УДК 519.21
DOI: 10.32347/0131-579x.2021.100.205-214

к. ф-м. н. доцент **Наголкіна З.І.**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
к.ф-м.н. доцент **Філонов Ю.П.**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854

Київський національний університет будівництва і архітектури

МУЛЬТИПЛІКАТИВНА АПРОКСИМАЦІЯ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

У даній роботі розглядається стохастичне диференціальне рівняння в нескінченновимірному дійсному гільбертовому просторі. За допомогою метода мультиплікативних представлень Далецького - Троттера будується його наближений розв'язок.

При виконані класичних умов на коефіцієнти існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок стохастичного рівняння, який є випадковим процесом. Цей розв'язок породжує еволюційну сім'ю розрішаючих операторів за формулою x(t)= $S(t,t_0) \circ x(t_0)$. *Побудуємо розбиття відрізку* $[t_0,T]$ *точками. На кожному елементарному відрізку* $\Delta_k t$ *розглядається рівняння з однорідними по часу коефіцієнтами. Існує єдиний розв'язок цього рівняння на елементарному відрізку, який породжує розрішаючий оператор за формулою* $\hat{x}(t) = T(t,t_k) \circ \hat{x}(t_k)$. *Будується мультиплікативний вираз* $\prod T(t_{к+1},t_k) \circ \hat{x}(t_0)$. *Користуючись методом мультиплікативних представлень Далецького – Троттера доводиться, що даний мультиплікативний вираз стохастично еквівалентний представленню, яке породжується розв'язком вихідного рівняння. А це і означає, що означений мультиплікативний вираз є відповідно представленням розв'язку вихідного рівняння. Тобто збігається з імовірністю одиниця до розв'язку вихідного стохастичного рівняння. Слід відзначити, що це можливо при виконанні додаткових умов на коефіцієнти рівняння. Ці умови є неперервність за часом коефіцієнтів рівняння. Таким чином побудоване мультиплікативне представлення можна інтерпретувати як наближений розв'язок вихідного рівняння. Цей метод мультиплікативної апроксимації дає можливість спрощувати дослідження відповідного випадкового процесу як на елементарному відрізку, так і в цілому.*

Як відомо, розв'язок стохастичного рівняння за відомою формулою породжує розв'язок оберненого рівняння Колмогорова у відповідному просторі. Ця схема мультиплікативної апроксимації може бути перенесена на розв'язок параболічного рівняння, яким є обернене рівняння Колмогорова. Таким чином метод мультиплікативної апроксимації дає

можливість спрощувати дослідження і стохастичних рівнянь і рівнянь в частинних похідних.

Ключові слова: стохастичне рівняння; рівняння в частинних похідних; умовне середнє; наближений розв'язок; стохастична еквівалентність; вимірність; випадковий процес; еволюційний оператор; простір Гільберта; дифузійний процес; інтегральне рівняння; початкове значення; нерівність Гронуола; функціональний простір; нелінійні коефіцієнти.

Постановка проблеми.

Розглядається стохастичне диференціальне рівняння в гільбертовому просторі. За допомогою метода мультиплікативних представлень Далецького –Троттера будується інше мультиплікативне представлення, яке відповідає рівнянню з коефіцієнтами, однорідними за часом на деякому елементарному проміжку. Це представлення може бути інтерпретоване як наближений розв'язок. Крім того, метод мультиплікативних представлень за відомою формулою перенесено на розв'язок відповідного параболічного рівняння, яким є обернене рівняння Колмогорова.

Ціль статті. Сформулювати умови на коефіцієнти дифузійного стохастичного рівняння, при яких побудоване мультиплікативне представлення буде збігатися з імовірністю одиниця до сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння в гільбертовому просторі, а також породжувати відповідні представлення розв'язку оберненого рівняння Колмогорова.

Аналіз основних досліджень і публікацій.

