

к. т. н., доцент **Кресан Т.А.**,

tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

д. т. н., професор **Пилипака С.Ф.**,

s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

аспірант **Хропост В.І.**,

hropost97@ukr.net ORCID 0000-0001-9363-3955

к. т. н., доцент **Бабка В.М.**

babka.v.m@gmail.com ORCID 0000-0003-4971-4285

Національний університет біоресурсів і природокористування України

ПРУЖНЕ ЗГИНАННЯ СМУГИ ІЗ ЗНАЧНИМ ПРОГИНОМ ПІД ДІЄЮ ПРИКЛАДЕНИХ СИЛ ТА МОМЕНТУ

Розглянуто пружне згинання смуги прямокутного перерізу у вигляді консольно закріпленого стержня. В курсі опору матеріалів зазвичай розглядаються задачі деформації балок під дією прикладених сил і моментів, які допускають незначні прогини. В зв'язку із малими кутковими переміщеннями пружної лінії приймається спрощений вираз її кривини і теорія згину в такому випадку носить лінійний характер. При значних прогинах стержнів лінійною теорією згину користуватися не можна, потрібно використовувати точний вираз кривини поздовжньої пружної осі стержня.

В статті розглянуто згин смуги із малою її товщиною в порівнянні із шириною, прикладом якої може служити лінійка. Передбачається, що матеріал смуги працює пружно згідно закону Гука і після припинення дії деформуючих зусиль повністю відновлює свою форму. За рахунок малої товщини смуги в площині згину в порівнянні з довжиною цієї смуги переміщення кінцевої точки смуги виходять значними. В той же час в будь-якому малому об'ємі цієї смуги з лінійними розмірами порядку її товщини всі деформації залишаються малими. Таким чином, при малих внутрішніх пружних деформаціях досягаються великі переміщення кінця консольної смуги при її згинанні.

Під дією прикладених сил і моментів пружна вісь смуги набуває криволінійної форми, яка визначається залежністю її кривини від довжини дуги. Згідно теорії пружного згину кривина смуги прямо пропорціональна прикладеному моменту і обернено пропорціональна її жорсткості. Така залежність кривини представляє собою натуральне рівняння кривої. В диференціальній геометрії існують формули переходу від натурального рівняння кривої до параметричних рівнянь, за якими криву можна побудувати. Однак цей перехід здійснити до кінцевого результату практично не вдається із-за подвійного інтегрування виразів навіть для найпростіших випадків навантаження смуги. Наприклад, при

дії зосередженої сили на кінці консолі момент має лінійну залежність. Крива із лінійним натуральним рівнянням відома і носить назву клотоїди. Однак її побудову потрібно здійснювати чисельними методами. В роботі розглянуто цей випадок в поєднанні із дією прикладеного моменту і побудовано пружну вісь смуги.

Ключові слова: сила; момент сили; деформація; пружність; згинання; крива; довжина дуги; пружна вісь; жорсткість.

Постановка проблеми. Якщо в теорії лінійного згину кривину пружної осі можна записати спрощено, що виправдано малими кутковими переміщеннями смуги і спрощенням розрахунків, то при значних прогинах цього робити не можна. Потрібно використовувати точну формулу, що значно ускладнює розрахунки. Однак із появою комп'ютерних технологій і програмних продуктів стало можливим застосування чисельних методів. Це значною мірою усуває перепони для розв'язування подібних задач і орієнтує дослідників на застосування сучасних можливостей комп'ютерних технологій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Головні положення щодо деформації стержнів і оболонок під дією деформуючих зусиль висвітлені в капітальних працях [1, 2]. Теорії і розрахунку гнучких пружних стержнів присвячена монографія [3]. Із праць останніх років, які найбільш близькі до змісту пропонованої статті, слід віднести праці [4, 5]. Не дивлячись на здавалося б, не складну задачу поздовжньої деформації стержня під дією прикладених, її розв'язанню присвячено цілу низку робіт, зокрема, [4 – 9].

Формулювання цілей та завдання статті. Знайти аналітичний опис пружної осі консольно закріпленої прямолінійної пластини прямокутного перерізу під дією прикладеної зосередженої сили або моменту та в їх поєднанні.

