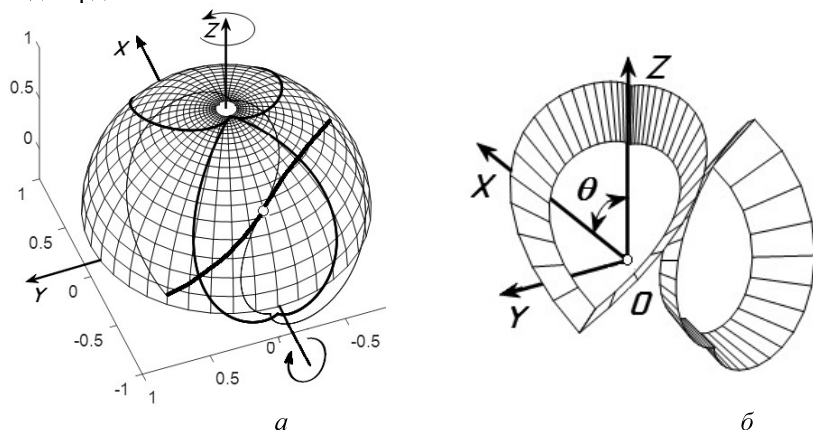


Рис. 7. Зображення положень сферичних центрів і відповідних аксоїдів після їх повороту з початкового положення навколо осей OZ і OX на кути $\gamma=130^\circ$ і $\varphi=47.4^\circ$ відповідно:

- а) сферичні аксоїди із спільною точкою контакту;
- б) відповідні аксоїди із спільною прямолінійною твірною контакту

Висновки та перспективи. Центроїди із дуг логарифмічної спіралі є основою для проектування циліндричних передач для передавання обертального руху між паралельними осями. За встановленою аналогією сферичні криві із дуг локсодроми можуть бути основою для проектування конічних передач між осями, які перетинаються. Аксидами для першого виду передач є циліндри з некруглим замкненим поперечним перерізом із симетричних дуг логарифмічної спіралі, а для другого виду – конічні поверхні із спільними вершинами. Лінією перетину таких поверхонь сферою є замкнені криві із дуг локсодроми, які ми умовно назвали сферичними центроїдами. Передавання обертального руху між осями в обох випадках відбувається без ковзання.

Література

1. *Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Бабка В.М.* Окремий випадок конгруентних центроїд некруглих коліс, утворених дугами логарифмічної спіралі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ, КНУБА, 2020. Вип. 98. С. 84 – 93.
2. *Литвин Ф.Л.* Теория зубчатых зацеплений. Москва, Наука, 1968. 584 с.
3. *Литвин Ф.Л.* Некруглые зубчатые колеса. Москва, Машгиз, 1956. 312 с.
4. *Утутов Н.Л.* Состояние теории передач некруглыми зубчатыми колесами. Луганск, 1999. 31 с.
5. *Коврегін В.В.* Аналітичний опис центроїд некруглих зубчатих коліс. *Праці ТДАТУ. Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Мелітополь: ТДАТУ, 2011. Вип. 4. Т. 49. С. 125 – 129.
6. *Легета Я.П.* Опис та побудова спряжених центроїд некруглих зубчастих коліс. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ ім. Богдана Хмельницького, 2014. Вип. 3. С. 87 – 92.
7. *Легета Я.П., Шоман О.В.* Геометричне моделювання центроїд некруглих зубчастих коліс за передавальною функцією. *Науковий журнал: МНУ імені В.О. Сухомлинського. Геометричне моделювання та інформаційні технології*, 2016. № 2. С. 59 – 63.
8. *В. Laczik.* Design and Manufacturing of Non-Circular Gears by Given Transfer Function. *[Електронний ресурс] Режим доступу: <http://www.hexagon.de/pdf/noncgear.pdf>*.
9. *D. Mundo., Danneli. G. A.* Use of Non-Circular Gears in Pressing Machine Driving Systems. *[Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.wseas.us/e-library/conferences/udine2004/papers/483-172.pdf>*.
10. *T. Hasse.* Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen. *[Електронний ресурс] URL: http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf*
11. *Несвидомин В.Н., Пилипака Т.С., Кремець Т.С.* Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности.

