УДК 514.18
DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579x.2021.101.34-44
д. т. н., доцент **Гавриленко Е.А.**
yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4501-445X
к. т. н., доцент **Холодняк Ю.В.**
yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8966-9269
Антонова Г.В.
galina.antonova@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9269-6356
Михайленко Е.Ю.
olena.mykhailenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7587-4544
Таврический государственный агротехнологический университет
имени Дмитрия Моторного

МОДЕЛИРОВАНИЕ УЧАСТКОВ ОДНОМЕРНЫХ ОБВОДОВ ПО ЗАДАННЫМ УСЛОВИЯМ

Формирование одномерных обводов по заданным условиям – одна из наиболее востребованных задач геометрического моделирования. Задача решается вариативным дискретным геометрическим моделированием, которое предполагает формирование для исходного ряда промежуточных точек сгущения. Дискретная модель кривой состоит из точечного ряда, заданных геометрических характеристик и алгоритма сгущения.

Дискретно представленная кривая (ДПК) формируется сгущением исходного точечного ряда произвольной конфигурации по участкам, на которых возможно обеспечить монотонное изменение значений ее характеристик. Монотонные участки стыкуются в особых точках. Каждые три последовательные точки ДПК определяют прилегающую плоскость. Четыре прилегающие плоскости, проходящие через две последовательные точки, ограничивают тетраэдр. Цепочка последовательных тетраэдров, определенных на всех участках, является областью расположения гладкой кривой линии постоянного хода, интерполирующей исходный точечный ряд. Кручение на участках ДПК оценивается величиной отношения угла между соседними прилегающими плоскостями к длине соответствующей хорды сопровождающей ломаной линии. Точка сгущения назначается внутри тетраэдра расположения ДПК. В результате последовательных сгущений получим непрерывный обвод постоянного хода, в каждой точке которого существует единственное положение основного трёхгранника. Точка сгущения назначается таким образом, чтобы значения кручения в точках ДПК изменялись монотонно. Это обеспечивает регулярность значений кручения в точках обвода.

Наложение на формируемую ДПК дополнительных условий требует определения соответствующей области возможного решения внутри тетраэдра расположения ДПК.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая (ДПК); кручение; радиус кривизны; монотонность изменения характеристик.

Постановка проблемы. Проектирование изделий, взаимодействующих со средой (каналы двигателей внутреннего сгорания, рабочие органы сельскохозяйственных машин, крылья самолета и т.п.) предполагает моделирование сложных поверхностей с повышенными динамическими свойствами. С геометрической точки зрения динамические свойства можно улучшить за счет обеспечения закономерного изменения дифференциально-геометрических характеристик (положений касательных и значений кривизны, кручения и др.) вдоль кривых, которые являются элементами определителя поверхности [1]. Если кривая представлена дискретно, то при моделировании обвода целесообразно формировать участки кривой локально. Полученные участки стыкуются с заданным порядком гладкости. Исходными данными для моделирования участка дискретно представленной кривой (ДПК) являются положения исходных точек и заданные в этих точках геометрические характеристики.

Анализ последних исследований и публикаций. Особенности существующих методов вариативного дискретного геометрического моделирования рассмотрены в работе [2]. Одним из недостатков существующих этих методов является невозможность обеспечения заданной динамики изменения положений касательных и радиусов кривизны вдоль обвода.

Способ, с помощью которого можно определить область возможного расположения монотонной кривой, разработан в статье [3]. Границы расположения обвода определяются с учетом положений касательных и значений кривизны, заданных в исходных узлах.

Для оценки значений радиусов кривизны в узлах ДПК употребляется критерий, предложенный в работе [4]. Критерий связывает значение кривизны, которую можно получить в процессе моделирования, с исходными данными: координатами узлов и положениями соприкасающимися в этих узлах.

Требования к назначению положений точки сгущения и проходящей через нее касательной при формировании участка ДПК определены в работе [5]. Условиями моделирования кривой являются монотонное изменение кривизны, заданные положения касательных и радиусов кривизны в точках, ограничивающих участок.

Цель статьи. Целью исследования является разработка способов формирования плоского и пространственного гладкого обвода с регулярным изменением значений кривизны и кручения.