Основна частина. Вважатимемо, що смуга є абсолютно пружна, тобто вона повністю відновлює прямолінійну форму після припинення дії сили або моменту. Сила і момент прикладаються на вільному кінці смуги, причому сила спрямована перпендикулярно до її осі і залишається такою в процесі згинання. Силою ваги стержня нехтуємо, оскільки вона набагато менша за силу P і її вплив на деформацію стержня буде незначний. Це буде ще більш справедливо, якщо розглядати прогин стержня не у вертикальній, а у горизонтальній площині.

З теорії опору матеріалів [1, 2] відомо, що при пружному згинанні стержня кривина k його осі прямо пропорціональна прикладеному моменту M і обернено пропорціональна жорсткості стержня EI . В свою чергу, жорсткість є добутком модуля Юнга E , що характеризує властивість матеріалу, на момент інерції I поперечного перерізу стержня, який характеризує його здатність чинити спротив згинанню:

$$k(s) = \frac{M(s)}{EI}, \quad (1)$$

де s є довжина стержня від його кінця до поточної точки.

До прикладення сили або моменту смуга є прямолінійною і кривина її осі дорівнює нулю. Після прикладення сили або моменту смуга згинається і її вісь набуває кривини. Як відомо, кривина є границею відношення кута між дотичними на кінцях елемента дуги до довжини цього елемента. Отже, формулу (1) перепишемо наступним чином:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{M(s)}{EI}. \quad (2)$$

По суті, рівняння (1) є натуральним рівнянням пружної осі смуги. Існує перехід від натурального рівняння до координатної форми запису:

$$x = \int \cos \alpha(s) ds; \quad y = \int \sin \alpha(s) ds, \quad (3)$$

де кут α знаходиться інтегруванням виразу (2).

Розглянемо консольно закріплену смугу довжиною L з прикладеною на її кінці зосередженою силою P і сталим моментом M_0 . На рис. 1,а зображено схему прикладення сили P і моменту M_0 до початку їх дії. Поперечний переріз смуги має прямокутну форму із розмірами a і b (рис. 1,б). Прикладена сила P спричинює момент $M=Ps$, де поточне значення s довжини смуги відраховується від кінця смуги в напрямку її защемлення. Сумарне значення моменту запишеться: $M(s)=Ps+M_0$.

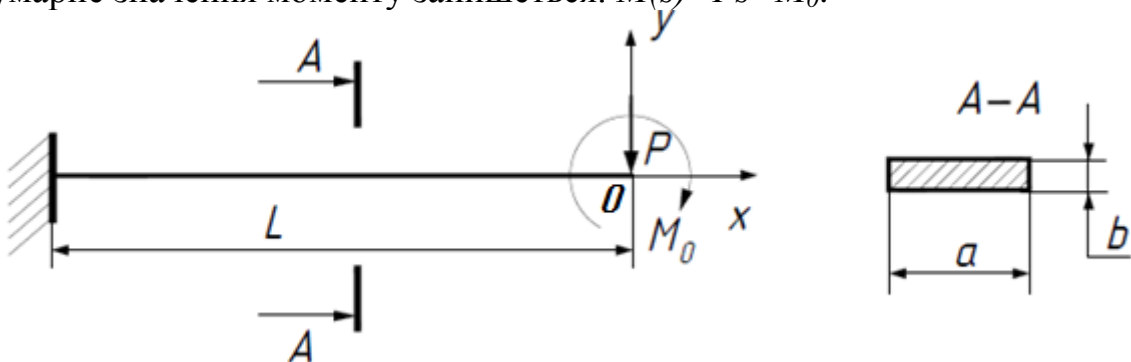


Рис. 1. До навантаження консолі у вигляді смуги прямокутного перерізу силою і моментом:

- а) схема прикладення сили P і моменту M_0 ;
б) позначення розмірів поперечного перерізу смуги

Знайдемо кут α інтегруванням виразу (2):

$$\alpha = \int \frac{Ps + M_0}{EI} ds = \frac{Ps^2 + M_0s}{2EI}. \quad (4)$$

Підстановка (4) у (3) дає наступні параметричні рівняння зігнутої смуги:

$$x = \frac{1}{2EI} \int \cos(Ps^2 + M_0s) ds; \quad y = \frac{1}{2EI} \int \sin(Ps^2 + M_0s) ds. \quad (5)$$

