УДК 515.2
DOI: 10.32347/0131-579x.2021.100.162-171

к. т. н., доцент **Коваль Г.М.,**
k.galina941@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0552-8328
ст. викладач **Лазарчук М.В.,**
mlazarchuk@ukr.net, ORCID: 0000-0001-6192-6825
ст. викладач **Овсієнко Л.Г.,**
ovsienko.liudmila@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4614-9498

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ЗАСТОСУВАННЯ КІЛ ДЛЯ СПРЯЖЕННЯ ПЛОСКИХ ОБВОДІВ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ГЛАДКОСТІ

При геометричному моделюванню обводів, особливо для спряження ділянок плоских обводів першого порядку гладкості, можуть бути застосованими дуги кіл. В статті запропоновані способи визначення рівнянь кола для двох способів його завдання: завдання кола точкою та двома дотичними, жодна з яких не містить задану точку, а також завдання кола трьома дотичними. Визначення рівнянь кіл в обох випадках проводилося з використанням проективної системи координат.

В першому випадку, коли коло задається точкою та двома дотичними, жодна з яких не містить цю точку, центр кола спряження визначається як точка перетину двох геометричних місць точок – бісектриси кута між дотичними та параболи, фокус якої – задана точка, а директриса – одна з заданих дотичних. В загальному випадку існує 2 кола спряження, для яких визначено канонічні рівняння. Параметричні рівняння кіл спряження, параметри яких дорівнюють 0 та ∞ на дотичних і дорівнюють одиниці в заданій точці, за допомогою афінних та проективних координат точок дотику визначаються спочатку в проективній системі координат, а надалі переводяться в афінну систему.

Для другого випадку, при завданні кола за допомогою трьох дотичних прямих, спочатку визначається в проективній системі координат рівняння кривої другого порядку, дотичної до цих прямих. Дотичні прямі при цьому приймаються за координатні прямі проективної системи координат. Одинична точка проективної системи координат при цьому обирається в метацентрі отриманого таким чином базисного трикутника. Рівняння дотичної до базисних прямих кривої другого порядку містить дві невідомі змінні, додатні або від'ємні значення яких визначають розташування чотирьох можливих дотичних кривих другого порядку. Після запису векторно-параметричного рівняння дотичної кривої другого порядку в афінній системі координат записується рівняння для визначення параметрів циклічних точок. Для того, щоб отримане в

проективній площині рівняння дотичної кривої другого порядку було рівнянням кола, йому мають задовольняти координати циклічних точок площини, що дозволяє записати друге рівняння для визначення параметрів циклічних точок. Розв'язавши систему двох рівнянь, отримуємо шукані рівняння кіл, дотичних до трьох заданих прямих.

Ключові слова: рівняння кола, яке проходить через точку і дотикається до двох прямих; рівняння кола, яке дотикається до трьох прямих; циклічні точки площини; проективна система координат.

Постановка проблеми. При геометричному моделюванню обводів, зокрема для спряження ділянок плоских обводів першого порядку гладкості, можуть бути використані дуги кіл. Для аналітичного завдання дуг кривих при моделюванні застосовуються, як правило, параметричні рівняння.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В аналітичній геометрії існує, як і для всіх кривих другого порядку, канонічне рівняння кола[1, 2]. Крім того, в [3,4] для еліпса, параболи та гіперболи наведені векторно-параметричні рівняння. В [1] також наведене неявне рівняння кола, заданого трьома точками. В [5] запропоновані рівняння кіл (в тому числі параметричні в A^2), заданих трьома точками, а також двома точками з дотичною в одній з них.

Ціль статті. Визначити параметричні рівняння кіл, заданих

а) точкою та двома дотичними, жодна з яких не містить задану точку;

б) трьома дотичними.

Основна частина. Визначимо рівняння кола, яке проходить через точку та дотикається до двох прямих, жодна з яких не містить задану точку. В місцевій системі координат (рис. 1.) це точка E та дотичні прямі AC та AB.