Основная часть. Разрабатываемый метод предполагает формирование одномерных обводов на основе области их возможного расположения. Эта область определяется исходя из известных геометрических свойств обвода.

Обвод формируется в виде дискретно представленной кривой (ДПК), которая представлена упорядоченным множеством точек. Плоская ДПК формируется в виде точечного ряда, состоящего из сколь угодно большого числа точек [6]. Это исходные точки и точки сгущения, положения которых определяются исходя из условий, накладываемых на формируемую кривую.

Перед сгущением проводится анализ исходного точечного ряда, в результате которого определяются участки, на основе которых может быть сформирована кривая с монотонным изменением кривизны. Полученные участки формируются отдельно и стыкуются между собой. Положения точек сгущения определяются исходя из координат исходных точек и требований, которые накладываются на обвод. Такими условиями являются отсутствие осцилляции, регулярность положений касательных и значений кривизны, монотонное изменение радиусов кривизны вдоль кривой.

Радиусы кривизны в точках ДПК оцениваются с помощью радиусов кривизны кривой Безье ($\overrightarrow{R}_i$, $\overleftarrow{R}_i$) для которой контрольные точки, которые ее задают, совпадают с вершинами базисного треугольника (БТ). БТ ограничен касательными к ДПК, которые проходят через последовательные точки и хордой, которая соединяет эти точки (рис. 1).

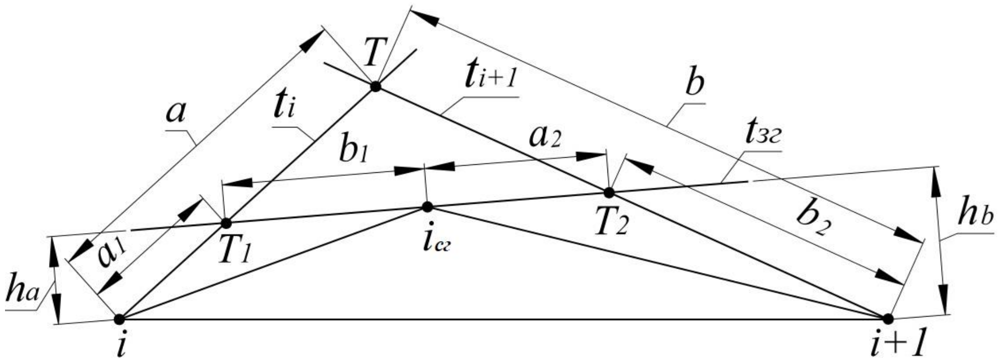

Рис. 1. Формирование БТ сгущения

Значения радиусов кривизны в точках i и $i+1$ оцениваются по формулам:

$$R = \frac{a}{S}, \qquad \overleftarrow{R}_{i+1} = \frac{b^3}{S}, \tag{1}$$

где $a=|i;T|$ и $b=|T;i+1|$ – длины сторон БТ($i;T;i+1$); S – площадь БТ.

На каждом шаге сгущения внутри исходного БТ назначается положение точки сгущения ($i_{сг}$) и касательной к обводу в этой точке ($t_{сг}$). В результате получаем два БТ сгущения ($i;T_1;i_{сг}$) и ($i_{сг};T_2;i+1$). Схема сгущения точечного ряда позволяет обеспечить назначенные значения радиусов кривизны в точках ДПК. Для этого точки сгущения внутри БТ назначаются таким образом, чтобы значения радиусов кривизны $\overrightarrow{R}_i^{сг}$ и $\overleftarrow{R}_{i+1}^{сг}$

в точках i и $i+1$, которые определяют БТ сгущения, были равными значениям R_i и R_{i+1}, назначенным в этих точках, то есть $\overrightarrow{R_i^{сг}} = R_i$ и $\overleftarrow{R_{i+1}^{сг}} = R_{i+1}$.