У роботах [1], [2] розглядались методи наближеного обчислення розв'язку стохастичного диференціального рівняння. У роботі [2] підхід базувався на скінченій дискретизації часового проміжку і чисельному моделюванні розв'язку стохастичного диференціального рівняння в дискретні моменти часу за допомогою стохастичного аналога формули Тейлора. В даній роботі запропоновано інший підхід до пошуку наближеного розв'язку стохастичного диференціального рівняння дифузійного типу. Він базується на методі мультиплікативних представлень Далецького – Троттера. На цьому шляху в роботі [3] були розглянуті різні можливості апроксимації нелінійного стохастичного рівняння, в тому числі і схема лінеаризації відповідного рівняння. Слід відмітити, що розглянутий метод також походить від метода дробових кроків, який був розвинутий в [6] для детермінованих рівнянь математичної фізики.

Основна частина. У цій роботі отримано наближений розв'язок стохастичного диференціального рівняння дифузійного вигляду в нескінченновимірному гільбертовому просторі H за допомогою метода мультиплікативних представлень Далецького – Троттера.

Введемо такі позначення: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – імовірнісний простір, H – дійсний сепарабельний гільбертів простір, $\mathcal{H} = L_{2\mathrm{p}}(\Omega)$ –гільбертів простір випадкових величин $\xi(\omega)$ зі значеннями в H, скінченими моментами порядку 2p (p=1,2) і нормою $\ll \xi \gg = \left\{\mathrm{E}\|\xi(\omega)\|_{\mathrm{H}}^{2\mathrm{p}}\right\}^{1/2\mathrm{p}}$.

Нехай в гільбертовому просторі H задане стохастичне диференціальне рівняння:

$$dx(t) = a\big(t, x(t)\big)dt + A\big(t, x(t)\big)dw(t)$$

Або еквівалентне йому інтегральне рівняння в формі Іто:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a\big(s, x(s)\big)ds + \int_{t_0}^{t} A\big(s, x(s)\big)dw(s) \qquad (1)$$

Тут $a(t,x) \in \mathrm{H}, A(t,x) \in \wp_2(\mathrm{H})$ ($\wp_2(\mathrm{H})-$ простір операторів Гільберта-Шмідта в H), функції вимірні по сукупності змінних $t \in [t_0, T]$ і $x \in H, \omega \in \Omega$ (при фіксованих t, x вимірні відносно $\sigma-$ алгебри F_t: $F_t = \sigma\{x_0, w(s) - w(t_0), t_0 \le s \le t\}$). $F_t \subset \mathcal{F}, \mathcal{H}^t \subset \mathcal{H}$ сукупність елементів з $L_{2\mathrm{p}}(\Omega)$, які є $F_t -$ вимірні випадкові величини.

При цьому під розв'язком рівняння (1) розуміють випадковий процес $x(t)$, $F_t -$ вимірний і такий, що (1) має місце з імовірністю 1. Теорія існування і властивостей таких процесів в загальному випадку розроблена в [5] , в банаховому просторі в [4]. Там же були сформульовані умови на коефіцієнти рівняння, при яких існує єдиний розв'язок. Ці умови мають вигляд:

$$\|a(t,x)\|^2 + \sigma_2^2\big(, A(t,x)\big) \le k_1\|x\|^2 + k_2 \qquad (2)$$

$$\|a(t,x) - a(t,y)\|^2 + \sigma_2^2\big(A(t,x) - A(t,y)\big) \le k_3\|x - y\|^2 \qquad (3)$$