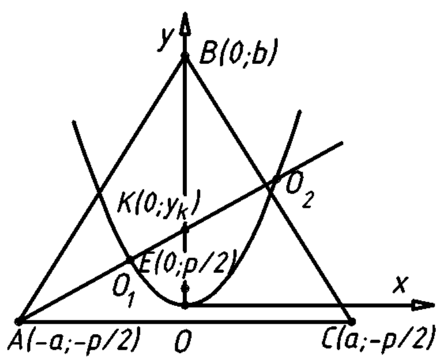

Рис. 1. Афінна система координат

Центри шуканих кіл (в загальному випадку задача має 2 розв'язки) визначимо як точки перетину бісектриси AK кута BAC з параболою, фокус якої – точка E, а директриса – пряма AC.

Рівняння прямих AB та AK мають відповідно вигляд

$$y - \frac{p + 2b}{2a}x - b = 0$$

та

$$y - \frac{p + 2y_k}{2a}x - y_k = 0.$$

Для визначення координати y_k маємо (при $\angle BAC = 2\alpha$ <90)

$$tg2\alpha = (p + 2b)/2a$$

$$tg\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + tg^2 2a}}{tg2a} = \frac{p + 2y_k}{2a}.$$

Тоді шукана координата y_k визначається за формулою

$$y_k = \frac{-4a^2 - p^2 - 2bp \pm 2a\sqrt{4a^2 + (p + 2b)^2}}{2(p + 2b)}.$$

Парабола $y = x^2 / 2p$ перетинається з бісектрисою AK в точках O_1 та O_2, координати яких визначаються за формулами

$$x_{01,02} = \frac{p(p + 2y_k) \pm \sqrt{p(p^3 + 4p^2 y_k + 4{y_k}^2 p + 8a^2 y_k}}{2a} \text{ та}$$

$$y_{01,02} = \frac{p + 2y_k}{2a} x_{01,02} + y_k,$$

а радіуси кіл відповідно дорівнюють

$$R_{1,2} = \frac{p + 2y_k}{2a} x_{01,02} + y_k + \frac{p}{2}.$$

Тоді канонічні рівняння шуканих кіл приймають вигляд

$$(x - x_{01,02})^2 + (y - y_{01,02})^2 = {R_{1,2}}^2. \qquad (1)$$

Для визначення параметричних рівнянь кіл в A^2 спочатку визначимо їх рівняння в проективній системі координат *ABCE* (рис.2).

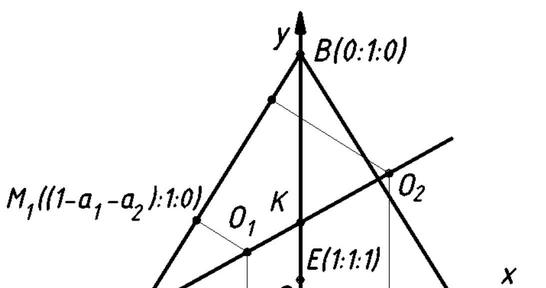

Рис.2. Суміщені афінна та проективна системи координат

В проективній системі координат P^2 параметричне рівняння кривої другого порядку (к2п) має вигляд:

$$\rho x_0 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2;$$
$$\rho x_1 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2; \qquad (2)$$
$$\rho x_2 = c_0 + c_1 t + c_2 t^2.$$

При умові, що крива (2) дотикається до координатних прямих x_2=0 та x_1=0 в точках, параметр t в яких дорівнює відповідно 0 та ∞, та проходить через базисну точку E і має в ній параметр t=1, рівняння (2) приймає вигляд

$$\rho x_0 = (1 - a_1 - a_2) + a_1 t + a_2 t^2; \rho x_1 = 1; \rho x_2 = t^2, \qquad (3)$$

де a_1 та a_2 –невідомі параметри.

Неявне рівняння к2п (3) в P^2 має вигляд

$$\begin{aligned}&x_0{}^2+(1+a_1{}^2+a_2{}^2-2a_1-2a_2+2a_1a_2)x_1{}^2+a_2{}^2x_2{}^2-2a_2x_0x_2-\\&-2(1-a_1-a_2)x_0x_1+(2a_2-2a_1a_2-a_1{}^2-2a_2{}^2)x_1x_2=0\end{aligned} \tag{4}$$

Для визначення невідомих параметрів a_1 та a_2 рівнянь (3) та (4) використаємо точки дотику кіл до заданих прямих AC та AB – точки $L_{1,2}$ та $M_{1,2}$.