Вирази (5) в загальному випадку проінтегрувати не вдається. Це можливо тільки в одному частковому випадку, коли $P=0$, тобто коли до смуги прикладено тільки сталий момент M_0 . В такому випадку ми отримуємо параметричні рівняння кола радіуса $R=EI/M_0$:

$$x = \frac{EI}{M_0} \sin \frac{M_0 s}{EI}; \quad y = -\frac{EI}{M_0} \cos \frac{M_0 s}{EI}. \quad (6)$$

Пружна вісь смуги набуває форми дуги кола, величина якої визначається рівняннями (6) при зміні незалежної змінної s в межах $s=0\dots L$. При навантаженні смуги силою P або силою P і моментом M_0 для побудови пружної осі за рівняннями (5) потрібно застосовувати чисельні методи інтегрування. Для цього потрібно задавати чисельні значення сталих, що входять до рівнянь (5).

Чисельне інтегрування виразів (5) було застосовано для металевої смуги з поперечним перерізом $a=3$ см, $b=0,3$ см, і довжиною $L=1,14$ м. Момент інерції прямокутного перерізу знаходили за відомою формулою $J=ab^3/12$ в м^4 , модуль Юнга брали в паскалях: $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па. Жорсткість смуги є сталою величиною, яку знайшли після переходу розмірів поперечного перерізу від см до м: $EI=14,175$ Н·м². На рис. 2,а представлено результати обчислень пружної осі при $P=50$ Н і $M_0=0$, тобто тільки за наявності зосередженої сили, причому силу P поступово збільшували від $P=0$ до $P=50$ Н.

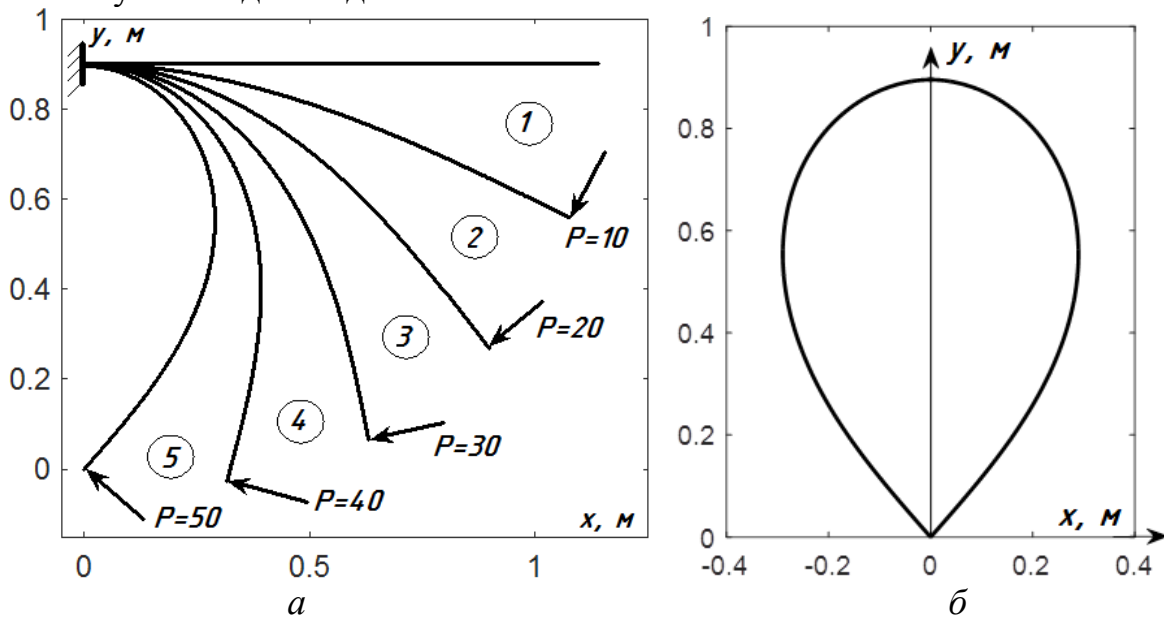


Рис. 2. Форма пружної осі металевої смуги, зігнутої внаслідок дії зосередженої сили P :