де k_1, k_2, k_3 – деякі сталі, а $\sigma_2^2(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{\infty}\left\|A\varphi_j\right\|^2$, $\left\{\varphi_j\right\}_1^{\infty}$ - ортонормований базис в H. В [3] при виконанні стандартних умов було дове-дено існування єдиного з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язку (1), який має властивості

$$E_0\left\|x_{x_0}(t)\right\|^2 \le e^{\beta_1(t-t_0)}\,\|x_0\|^2 + \beta_2(t - t_0) \qquad (4)$$

$$E_0\left\|x_{x_0}(t) - x_{y_0}(t)\right\|^2 \le e^{\beta_3(t-t_0)}\,\|x_0 - y_0\|^2 \qquad (5)$$

$$E_0\left\|x_{x_0}(t) - x_0\right\|^2 \le \beta_4(t - t_0) \qquad (6)$$

При цьому $x_0, y_0 \in \mathcal{H}^0$ - F_{t_0} – вимірна випадкова величина.

Розв'язок рівняння (1) породжує розрішаючий оператор

$S(t,t_0)\colon \mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^t$, який визначається за формулою $x(t) = S\big(t, t_{0,} x_0\big) = S(t,t_0) \circ x_0$.

Розглянемо мультиплікативну апроксимацію процеса (1) однорідними процесами вигляду:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t} a\big(t_k, \tilde{x}(s)\big)ds + \int_{t_k}^{t} A(t_k, \tilde{x}(s))dw(s) \qquad (7)$$

З цією метою розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ $n\,(n \to \infty)$ точками $t_0, t_1, \dots . t_{k,} t_{k+1}, ..T$. На кожному елементарному відрізку $\Delta_k t = t_{k+1} -$

t_k побудуємо однорідний за часом процес $\tilde{x}(t)$, який задовольняє рівнянню (7). Оскільки коефіцієнти цього рівняння задовольняють умовам (2), (3), то це рівняння має на елементарному проміжку єдиний розв'язок, що породжує відповідно розрішаючий оператор $\tilde{x}(t) = T\big(t, t_k, \tilde{x}(t_k)\big) = T(t, t_k) \circ \tilde{x}(t_k)$. Для того, щоб показати, що однорідні процеси апроксимують саме розв'язок стохастичного рівняння (1), скористуємось методом мультиплікативних представлень Далецького – Троттера. В даному випадку він полягає в тому, щоб довести збіжність мультиплікативного виразу

$$\prod_{k=0}^{n} T(t, t_k) \circ \tilde{x}(t_k) = T(t, t_n) \circ T(t_n, t_{n-1}) \circ \ldots T(t_{k+1}, t_k) \circ \ldots\ldots x_0 \qquad (8)$$

при $x_0 = \tilde{x}_0$ до розв'язку стохастичного рівняння (1). Для цього порівняємо вираз (8) і мультиплікативне представлення $x(t)$. Розрішаючий оператор рівняння (1) має еволюційну властивість, тобто

$$x(t) = S(t, t_n) \circ S(t_n, t_{n-1}) \circ \ldots S(t_{k+1}, t_k) \circ \ldots\ldots x_0$$
$$x(t) = P - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} S(t, t_k) \circ \mathrm{x}(t_0).$$

При виконані деяких додаткових умов на коефіцієнти $a(t, x), A(t, x)$ однорідні процеси апроксимують розв'язок рівняння (1) і

$$x(t) = P - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} T(t, t_k) \circ \mathrm{x}(t_0). \qquad (9)$$

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння задовольняють умовам (2),(3), і крім того вони неперервні по s: $\varepsilon > 0$

$$\|a(s, x) - a(\tau, x)\|^2 + \sigma_2^2\big(A(s, x) - A(\tau, x)\big) \le c|s - \tau|^{1+\varepsilon} \qquad (10)$$

Розв'язок рівняння (1) допускає мультиплікативне представлення вигляду (8). Тобто справедливе співвідношення (9).