Так, наприклад, точка L_1 має такі афінні та проективні координати: $L_1(x_{01}; -p/2)$ та $L_1(a_2:0:1)$ відповідно.

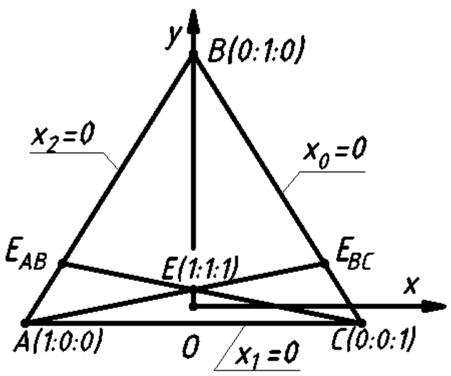

Рис.3. Проективна система координат

Запишемо за допомогою формул переводу афінних координат в проективні [6] проективні координати довільної точки $P(x, y)$ (рис.3).

$$\begin{aligned}\rho x_0&=vw[(x_C-x)(y_B-y)+(y_C-y)(x-x_B)]\\\rho x_1&=w[(x_A-x)(y_C-y)+(y_A-y)(x-x_C)]\\\rho x_2&=v[(x_B-x)(y_A-y)+(y_B-y)(x-x_A)],\end{aligned} \tag{5}$$

де $v=-AE_{AB}/BE_{AB}, w=-vBE_{BC}/CE_{BC}$

Для точки L_1 при w=1 маємо $\dfrac{x_0}{x_2}=\dfrac{a-x_{01}}{a+x_{01}}=a_2$. (6)

Точка M_1 є точкою перетину прямої AB з перпендикулярною до неї прямою O_1M_1 і її афінні координати визначаються виразами

$$x_{M1}=\frac{2a[(y_{01}-b)(p+2b)+2ax_{01}}{(p+2b)^2+4a^2};\, y_{M1}=\frac{p+2b}{2a}x_{M1}+b.$$

Тоді маємо $\dfrac{x_0}{x_1}=\dfrac{v}{2a}\dfrac{a(b-y_{M1})-x_{M1}(b+0.5p)}{0.5p+y_{M1}}=1-a_1-a_2$,

або

$$a_1=1-a_2-\frac{v}{2a}\frac{a(b-y_{M1})-x_{M1}(b+0.5p)}{0.5p+y_{M1}}. \tag{7}$$

Аналогічно визначаються коефіцієнти a_1 та a_2 другого кола.

Таким чином, при коефіцієнтах a_1 та a_2, визначених за формулами (6) та (7), рівняння (3) є параметричним рівнянням шуканого кола в P^2.

В афінній системі координат A^2 векторно-параметричне рівняння к2п (3), записане за допомогою формул переходу від проективної системи координат P^2 до афінної [6], має вигляд

$$r = \frac{r_A x_0 + v r_B x_1 + w r_C x_2}{x \;\; + v(1-2t-t^2) + wc} \ , \tag{8}$$

де r_A, r_B, r_C – радіуси-вектори точок A, B, C.

Підставивши в рівняння (8) параметричне рівняння кривої (3), в якої коефіцієнти a_1 та a_2 визначено за формулами (6) та (7), отримуємо шукане параметричне рівняння кола, заданого двома дотичними і точкою, в A^2 :

$$\begin{aligned} x &= \frac{a[(1-a_2)t^2 - a_1 t + (a_2 + a_1 - 1)]}{(1+a_2)t^2 + a_1 t + 1 + v - a_1 - a_2} \\ y &= \frac{-05p(1+a_2)t^2 - 0.5pa_1 t + 0.5p(a_1 + a_2 - 1) + vb}{(1+a_2)t^2 + a_1 t + 1 + v - a_1 - a_2} \end{aligned} \tag{9}$$

б). Визначимо рівняння кола, заданого трьома дотичними.

При умові, що к2п (2) дотикається до координатних прямих x_0=0, x_1=0 та x_2=0 проективної системи координат (рис. 3) в точках, параметр t в яких дорівнює відповідно 0, 1 та ∞, її рівняння приймає вигляд

$$\rho x_0 = at^2; \rho x_1 = 1 - 2t + t^2; \rho x_2 = c \,, \tag{10}$$

де a та c – невідомі параметри.