Для того, чтобы обеспечить регулярность изменения значений кривизны необходимо контролировать, чтобы значения $\overrightarrow{R_{сг}}$ и $\overleftarrow{R_{сг}}$, которые в общей точке определяют БТ($i;T_1;i_{сг}$) и БТ($i_{сг};T_2;i+1$), были равными. Учитывая параметры БТ, это условие имеет вид

$$\frac{b_1^2}{a_2^2} = \frac{h_a}{h_b}, \tag{2}$$

где $a_1=|i;T_1|$ и $b_2=|T_2;i+1|$ – длины сторон БТ($i;T_1;i_{сг}$) и БТ($i_{сг};T_2;i+1$) соответственно; h_a и h_b – расстояния от точек i и $i+1$ до касательной $t_{сг}$.

Назначение положений касательных в исходных точках в соответствии с условием (2) позволяет после каждого шага сгущения формировать обвод как составную кривую из дуг кривых Безье, которые стыкуются с обеспечением общей соприкасающейся окружности в точке стыковки. При этом каждый участок кривой Безье, ограниченный последовательными точками, может иметь участок возрастания и участок убывания радиусов кривизны.

Для того, чтобы обеспечить монотонность изменения кривизны вдоль ДПК, введены дополнительные условия. В исходных точках положения касательных назначаются таким образом, чтобы внутри каждого БТ можно было сформировать монотонную ДПК. В процессе сгущений контролируется выполнение условий $\overrightarrow{R_i^{сг}} < \overrightarrow{R_{сг}}$ и $\overleftarrow{R_{сг}} < \overleftarrow{R_{i+1}^{сг}}$, которые через параметры БТ выражаются следующим образом

$$a_1 < b_1 \text{ и } a_2 < b_2. \tag{3}$$

В результате на каждом шаге сгущения значения радиуса кривизны, которое определяется в точке параметрами БТ, больше значения радиуса кривизны в предыдущей точке и меньше, чем в следующей. Таким образом, в результате последовательных сгущений получим однопараметрическое множество точек, в каждой точке которого существует единственная соприкасающаяся окружность. Радиусы соприкасающихся окружностей монотонно изменяются вдоль ДПК.

Формирование пространственной ДПК с помощью разрабатываемого нами метода предполагает обязательный анализ характеристик исходного точечного ряда. Каждые три последовательные точки определяют плоскость (рис. 2). Будем называть эти плоскости прилегающими (ПП).

Потребуем, чтобы угол между смежными ПП (φ_i), внутри которого располагается участок ДПК, не превышал 180^0. Тогда направление поворота i-й ПП относительно хорды [$i;i+1$] на угол φ_i до совмещения с

i+1-й ПП совпадает с направлением хода ДПК (рис. 2).

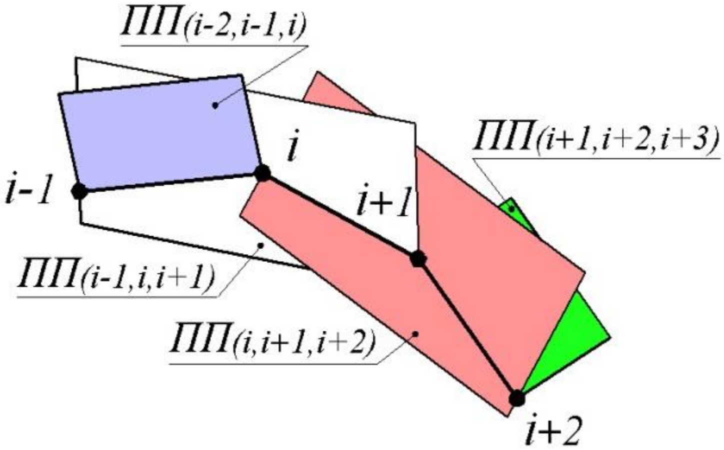

Рис. 2. Схема расположения прилегающих плоскостей вдоль кривой

Четыре последовательные ПП, проходящие через i-ю и i+1-ю точки ограничивают тетраэдр. Этот тетраэдр является областью возможного расположения ДПК постоянного хода на участке (i, i+1).

Цепочка тетраэдров, определенных на всех участках, является областью расположения гладкой кривой линии постоянного хода, интерполирующей исходный точечный ряд.

Касательная к ДПК (t_i) располагается внутри двух смежных двугранных углов: φ_i и φ_{i+1}. Положение касательной t_i определяется плоскостями, касающимися ДПК в точке i и проходящими через предыдущую (i-1) и последующие (i+1) исходные точки.