Для більш загального випадку мультиплікативне представлення вигляду (9) розглянуто в [4]. Там же наведена оцінка для середнього квадратичного відхилення відповідних розрішаючих операторів. В даному випадку розглянемо оцінку вигляду:

$$\Delta_к = E_k \|T(t_{k+1}, t_k) \circ x_k - S(t_{k+1}, t_k) \circ x_k\| \qquad (11)$$

Згідно з теоремою про еквівалентність мультиплікативних представлень, якщо $\Delta_к \approx \mathrm{C}(\Delta_k t)^{2+\varepsilon}$, то вирази $\prod_{k=0}^{n} T(t, t_k) \circ \mathrm{x}(t_0)$ і $\prod_{k=0}^{n} S(t, t_k) \circ \mathrm{x}(t_0)$ стохастично еквівалентні, і тому має місце (9). Доведемо справедливість (11) для даного конкретного випадку. Для цього випишемо відповідні рівняння для операторних сімей

$$T(t_{k+1}, t_k): \mathcal{H}^{t_k} \to \mathcal{H}^{t_{k+1}},$$
$$S(t_{k+1}, t_k): \mathcal{H}^{t_k} \to \mathcal{H}^{t_{k+1}}$$
$$T(t_{k+1}, t_k) \circ x_k =$$
$$x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t_k, T(s, t_k) \circ x_k) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t_k, T(s, t_k) \circ x_k) dw(s\,) \qquad (12)$$

$S(t_{k+1}, t_k) \circ x_k = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s, S(s, t_k) \circ x_k) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(s, S(s, t_k) \circ x_k) dw(s) \qquad (13)$

Скористаємось нерівністю Коші для норм, тоді маємо

$\Delta_к = E_k \, \|T(t_{k+1}, t_k) \circ x_k - S(t_{k+1}, t_k) \circ x_k\|^2 \le 2\Delta_1 + 2\Delta_2$

де

$\Delta_1 = E_k \, \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [(a(t_k, T(s, t_k) \circ x_k) - a(s, S(s, t_k) \circ x_k)] ds \right\|^2;$

$\Delta_2 = E_k \, \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [(A(t_k, T(s, t_k) \circ x_k) - A(s, S(s, t_k) \circ x_k)] dw(s) \right\|^2:$

$$\Delta_1 = 2E_k \, \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [(a(t_k, T(s, t_k) \circ x_k) - a(t_k, S(s, t_k) \circ x_k)] ds \right\|^2$$

$+2E_k \, \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [(a(t_k, S(s, t_k) \circ x_k) - a(s, S(s, t_k) \circ x_k)] ds \right\|^2;$

$\Delta_2 = 2E_k \, \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [(A(t_k, T(s, t_k) \circ x_k) - A(t_k, S(s, t_k) \circ x_k)] dw(s) \right\|^2 +$

$2E_k \, \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [(A(t_k, S(s, t_k) \circ x_k) - A(s, S(s, t_k) \circ x_k)] dw(s) \right\|^2.$

Скористаємось умовою (3) для коефіцієнтів, а також умовою (10), тоді одержимо:

$$\Delta_1 \le (\Delta_k t) \int_{t_k}^{t_{k+1}} const(s - t_k)^{1+\varepsilon} \, ds + (\Delta_k t) \int_{t_k}^{t_{k+1}} [k_3 E_k \|T(s, t_k) \circ x_k - S(s, t_k) \circ x_k\|^2] ds$$

$$\Delta_2 \le \int_{t_k}^{t_{k+1}} const(s - t_k)^{1+\varepsilon} \, ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [k_3 E_k \|T(s, t_k) \circ x_k - S(s, t_k) \circ x_k\|^2] ds$$

Звідки, скориставшись нерівністю Гронуола для (11)

$\Delta_к = E_k \, \|T(t_{k+1}, t_k) \circ x_k - S(t_{k+1}, t_k) \circ x_k\|^2 \le \; const(t_{k+1} - t_k)^{2+\varepsilon}$
$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\widetilde{k_3} E_k \|T(s, t_k) \circ x_k - S(s, t_k) \circ x_k\|^2 \right] ds \le \mathrm{C}(t_{k+1} - t_k)^{2+\varepsilon}.$

Що і доводить (9). Тобто мультиплікативний вираз, утворений з однорідних за часом процесів, можна вважати наближеним розв'язком стохастичного рівняння.