References

1. Kresan T.A., Pylypaka S.F., Hryshchenko I.Iu., Babka V.M. Okremyi vypadok konhruentnykh tsentroid nekruhlykh kolis, utvorenykh duhamy loharyfmichnoi spirali / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Kyiv, KNUBA, 2020. Vyp. 98. P. 84 – 93. {in Ukrainian}
2. Litvin F.L. Teoriya zubchatykh zaceplenij. Moscow, Nauka, 1968. 584 p. {in Russian}
3. Litvin F.L. Nekruglye zubchatye koleasa. Moscow: Mashgiz, 1956. 312 p. {in Russian}
4. Ututov N.L. Sostoyanie teorii peredach nekruglymi zubchatymi kolesami. Lugansk, 1999. 31 p. {in Russian}
5. Kovrehin V.V. Analitychnyi opys tsentroid nekruhlykh zubchatykh kolis. Pratsi TDATU. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Melitopol: TDATU, 2011. Vyp. 4. T. 49. P. 125 – 129. {in Ukrainian}
6. Leheta Ya.P. Opys ta pobudova spriazhenykh tsentroid nekruhlykh zubchastykh kolis. Suchasni problemy modeliuвання. Melitopol: MDPU im. Bohdana Khmelnytskoho, 2014. Vyp. 3. P. 87 – 92. {in Ukrainian}
7. Leheta Ya.P., Shoman O.V. Heometrychne modeliuвання tsentroid nekruhlykh zubchastykh kolis za peredavalnoi funktsiieiu. Naukovyi zhurnal: MNU imeni V.O. Sukhomlynskoho. Heometrychne modeliuвання ta informatsiini tekhnolohii, 2016. № 2. S. 59 – 63. {in Ukrainian}
8. Laczik. Design and Manufacturing of Non-Circular Gears by Given Transfer Function. [Electronic resource] Access mode: <http://www.hexagon.de/pdf/noncgear.pdf>. {in English}
9. D. Mundo., Danneli. G. A. Use of Non-Circular Gears in Pressing Machine Driving Systems. [Electronic resource] URL :<http://www.wseas.us/e-library/conferences/udine2004/papers/483-172.pdf>. {in English}
10. T. Hasse. Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen. http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf. {in German}
11. Nesvidomin V.N., Pilipaka T.S., Kremec T.S. Sposob analiticheskogo otobrazheniya ploskikh izobrazhenij na krivolinejnye poverkhnosti. MOTROL. Commission of motorization and energetics in agriculture. Lublin-Preszow. Vol 16. № 3, 2014. C. 58 – 65. {in Russian}

к.т.н. **Кресан Т.А.**,
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502
д.т.н., профессор **Пилипака С.Ф.**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615
к.т.н, доцент **Грищенко І.Ю.**,
irgr@yahoo.com ORCID 0000-0002-1000-9805
к.п.н, доцент **Федорина Т.П.**,
fedoryna@gmail.com ORCID 0000-0002-8854-3768
к.т.н. **Кремец Я.С.**,
psf55@ukr.net ORCID 0000-0003-0675-5757

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

КОНГРУЭНТНЫЕ АКСОИДЫ НЕКРУГЛЫХ КОНИЧЕСКИХ КОЛЕС, ОБРАЗОВАННЫЕ С ПОМОЩЬЮ СИММЕТРИЧНЫХ ДУГ ЛОКСОДРОМЫ

Если две линейчатые поверхности перекатываются друг по другу без скольжения, то их можно рассматривать аксоидами твердого тела, которое осуществляет соответствующее движение в пространстве. Если аксоиды являются цилиндрическими поверхностями, то исследования их качения можно заменить исследованием качения центроид - кривых ортогонального сечения этих цилиндрических поверхностей. Обычно рассматривается качения подвижной центроиды по неподвижной. Однако существуют случаи, когда центроиды катятся одна по другой, одновременно вращаясь вокруг неподвижных центров. Примером круглых центроид есть окружности, некруглых - конгруэнтные эллипсы, в которых центрами вращения являются фокусы. В обоих случаях межцентровое расстояние является постоянным. Точка контакта окружностей расположена на межцентровом расстоянии и является неподвижной во время их вращения, а для эллипсов она «плавает» на этом отрезке.