- а) послідовна зміна форми пружної осі при збільшенні сили P ;
- б) форма пружної осі, зігнутої під дією двох рівних сил

При чисельному інтегруванні побудова пружної осі починається із початку координат при $s=0$ і закінчується в точці із координатами, що відповідають $s=L$. Так була побудована пружна вісь для $P=50$ Н. Довжина L була спеціально підібрана так, щоб пружна вісь після симетричного

відображення відносно осі ординат набула замкненого вигляду (рис. 2,б). Для того, щоб всі криві виходили із точки защемлення, для решти кривих (крім $P=50 \text{ Н}$) здійснювався поворот і перенос на потрібні кутові і лінійні величини. Форма замкненої осі буде однакою для всіх смуг різної довжини, але буде відрізнятися розмірами і величиною сили P , яка згинає смугу до потрібної форми. Крива, у якої натуральне рівняння носить лінійний характер, називається клотоїдою. Параметричних рівнянь клотоїди в кінцевому вигляді не існує, проте її можна змоделювати за допомогою пружної смуги.

При згинанні пружної смуги виконується певна робота A , а після згинання вона має запас потенціальної енергії U . Її можна знайти за відомою формулою:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} ds = \frac{1}{2EI} \int (Ps)^2 ds = \frac{P^2 s^3}{6EI}. \quad (7)$$

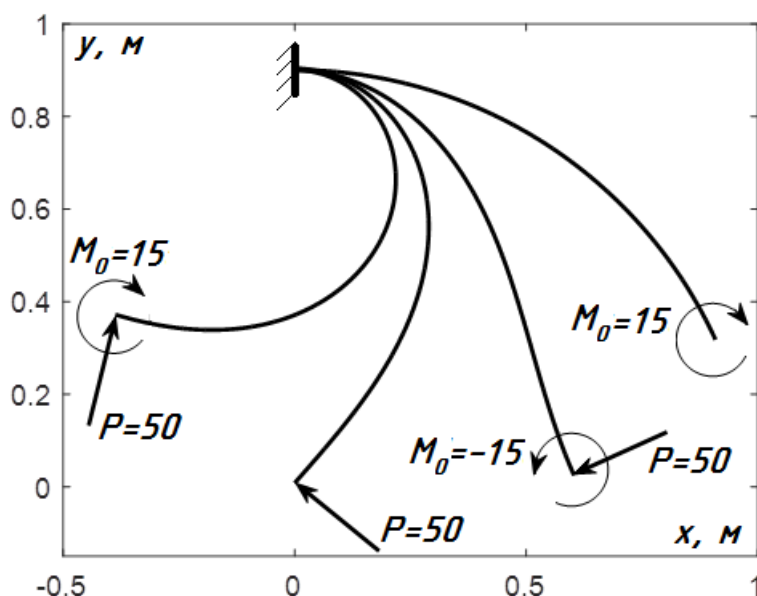


Рис. 3. Форма пружної осі металеві смуги, зігнутої внаслідок дії зосередженої сили P , сталого моменту M_0 , або ж у їх поєднанні

Після підстановки у формулу (7) значень постійних $P=50$, $EI=14,175$ і кінцеве значення змінної $s=L=1,14$, отримуємо $U=29,4 \text{ Дж}$. Можна і по іншому приблизно порахувати потенціальну енергію. Вона має дорівнювати роботі згинання смуги силою P . Всю роботу можна порахувати, як суму робіт на окремих ділянках, позначених цифрами від 1 до 5 (рис. 2,а). Шлях переміщення кінця смуги на всіх ділянках приймемо однаковим, який згідно позначок координатних осей становить приблизно $0,25 \text{ м}$. Величину сили на ділянці приймаємо середньою, наприклад, на першій ділянці вона становить 5 Н . Отже, роботу по згинанню смуги на цій ділянці можна визначити добутком сили на шлях: $5 \times 0,25 = 1,25 \text{ Дж}$. Просумувавши таким чином роботу на всіх ділянках, ми отримаємо

$A=31$ Дж. Отримане значення роботи близьке до значення потенціальної енергії.