Як відомо із загальної теорії стохастичних рівнянь, при виконанні додаткових умов гладкості на коефіцієнти рівняння (1), розв'язок цього рівняння породжує еволюційну сім'ю обмежених операторів в просторі обмежених функцій на H за формулою

$$(\mathrm{U}(t,\tau)f)(\varphi) = E_{t,\varphi} f(x(\tau) = u(t,\varphi) \ (\tau \geq t) \quad (14)$$

А $u(t,\varphi)$ є розв'язком задачі Коші для оберненого рівняння Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (a(t,\varphi), u') + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}A^*(t,\varphi)u''A(t,\varphi), \quad (15)$$
$$\lim_{t\to T} u(t,\varphi) = f(\varphi).$$

Розглянуто мультиплікативну апроксимацію розв'язку стохастичного рівняння (9). Наступна теорема формулює умови, при яких мультиплікативне представлення стохастичного рівняння породжує відповідне мультиплікативне представлення розв'язку параболічного рівняння

Теорема 2. Нехай коефіцієнти рівняння $a(t,\varphi), A(t,\varphi),\ f(\varphi) \in C^2(H,R)$ задовольняють умовам теореми 1. Тоді розв'язок рівняння (15) допускає мультиплікативне представлення

$$u(t,\varphi) = \lim_{n\to\infty}[\prod_{k=0}^{n} U(t_k,t_{k+1})f]\,(\varphi) \quad (16)$$

Де U еволюційна сім'я обмежених операторів, що породжуються за формулою $(\mathrm{U}(t,t_{k+1})f)(\varphi) = E_{t,\varphi} f(\tilde{x}(t_{k+1}))$ процесом $\tilde{x}$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$

З представлення (16)

$$u(t,\varphi) = \lim_{n\to\infty} E_{t,\varphi} f\ \left(\prod_{k=0}^{n} T_k \circ \varphi\right)$$

Скориставшись властивостями умовних середніх

$E_{t,\varphi} f\ (\prod_{k=0}^{n} T_k \circ \varphi) = E_{t,\varphi} E_{t_n,\tilde{x}_n} f(T(t_{n+1},t_n) \circ \tilde{x}_n)$ $= E_{t,\varphi}[\mathrm{U}(t_n,t_{n+1})f](\tilde{x}_n) = E_{t,\varphi} u(t_n,\tilde{x}_n)$. Подовжимо цю процедуру n разів

Де $\tilde{x}_n = \prod_{k=0}^{n-1} T_k \circ \varphi$, а $U(t_n,t_{n+1})$ – еволюційна сім'я обмежених операторів, які породжуються процесом

$\tilde{x}(t_{n+1}) = T(t_{n+1},t_n) \circ \tilde{x}_n$ за формулою

$[U(t_n,t_{n+1})f](\tilde{x}_n) = E_{t_n,\tilde{x}_n} f(\tilde{x}(t_{n+1}))$.

Подовжуючи цю процедуру, отримаємо відповідне представлення для розв'язку (12)

$$u(t,\varphi) = \lim_{n\to\infty} E_{t,\varphi} f\ (\prod_{k=0}^{n} T_k \circ \varphi) = E_{t,\varphi}[\mathrm{U}(t_n,t_{n+1})f](\prod_{k=0}^{n-1} T_k \circ \varphi) = \lim_{n\to\infty}[U(t_0,t_1)U(t_1,t_2)\dots\dots U(t_n,t_{n+1})f](\varphi).$$

Таким чином, отримано апроксимацію розв'язку рівнняння Колмогорова за допомогою мультиплікативної процедури розв'язками відповідних однорідних параболічних рівнянь.