Положения касательных плоскостей назначается исходя из значений дискретного кручения на участках ДПК, которые определяются характеристиками исходного точечного ряда. В первом приближении кручение на участке $i \ldots i+1$ будем оценивать величиной

$$B_i^{\phi} = \frac{3\varphi_i}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}},$$

где φ_i - угол между смежными прилегающими плоскостями; h_i=|$i;i$+1| – длина хорды СЛЛ. После назначения касательных плоскостей дискретное кручение на i-м участке ДПК определяется по формуле $B_i^{\psi} = \frac{3\psi_i}{h_i}$.

Положения касательных плоскостей КП(t_i, $i+1$) и КП(i, t_{i+1}) (рис. 3) назначаются исходя из условия $B_i^{\phi} = B_i^{\psi}$.

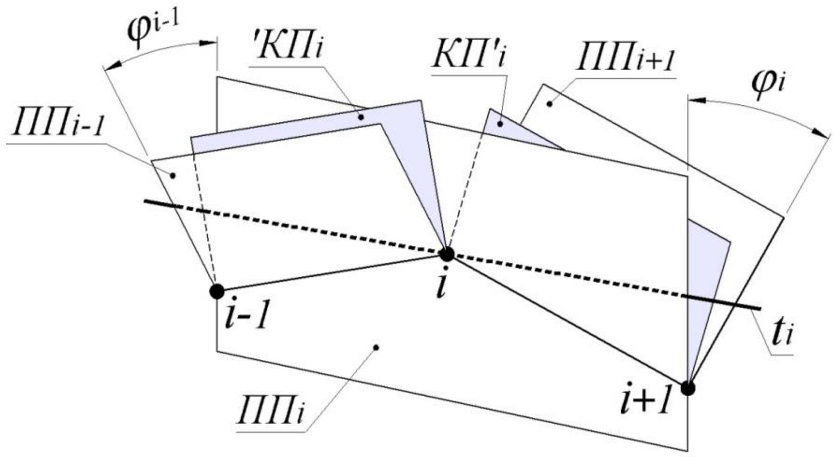

Рис. 3. Определение положения касательных прямых и плоскостей

Плоскости КП(i-1, t_i) и КП(t_i, i+1), касающиеся ДПК в одной точке, ограничивают диапазон w_i (рис. 4) возможного расположения соприкасающейся плоскости (СП$_i$). Положение СП$_i$ назначается таким образом, чтобы она разделяла двугранный угол w_i на углы `$w_i$ и $w_i$` в соотношении $\frac{'w_i}{w_i'} = \frac{\psi_{i-1}}{\psi_i}$.

После назначения касательных плоскостей получаем еще один критерий оценки кручения на участках ДПК $B_i^w = \frac{3w_i}{h_{i-1} + h_i}$.

При формировании ДПК, вдоль которой значения кручения монотонно возрастают, положение касательных плоскостей должно обеспечивать выполнение условий:

$$\ldots < B_{i-1}^{\psi} < B_i^w < B_i^{\psi} < B_{i+1}^w < \ldots. \tag{4}$$

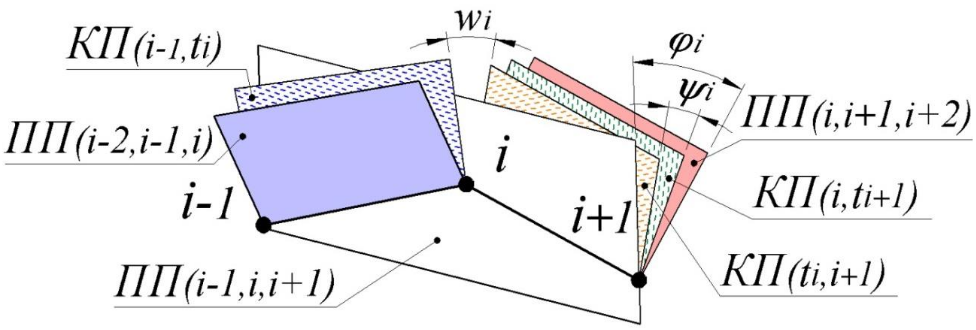

Рис. 4. Диапазон расположения соприкасающейся плоскости

Назначение касательных и соприкасающихся плоскостей уточняет тетраэдр расположения ДПК. В результате получаем новую цепочку тетраэдров, грани которых принадлежат касательным и соприкасающимся плоскостям. Эта цепочка тетраэдров – область возможного расположения гладкой ДПК постоянного хода, в узлах которой назначены положения основных трехгранников.