Неявне рівняння к2п (10) в P^2 має вигляд

$$c^2 {x_0}^2 + a^2 c^2 {x_1}^2 + a^2 {x_2}^2 - 2ac^2 x_0 x_1 - 2acx_0 x_2 - 2a^2 c x_1 x_2 = 0 .$$

В афінній системі координат векторно-параметричне рівняння к2п (10), має вигляд

$$r = \frac{r_A at^2 + v r_B (1 - 2t + t^2) + w r_C c}{at^2 + v(1-2t-t^2) + wc} \ . \tag{11}$$

В місцевій системі координат (рис.4) коефіцієнти v=w=1 і параметричне рівняння к2п (10) приймає вигляд

$$x = \frac{x_B t^2 - 2x_B t + x_B + x_C c}{(a+1)t^2 - 2t + 1 + c}; y = \frac{y_B (t^2 - 2t + 1)}{(a+1)t^2 - 2t + 1 + c} . \tag{12}$$

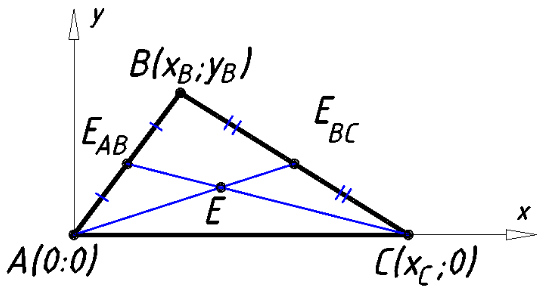

Рис.4. Місцева система координат

Для того, щоб отримані рівняння (10) – (12) були рівняннями кола, їм мають задовольняти координати циклічних точок площини.

В проективній площині циклічні точки $P_{1,2}$ мають координати [7]

$$\begin{aligned}\rho x_{0P} &= vw(x_{CB} \pm iy_{CB})\\ \rho x_{1P} &= w(x_{AC} \pm iy_{AC})\\ \rho x_{2P} &= v(x_{BA} \pm iy_{BA}),\end{aligned} \tag{13}$$

де $y_{CB} = y_C - y_B, x_{CB} = x_C - x_B,\ y_{AC} = y_A - y_C, x_{AC} = x_A - x_C,$ $y_{BA} = y_B - y_A, x_{BA} = x_B - x_A,\ v = -AE_{AB} / BE_{AB},\ w = -vBE_{BC} / CE_{BC}.$

В місцевій системі координат рівняння (13) приймає вигляд

$$\rho x_{0P} = \pm iy_{CB}; \rho x_{1P} = x_{AC} \pm iy_{AC}; \rho x_{2P} = x_{BA} \pm iy_{BA}. \tag{14}$$

Визначимо параметри T_P циклічних точок для кривої (10). Для цього підставимо в рівняння (10) їх координати, маємо

$$T_{P1,P2} = \frac{\{c[(a+1)x_B x_C - S_1] + aS_1\} \pm icx_C y_B (a+1)}{2aS_1}, \tag{15}$$

де $S_1 = x_B{}^2 + y_B{}^2.$

З іншого боку, параметри циклічних точок можна визначити з рівняння (12). Для циклічних точок маємо

$$T_P{}^2(a+1) - 2T_P + c + 1 = 0.$$

звідки

$$T_{P1,P2} = \frac{1 \pm i\sqrt{ac + a + c}}{a+1}, \tag{16}$$

Прирівнявши дійсні частини рівнянь (15) та (16), визначаємо

$$c = \frac{aS_1(1-a)}{(a+1)[(a+1)x_B x_C - S_1}. \tag{17}$$

Прирівняємо уявні частини рівнянь (15) і (16) і підставимо в отримане рівняння вираз (17), маємо симетричне рівняння четвертого ступеня відносно невідомого параметра a

$$x_C{}^2 y_B{}^2 a^4 + 4x_B x_C (S_1 - x_B x_c) a^3 - 2(x_B{}^2 x_C{}^2 + 2S_1{}^2 + 4x_B{}^2 x_C{}^2 +$$
$$+ 4S_1 x_B x_C) a^2 + 4x_B x_C (S_1 - x_B x_C) a + x_C{}^2 y_B{}^2 = 0.$$

Для розв'язку отриманого рівняння четвертого ступеня вводимо нову змінну $b = a + 1/a$ і отримуємо квадратне рівняння відносно змінної *b*

$$x_C{}^2 y_B{}^2 b^2 + 4x_B x_C (S_1 - x_B x_c) b - 4(x_C{}^2 y_B{}^2 + S_1{}^2 + \\ + 2x_B{}^2 x_C{}^2 - 2S_1 x_B x_C) = 0. \tag{18}$$

Після розв'язку рівняння (18) послідовно визначаємо параметри *a* та *c* і отримуємо, таким чином, рівняння чотирьох кіл, дотичних до трьох заданих прямих.