Висновки та перспективи. В статті наведені умови, при яких розв’язок стохастичного диференціального рівняння з нелінійними коефіцієнтами в нескінченновимірному гільбертовому просторі може бути апроксимований певним мультиплікативним виразом. Розглядання процесів в нескінченновимірному гільбертовому просторі дає можливість розповсюджувати таку схему дослідження на стохастичні рівняння з необмеженим оператором знесення. Такі рівняння по суті є стохастичні рівняння з частинними похідними. Це дає перспективи наближено розв’язувати рівняння, які описують випадкові збурення реальних фізичних процесів.

Література

1. *Лукшин А.В., Смирнов С.Н,* Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. М., Математическое моделирование , 1990, т. 2, 11. С.108-121.
2. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастческие дифференциальные уравнения : теорія и практика численного решения. СПБ: Изд-во Политехн.ун-та, 2010. 816с.
3. *Белопольская Я.И., Наголкина З.И.* О мультипликативных представлениях решений нелинйных стохастческих уравнений.К., Ин-т математики АН УССР, 1978, Сб.Вероятностные распределения в бесконечномерных пространствах. С. 22-36.
4. *Далецкий Ю.Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения.Успехи мат. наук, 1967, 22. Вып.4. С.3-54.
5. *Гихман И.И., Скороход ◦А.В.* Теория случайных процессов. Москва: Наука, 1975 т. 3, 496с.
6. *Яненко Н.Н.* Новосибирск, Метод дробних шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197с.

References

1. *Lukshin A.V., Smirnov S.N,* Chislennye metody reshenija stohasticheskih differencial'nyh uravnenij. M., Matematicheskoe modelirovanie , 1990, t. 2, 11. S.108-121.
2. *Kuznecov D.F.* Stohastcheskie differencial'nye uravnenija : teorija i praktika chislennogo reshenija. SPB: Izd-vo Politehn.un-ta, 2010. 816s.
3. *Belopol'skaja Ja.I., Nagolkina Z.I.* O mul'tiplikativnyh predstavlenijah reshenij nelinjnyh stohastcheskih uravnenij.K., In-t matematiki AN USSR, 1978, Sb.Verojatnostnye raspredelenija v beskonechnomernyh prostranstvah. S. 22-36.
4. *Daleckij Ju.L.* Beskonechnomernye jellipticheskie operatory i svjazannye s nimi parabolicheskie uravnenija.Uspehi mat. nauk, 1967, 22. Vyp.4. S.3-54.

5. *Gihman I.I., Skorohod ◦A.V.* Teorija sluchajnyh processov. Moskva: Nauka, 1975 t. 3, 496s.
6. *Janenko N.N.* Novosibirsk, Metod drobnih shagov reshenija mnogomernyh zadach matematicheskoj fiziki. Novosibirsk: Nauka, 1967. 197s.

к. ф-м. н. доцент **Наголкина З.І.**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
к.ф-м.н. доцент **Филонов Ю.П.**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В данной работе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение Ито в бесконечномерном действительном гильбертовом пространстве. С помощью метода мультипликативных представлений Далецкого - Троттера строится его приближенное решение.

При выполнении классических условий на коэффициенты существует единственное с точностью до стохастической эквивалентности решение стохастического уравнения, которое является случайным процессом. Это развитие порождает эволюционную семью разрешающая операторов по формуле x(t)= $S(t,t_0) \circ x(t_0)$. *Построим разбиение точками отрезка* $[t_0, T]$. *На каждом элементарном отрезке* $\Delta_k t$ *рассматривается уравнение с однородными по времени коэффициентами. Существует единственное решение этого уравнения на элементарном отрезке, который порождает разрешающий оператор по формуле* $\hat{x}(t) = T(t, t_k) \circ \hat{x}(t_k)$. *Строится мультипликативное выражение* $\prod T(t_{к+1}, t_k) \circ \hat{x}(t_0)$. *Пользуясь методом мультипликативных представлений Далецкого - Троттера доказывается, что данное мультипликативное выражение стохастически эквивалентно представлению, которое порождается решением исходного уравнения. А это и означает, что указанное мультипликативное выражение является соответственно представлением решения исходного уравнения. То есть совпадает с вероятностью единица с решением исходного стохастического уравнения. Следует отметить, что это возможно при выполнении дополнительных условий на коэффициенты уравнения. Эти условия - непрерывность по времени коэффициентов уравнения. Таким образом, построенное мультипликативное представление можно интерпретировать как приближенное решение исходного уравнения. Этот метод мультипликативной аппроксимации дает возможность* *упрощать исследования соответствующего случайного процесса как на элементарном отрезке, так и в целом.*