Точка сгущения назначается внутри тетраэдра расположения ДПК. Исходный диапазон расположения точки $i_{сг}$ на участке i…i+1- отрезок

$[T_i;T_{i+1}]$, принадлежащий прямой пересечения касательных плоскостей КП(t_i, $i_{сг}$) и КП($i_{сг}$, t_{i+1}) (рис. 5).

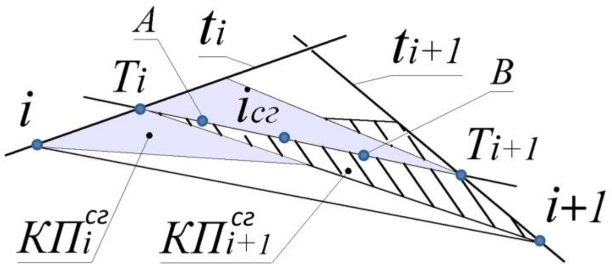

Рис. 5. Определение диапазона расположения точки сгущения

Назначение $i_{сг}$ в пределах отрезка $[T_i;T_{i+1}]$ обеспечивает назначенную динамику изменения значений дискретного кручения вдоль ДПК, получаемой в результате сгущения. Конкретное положение $i_{сг}$ определяется исходя из условия монотонного изменения значений радиусов кривизны вдоль ДПК.

Участки, вдоль которых радиусы кривизны изменяются монотонно, определяются исходя их характеристик исходного точечного ряда. Например, для формирования ДПК, вдоль которой радиусы кривизны монотонно возрастают, должно выполняться условие

$$\ldots < R(i-1,i,i+1) < R(i,i+1,i+2) < \ldots, \tag{5}$$

где $R(i-1,i,i+1)$ - радиус прилегающей окружности, которая проходит через точки i-1, i, i+1.

Положение точки сгущения на участке ДПК с монотонным возрастанием радиусов кривизны назначается исходя из условия

$$R(i-1,i,i_{сг}) < R(i,i_{сг},i+1) < R(i_{сг},i+1,i+2). \tag{6}$$

Точки сгущения последовательно назначаются внутри максимального по размерам тетраэдра расположения ДПК. Выполнение условий (4) и (6) при назначении каждой точки сгущения обеспечивает формирование точечного ряда, принадлежащего ДПК с регулярным монотонным изменением значений кривизны и кручения.

ДПК считаем сформированной, когда область ее возможного расположения: базисный треугольник для плоской и тетраэдр расположения для пространственной кривой не превышают заданную точность формирования обвода. После этого обвод может быть представлен сопровождающей ломаной линией, коробовой линией окружностей или B-сплайном, которые интерполируют полученный точечный ряд.

Выводы и перспективы. В результате исследований получены следующие результаты.

1. Разработан способ формирования плоских обводов, которые с заданной точностью представляют кривые линии с заданными геометрическими свойствами: регулярное изменение вдоль кривой значений кривизны при минимальном по условиям задачи числом особых точек: точек перегиба, точек перемены направления возрастания вдоль кривой значений кривизны. Сформированные плоские обводы образуют семейство кривых линий, являющихся частным положением образующей линии, которая описывает при своем движении моделируемую поверхность.

2. Разработан способ формирования пространственных одномерных обводов, которые с заданной точностью представляют кривые линии с заданными геометрическими свойствами: регулярное изменение вдоль кривой значений кривизны и кручения при минимальном по условиям задачи числом особых точек: точек смены хода, точек перемены направления возрастания вдоль кривой значений кривизны и кручения. Сформированные пространственные обводы образуют семейство кривых, являющихся направляющими линиями, определяющими закон перемещения образующей кривой.