Для кожного з чотирьох варіантів координати центра кола та його радіус визначаються відповідно за формулами

$$O(\frac{x_C c}{a+c}; \frac{S_1}{y_B(a+1)} - \frac{x_B x_C c}{y_B(a+c)}), \quad R = \frac{S_1}{y_B(a+1)} - \frac{x_B x_C c}{y_B(a+c)}.$$

Висновки та перспективи подальших досліджень. Шукані параметричні рівняння кіл, заданих точкою та двома дотичними, жодна з яких не містить задану точку, та заданих трьома дотичними, визначено

Література

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва : Наука, 1974. 832 с. с ил.

2. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва : Наука, 1979. 512 с. с ил.

3. *Надолинный В. А.* Аналитические методы в конструировании поверхностей. Учебное пособие. Киев : КПИ, 1981. 43 с.

4. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. Москва : Мир, 1982. 304 с.

5. *Коваль Г.М.* Застосування кола при геометричному моделюванні плоских обводів/ Г.М. Коваль / Прикладна геометрія та інженерна графіка. Вип. 97. Киев : КНУБА. 2020. С. 69 – 74.

6. *Надолинный В.А.* Основы теории проективных рациональных поверхностей /Автореферат дисс. … докт. техн. наук, 05.01.01. Москва, 1989. 30 с.

7. *Коваль Г.М.* Конструирование рациональных кривых третьего порядка с заданными радиусами кривизны / Киев: КПИ, 1994. 6с. Деп. в ГНТБ Украины 22.02.94, № 400 – Ук94.

References

1. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov). M.: Nauka, 1974. 832 s. s il. {in Russian}.

2. *Aleksandrov P. S.* Kurs analiticheskoy geometrii i lineynoy algebry. M.: Nauka, 1979. 512 s. s il. {in Russian}.

3. *Nadolinnyy V. A.* Analiticheskiye metody v konstruirovanii poverkhnostey. Uchebnoye posobiye. /Kiyev: KPI, 1981. 43 s. {in Russian}.
4. *Foks A., Pratt M.* Vychislitel'naya geometriya. Primeneniye v proyektirovanii i na proizvodstve. M.: Mir, 1982. 304 s. {in Russian}.
5. *Koval H. M.* Zastosuvannia kola pry heometrychnomu modeliuvanni ploskykh obvodiv/ H.M. Koval // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Vyp. 97, K.: KNUBA. 2020 – S. 69 – 74. {in Ukranian}.
6. *Nadolinnyy V. A.* Osnovy teorii proyektivnykh ratsional'nykh poverkhnostey /Avtoreferat diss. … dokt. tekhn. nauk, 05.01.01. – M., 1989. 30 s. {in Russian}.
7. *Koval G. M.* Konstruirovaniye ratsional'nykh krivykh tret'yego poryadka c zadannymi radiusami krivizny / Kiyev: KPI, 1994. 6s. – Dep. v GNTB Ukrainy 22.02.94, № 400 – Uk94. {in Russian}.

к. т. н., доцент **Коваль Г.М.**,
k.galina941@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0552-8328
ст. преподаватель **Лазарчук М.В.**,
mlazarchuk@ukr.net, ORCID: 0000-0001-6192-6825
ст. преподаватель **Овсиенко Л.Г.**,
ovsienko.liudmila@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4614-9498

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

ПРИМЕНЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ ДЛЯ СОПРЯЖЕНИЯ ПЛОСКИХ ОБВОДОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ГЛАДКОСТИ

При геометрическом моделировании обводов, особенно для сопряжения участков плоских обводов первого порядка гладкости, могут применяться дуги окружностей. В статье предложены способы определения уравнений окружности для двух способов ее задания: задания окружности точкой и двумя касательными, не проходящими через заданную точку, а также задания окружности тремя касательными. Определение уравнений окружности в обоих случаях производилось с использованием проективной системы координат.