В статье [1] рассмотрены конгруэнтные центроиды, образованные симметричными дугами логарифмической спирали. Центрами вращения центроид является полюсы спиралей. Характерной особенностью логарифмических спиралей является то, что они пересекают все радиус-векторы, которые выходят из полюса, под постоянным углом. Для шара прообразом логарифмической спирали является локсодрома, которая пересекает все меридианы под постоянным углом и закручивается вокруг полюса шара. В статье выдвинута гипотеза, что замкнутые сферические кривые, образованные из дуг локсодромы подобно центроидам с дуг логарифмической спирали на плоскости, тоже могут обкатываться вокруг осей, пересекающихся в центре сферы. Если эти замкнутые кривые соединить прямолинейными отрезками с центром сферы, то образуются два конусы - аксоиды некруглых конических колес. Эта гипотеза

основывается на том, что при бесконечном росте радиуса шара ее поверхность в окрестности полюса превращается в плоскость, а меридианы - в прямые линии, выходящие из полюса. Соответственно, локсодрома превращается в логарифмическую спираль.

В статье показано, что выдвинутая гипотеза подтверждается. В ней построено аксоиды некруглых колес, оси которых пересекаются под прямым углом. Найдено выражение длины дуги локсодромы и показано, что при повороте конических аксоидов на соответствующие углы вокруг своих осей кривые касания проходят одинаковые пути. Это означает, что качение аксоидов происходит без скольжения.

Ключевые слова: логарифмическая спираль; локсодрома; эллипс; аксоиды; сферические центры.

Ph.D. **Tetiana Kresan**,
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

Ph.D., prof **Serhiy Pylypaka**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

Ph. D., assoc. prof **Iryna Hryshchenko**,
irgr@yahoo.com ORCID 0000-0002-1000-9805

Ph. D., assoc. prof **Tetiana Fedoryna**,
fedoryna@gmail.com ORCID 0000-0002-8854-3768

Ph.D. **Yaroslav Kremets**,
psf55@ukr.net ORCID 0000-0003-0675-5757

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

CONGRUENT AXOIDS OF NON-CIRCULAR CONICAL WHEELS FORMED BY ARCS OF THE LOXODROME

If two linear surfaces move one after another without sliding, then they can be considered as axoids of a solid body that performs a corresponding motion in space. If the axoids are cylindrical surfaces, then the study of their rolling can be replaced by the study of the rolling of centroids - curves of the orthogonal cross section of these cylindrical surfaces. Usually the rolling of a moving centroid on a stationary one is considered. However, there are cases when centroids roll one after another, while rotating around fixed centers. Examples of round centroids are circles, non-round - congruent ellipses, in which the centers of rotation are foci. In both cases, the center-to-center distance is constant. The point of contact of the circles is located at the center distance and is stationary during their rotation, and for ellipses it "floats" on this segment.

In the article [1] the congruent centroids formed by symmetric arcs of a logarithmic spiral are considered. The centers of rotation of the centroid are the

poles of the spirals. A characteristic feature of logarithmic spirals is that they intersect all radius vectors emanating from the pole at a constant angle. For a sphere, the prototype of a logarithmic spiral is a loxodrome, which crosses all the meridians at a constant angle and twists around the pole of the sphere. The paper hypothesizes that closed spherical curves formed from arcs of loxodrome, like centroids from arcs of a logarithmic spiral on a plane, can also roll around axes intersecting in the center of the sphere. If these closed curves are connected by rectilinear segments with the center of the sphere, then two cones are formed - axoids of non- circular conical wheels. This hypothesis is based on the fact that with an infinite increase in the radius of the sphere, its surface around the pole turns into a plane, and the meridians - in straight lines emanating from the pole. Accordingly, the loxodrome is transformed into a logarithmic spiral.

The article shows that the hypothesis is confirmed. Axoids of non- circular wheels are built in it, the axes of which intersect at right angles. The expression of the arc length of the loxodrome is found and it is shown that when the conical axoids rotate at appropriate angles around their axes, the contact curves pass straight paths. This means that the rolling of the axis occurs without sliding.

Key words: logarithmic spiral; loxodrome; ellipse; axoids; spherical centroids.