Литература

1. Осипов В.А. Машинные методы проектирования непрерывно-каркасных поверхностей. М.: Машиностроение, 1979. 248 с.
2. *Найдиш А.В., Балюба І.Г., Верещага В.М., Спірінцев Д.В.* Науково-методологічні основи варіативного дискретного геометричного моделювання. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. Вып.13. С. 114-123.
3. *Холодняк Ю.В., Гавриленко Є.А., Івженко О.В., Найдиш А.В.* Технологія моделювання поверхонь складних технічних виробів за заданими умовами. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь: ТДАТУ імені Дмитра Моторного, 2019. Вип. 19, т. 2. С. 257-263.
4. *Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В., Спиринцев Д.В., Фоменко В.Г.* Формирование базисных треугольников при моделировании обвода по заданным условиям. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ, 2020. Вип. 18. С. 190-196.
5. Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В., Найдыш А.В., Лебедев В.А. Создание CAD-моделей поверхностей с использованием специализированного программного обеспечения. Прикладні питання математичного моделювання. Херсон: ХНТУ, 2020. Т.3, №2.2. С. 66-75.
6. *Холодняк Ю.В., Гавриленко Е.А., Ивженко А.В., Чаплинский А.П.* Формирование области расположения кривой с монотонным изменением кривизны. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ, 2020. Вип. 20. С. 194-201.

7. *Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В., Антонова Г.В., Чаплинский А.П.* Разработка алгоритма программного обеспечения для формирования обводов по заданным геометрическим условиям. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь: ТДАТУ ім. Д. Моторного, 2020. Вип. 20, т. 3. С. 293-303.

Referenses

1. *Osipov V.A.* Mashinnyie metodyi proektirovaniya nepreryivno-karkasnyih poverhnostey. M.: Mashinostroenie, 1979. 248 s. {in Russian}
2. *Naidysh A.V. Baliuba I.H. Vereshchaha V.M. Spirintsev D.V.* Naukovo-Metodolohichni Osnovy Variatyvnoho Dyskretnoho Heometrychnoho Modeliuvannia. *Suchasni Problemy Modeliuvannia*. Melitopol MDPU Imeni Bohdana Khmelnytskoho 2019. Vyp.13. S. 114-123. {in Ukranian}
3. *Kholodniak Yu.V. Havrylenko Ye.A. Ivzhenko O.V. Naidysh A.V.* Tekhnolohiia Modeliuvannia Poverkhon Skladnykh Tekhnichnykh Vyrobiv Za Zadanymy Umovamy. *Pratsi Tavriiskoho Derzhavnoho Ahrotekhnolohichnoho Universytetu*. Melitopol TDATU Imeni Dmytra Motornoho 2019. Vyp. 19 T. 2. S. 257-263. {in Ukranian}
4. *Gavrilenko E.A., Holodnyak Yu.V., Spirintsev D.V., Fomenko V.G.* Formirovanie bazisnyih treugolnikov pri modelirovanii obvoda po zadannyim usloviyam. *Suchasni problemi modelyuvannya*. Melitopol: MDPU, 2020. V. 18. S. 190-196. {in Russian}
5. *Gavrilenko E.A., Holodnyak Yu.V., Naydyish A.V., Lebedev V.A.* Sozdanie CAD-modeley poverhnostey s ispolzovaniem spetsializirovannogo programmnogo obespecheniya. *Prikladni pitannya matematichnogo modelyuvannya*. Herson: HNTU, 2020. T.3, №2.2. S. 66-75. {in Russian}
6. *Holodnyak Yu.V., Gavrilenko E.A., Ivzhenko A.V., Chaplinskiy A.P.* Formirovanie oblasti raspolozheniya krivoy s monotonnyim izmeneniem kriviznyi. *Suchasni problemi modelyuvannya*. Melitopol: MDPU, 2020. V. 20. S. 194-201. {in Russian}
7. *Gavrilenko E.A., Holodnyak Yu.V., Antonova G.V., Chaplinskiy A.P.* Razrabotka algoritma programmnogo obespecheniya dlya formirovaniya obvodov po zadannyim geometricheskim usloviyam. Pratsi Tavriyskogo derzhavnogo agrotehnologichnogo universitetu. Melitopol: TDATU im. D. Motornogo, 2020. V. 20, t. 3. S. 293-303. {in Russian}