В первом случае, когда окружность задается точкой и двумя касательными, ни одна из которых не проходит через эту точку , центр окружности сопряжения определяется как точка пересечения двух геометрических мест точек – биссектрисы угла между касательными и параболы, фокус которой – заданная точка, а директриса – одна из заданных касательных. В общем случае существует 2 окружности сопряжения, для которых определены канонические уравнения. Параметрические уравнения окружностей сопряжения, параметры

которых равны 0 и ∞ на касательных и равны единице в заданной точке, при помощи аффинных и проективных координат точек касания определяются сначала в проективной системе координат, после чего переводятся в аффинную систему.

Для второго случая, при задавании окружности с помощью трех касательных прямых, сначала определяется в проективной системе координат уравнение кривой второго порядка, касательной к этим прямым. Касательные прямые при этом принимаются за координатные прямые проективной системы координат. Единичная точка проективной системы координат при этом выбирается в метацентре полученного таким образом базисного треугольника. Уравнение касательной к базисным прямым кривой второго порядка содержит две неизвестные переменные, положительные или отрицательные значения которых определяют положение четырех возможных касательных кривых второго порядка. После записи векторно-параметрического уравнения касательной кривой второго порядка в аффинной системе координат записывается уравнение для определения параметров циклических точек. Для того, чтобы полученное в проективной плоскости уравнение касательной кривой второго порядка было уравнением окружности, ему должны удовлетворять координаты циклических точек плоскости, что позволяет записать второе уравнение для определения параметров циклических точек. Решив систему двух уравнений, получаем искомые уравнения окружностей, касательных к трем заданным прямым.

Ключевые слова: уравнение окружности, которая проходит через точку и касается двух прямых; уравнение окружности, касательной к трем прямым; циклические точки плоскости; проективная система координат.

Doctor of Philosophy, Associate Professor **Galyna Koval**

k.galina941@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0552-8328
Senior teacher **Lazarchuk Margarita,**
mlazarchuk@ukr.net, ORCID: 0000-0001-6192-6825
Senior teacher **Liudmila Ovsienko**,
ovsienko.liudmila@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4614-9498

National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

APPLICATION OF CIRCLES FOR CONJUGATION OF FLAT CONTOURS OF THE FIRST ORDER OF SMOOTHNESS

In geometric modeling of contours, especially for conjugation of sections of flat contours of the first order of smoothness, arcs of circles can be applied. The article proposes ways to determine the equations of a circle for two ways of its problem: the problem of a circle with a point and two tangents, none of which contains a given point, and the problem of a circle with three tangents. The equations of the circles were determined in both cases using a projective coordinate system.

In the first case, when a circle is given by a point and two tangents, neither of which contains this point, the center of the conjugation circle is defined as the point of intersection of two locus of points - the bisector of the angle between the tangents and the parabola, the focus of which is a given point. given tangents. In the general case, there are 2 conjugation circles for which canonical equations are defined. Parametric equations of conjugate circles, the parameters of which are equal to 0 and ∞ on tangents and equal to one at a given point, with the help of affine and projective coordinates of points of contact are determined first in the projective coordinate system, and then translated into affine system.

For the second case, when specifying a circle using three tangent lines, the equation of the second-order curve tangent to these lines is first determined in the projective coordinate system. The tangent lines are taken as the coordinate lines of the projective coordinate system. The unit point of the projective coordinate system is selected in the metacenter of the thus obtained base triangle. The equation of the tangent to the base lines of the second order contains two unknown variables, positive or negative values which determine the location of four possible tangents of the second order. After writing the vector-parametric equation of the tangent curve of the second order in the affine coordinate system, the equation is written to determine the parameters of cyclic points. In order for the equation of the tangent curve of the second order obtained in the projective plane to be an equation of a circle, it must satisfy the coordinates of the cyclic points of the plane, which allows to write the second equation to determine the parameters of cyclic points. By solving a system of two equations, we obtain the required equations of circles tangent to three given lines.

Keywords: the equation of a circle that passes through a point and touches two lines; the equation of a circle tangent to three lines; cyclic points of the plane; projective coordinate sys