Подальші обчислення проводилися із поєднанням сили $P=50$ Н і моменту $M_0=\pm 15$ Н·м (рис. 3). Зокрема, при $P=0$ і дії тільки одного моменту $M_0=15$ Н·м було отримано дугу кола, радіус якого можна знайти за раніше отриманою формулою $R=EI/M_0$. Згідно значень постійних величин $R=0,95$ м. Рис. 3 дає можливість спостерігати деформацію пружної осі смуги при прикладенні до її кінця тільки зосередженої сили, або тільки сталого моменту, або ж у їх поєднанні.

Розглянемо деформацію смуги під дією власної ваги. В такому випадку розподіленою силою буде вана одиниці довжини смуги:

$$q = pg, \quad (8)$$

де p – маса погонного метра смуги; $g=9,81$ м/с².

Поперечну силу знаходимо інтегруванням виразу (8):

$$Q = \int q ds = \int pg ds = pgs. \quad (9)$$

Згинання смуги спричинює момент сили від складової q , яка розташована перпендикулярно до її осі (рис. 4,а, точка B). Інша складова, що розташована в напрямі дотичної, спричинює розтяг смуги. Очевидно, що цей розтяг буде незначний, тому цією складовою сили нехтуємо. Елементарний момент від цієї сили запишеться:

$$dM = -pgs \cos \alpha ds, \quad (10)$$

де $\alpha=\alpha(s)$ – кут між дотичною до пружної осі смуги в поточній точці B і віссю Ox (рис. 4,а). Знак «мінус» відповідає положенню пружної осі в системі координат.

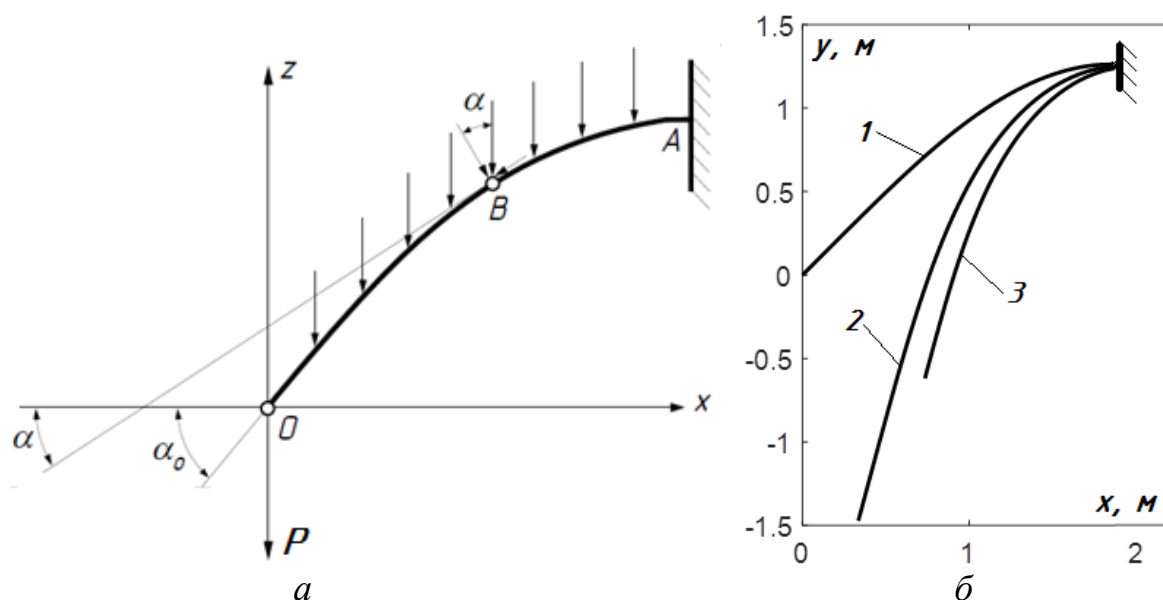


Рис. 4. Графічні ілюстрації до визначення пружної осі смуги:

- а) схема дії розподіленої ваги q ваги смуги;
- б) деформація смуги внаслідок дії розподіленої q , зосередженої P сил та при їх поєднанні