д.т.н., доцент **Гавриленко Є.А.**
yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4501-445X
к.т.н., доцент **Холодняк Ю.В.**
yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8966-9269
Антонова Г.В.
galina.antonova@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9269-6356

Михайленко О.Ю.
olena.mykhailenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7587-4544
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного

МОДЕЛЮВАННЯ ДІЛЯНОК ОДНОВИМІРНИХ ОБВОДІВ ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Формування одновимірних обводів за заданими умовами - одна з найбільш затребуваних завдань геометричного моделювання. Задача вирішується варіативним дискретним геометричним моделюванням, яке передбачає формування для вихідного ряду проміжних точок згущення. Дискретна модель кривої складається з точкового ряду, заданих геометричних характеристик і алгоритму згущення.

Дискретно представлена крива (ДПК) формується згущенням вихідного точкового ряду довільної конфігурації по ділянкам, на яких можливо забезпечити монотонну зміну значень її характеристик. Монотонні ділянки стикуються в особливих точках. Кожні три послідовні точки ДПК визначають прилягаючу площину. Чотири прилягаючі площини, що проходять через дві послідовні точки, обмежують тетраедр. Ланцюг послідовних тетраедрів, визначених на всіх ділянках, є областю розташування гладкої кривої лінії постійного ходу, яка інтерполює вихідний точковий ряд. Скрут на ділянках ДПК оцінюється величиною відносини кута між сусідніми прилягаючими площинами до довжини відповідної хорди супроводжуючої ламаної лінії. Точка згущення призначається всередині тетраедра розташування ДПК. В результаті послідовних згущень отримаємо безперервний обвід постійного ходу, в кожній точці якого існує єдине положення основного тригранника. Точка згущення призначається таким чином, щоб значення скруту в точках ДПК змінювалися монотонно. Це забезпечує регулярність значень скруту в точках обводу. Накладення на сформовану ДПК додаткових умов вимагає визначення відповідної області можливого рішення всередині тетраедра розташування ДПК.

Ключові слова: дискретно представлена крива (ДПК); скрут; радіус кривизни; монотонність зміни характеристик.

Ph. D., assoc. prof. **Yevhen Havrylenko**
yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4501-445X
Ph. D., assoc. prof. **Yuliia Kholodniak**
yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8966-9269
Halyna Antonova
galina.antonova@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9269-6356
Olena Mykhailenko
olena.mykhailenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7587-4544
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного

MODELLING OF SEGMENTS OF ONE-DIMENSIONAL CONTOURS ACCORDING TO THE SPECIFIED CONDITIONS

The formation of one-dimensional contours on the basis on the given conditions is one of the most popular geometric modeling problems. The problem is solved by variative discrete geometric modeling, which assumes the formation of intermediate points for the initial set of condensation points. The discrete model of the curve consists of a point sets, given geometric characteristics and a condensation algorithm.

A discretely presented curve (DPC) is formed by a condensation of the initial point set of an arbitrary configuration in areas on which it is possible to ensure a monotonic change in the values of its characteristics. Monotone plots are joined at special points. Every three consecutive points of the duodenum define an adjacent plane. Four adjacent planes passing through two consecutive points limit the tetrahedron. The chain of consecutive tetrahedrons defined on all segments is the region of the location of the smooth curve of the constant stroke line interpolating the initial point sets. The torsion on the sections of the DPC is estimated by the value of the ratio of the angle between adjacent adjacent planes to the length of the corresponding chord of the accompanying broken line. The point of thickening is assigned inside the tetrahedron of the DPC. As a result of successive condensations, we obtain a continuous bypass of a constant stroke, at each point of which there is a single position of the main trihedron. The point of condensation is assigned in such a way that the values of the torsion in the duodenum points change monotonically. This ensures that the torsion values are regular at the points of the bypass.

The imposition of additional conditions on the DPC formed requires the definition of the corresponding region of a possible solution within the DPC arrangement tetrahedron.

Keywords: discretely presented curve (DPC); torsion; radius of curvature; monotone change of characteristics.