Как известно, решение стохастического уравнения по известной формуле порождает решение обратного уравнения Колмогорова в соответствующем пространстве. Эта схема мультипликативной аппроксимации может быть перенесена на решение параболического уравнения, которым является обратное уравнение Колмогорова. Таким образом, метод мультипликативной аппроксимации дает возможность упрощать исследования и стохастических уравнений и уравнений в частных производных.

Ключевые слова: стохастическое уравнение; уравнения в частных производных; условное среднее; приближенное решение; стохастическая эквивалентность;, измеримость; случайный процесс; эволюционный оператор; пространство Гильберта; диффузионный процесс; интегральное уравнение; начальное значение; неравенство Гронуола; функциональное пространство; нелинейные коэффициенты.

Ph. D., assoc. Prof **Zoya Nagolkina**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
Ph. D., assoc. Prof **Yuri Filonov**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
Kyiv National University of Construction and Architecture» (KNUCA)

MULTIPLICATIVE APPROXIMATION OF A RANDOM PROCESS

In this paper we consider the stochastic Ito differential equation in an infinite-dimensional real Hilbert space. Using the method of multiplicative representations of Daletsky - Trotter, its approximate solution is constructed.

Under classical conditions on the coefficients, there is a single to the stochastic equivalence of solutions of the stochastic equation, which is a random process. This development generates an evolutionary family of resolving operators by the formula $x(t) = S(t,t_0) \circ x(t_0)$. *Construct the division of the segment* $[t_0, T]$ *by the points. An equation with time-uniform coefficients is considered on each elementary segment* $\Delta_k t$. *There is a single solution of this equation on the elementary segment, which generates the resolving operator by the formula* $\hat{x}(t) = T(t, t_k) \circ \hat{x}(t_k)$. *The multiplicative expression* $\prod T(t_{\kappa+1}, t_k) \circ \hat{x}(t_0)$ *is constructed. Using the method of Dalecki-Trotter multiplicative representations, it is proved that this multiplicative expression is stochastically equivalent to the representation generated by the solution of the original equation. This means that the specified multiplicative expression is respectively a representation of the solution of the original equation. That is, the probability of one coincides with the solution of the original stochastic equation.*

It should be noted that this is possible under additional conditions for the coefficients of the equation. These conditions are the time continuity of the coefficients of the equation. Thus, the constructed multiplicative representation can be interpreted as an approximate solution of the original equation. This method of multiplicative approximation makes it possible to simplify the study of the corresponding random process both at the elementary segment and as a whole.

It is known, that the solution of a stochastic equation by a known formula generates a solution of the inverse Kolmogorov equation in the corresponding space. This scheme of multiplicative approximation can be transferred to the solution of the parabolic equation, which is the inverse Kolmogorov equation. Thus, the method of multiplicative approximation makes it possible to simplify the study of both stochastic equations and partial differential equations.

Keywords: stochastic equation; partial differential equation; conditional mean; approximate solution; stochastic equivalence; dimensionality; random process; evolutionary operator; Hilbert space; diffusion process; integral equation; initial value; Gronwall inequality; functional space; nonlinear coefficients.