Прикладемо в кінці стержня ще і зосереджену силу P , яка теж не змінює свого напрямку під час деформації смуги. Фізичною моделлю такої сили може бути вантаж, прикріплений до смуги в точці O (рис. 4,а). Плечем цієї сили є координата x поточної точки (наприклад, точки B). Але координата x визначається із першого виразу (3), тому елементарний момент від сили P запишеться:

$$dM = -Pdx = -P \cos \alpha ds. \quad (11)$$

Таким чином, сумарний елементарний момент запишеться:

$$dM = -(P + pqs) \cos \alpha ds. \quad (12)$$

Продиференціюємо рівність (2) по змінній s і після підстановки в неї виразу (11) отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = -\frac{P + pqs}{EJ} \cos \alpha. \quad (13)$$

Рівняння (13) потрібно розв'язувати за допомогою чисельних методів. Для побудови кривої – пружної осі смуги – потрібно знайдену залежність $\alpha = \alpha(s)$ підставити у параметричні рівняння (3), обчислення яких відбувається теж за допомогою чисельних методів. На рис. 4,б представлено результати обчислень для окремих випадків. Початковими умовами інтегрування є точка, звідки починається крива, і кут α_0 (рис. 4,а). Крива, позначена цифрою 1 (рис. 4,б), побудована при $P=0$ і $p=0,71$ кг/м, тобто її форма обумовлена тільки дією сили власної ваги. Крива починається із початку координат. Для того, щоб забезпечити заданий кут $\alpha_0=45^\circ$, довжина смуги L повинна складати $L=2,3$ м. Довжину смуги при чисельному інтегруванні визначали підбором такого максимального значення $s=L$, при якому кут α ставав рівним нулеві ($\alpha=0$). Цифрою 2 позначено пружну вісь для заданого значення $\alpha_0=75^\circ$, при цьому довжина смуги $L=3,33$ м. Для наочності криву перенесено так, щоб її точка заземлення збігалася із точкою заземлення попередньої кривої. Те ж саме стосується і кривої 3, яка побудована при одночасній дії двох сил: розподіленої q і зосередженої P . При її побудові було поставлено умову: яку силу P потрібно прикласти до смуги 1 довжиною $L=2,3$ м, щоб кут α_0 зріс від 45° до 75° . Було знайдено, що це відбувається при $P=10$ Н, при цьому вага самої смуги становить 16 Н.

Висновки. До консольно закріпленої смуги можна прикладати різні види навантажень: розподілену силу, зосереджену силу, момент або їх комбінацію. Сили можуть мати сталий напрям дії, або ж змінний, залежний від деформації смуги. При деформації смуги в межах пружності її вісь описується натуральним рівнянням залежності кривини у функції довжини дуги осі від прикладених навантажень. Для складання диференціального рівняння пружної осі потрібно знайти сумарний діючий момент на смугу у функції її довжини. Перехід від натурального рівняння осі до параметричних рівнянь відбувається за допомогою відомих у

диференціальній геометрії формул переходу. Побудова здійснюється чисельним інтегруванням отриманих формул.

Література

1. *Писаренко Г.С.* Сопротивление материалов: Вища шк. Головное изд-во, 1986. 775 с.
2. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
3. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. Москва : Наука, 1986. 286 с.
4. *Зуев Д.М.* Модифицированные выражения для стрелы прогиба консоли в случае поперечной нагрузки. Космические аппараты и технологии 2020. № 1 (31), Том 4. 286 с. Режим доступа: <http://journal-niss.ru/journal/archive/31/paper4.pdf>.
5. *Харченко В.Є.* Аналітичне розв'язання нелінійної задачі згину пружного стрижня. Видавництво Львівської політехніки. 2015. № 820. С. 105–115. Режим доступа: <http://ena.lp.edu.ua:8080/bitstream/ntb/31079/1/15-105-115.pdf>.
6. *Захаров Ю.В.* Нелинейный изгиб тонких упругих стержней. ПМТФ. 2002. №5. Т. 43. С. 122–131. URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/119/119edd93c91e530634380cebe51cd8ea.pdf>
7. *Артюхин Ю.П.* Произвольный изгиб консольного стержня консервативной силой. Ученые записки Казанского университета. 2013. Том 155, кн. 2. С. 144–157. URL: https://dspace.kpfu.ru/xmlui/viewer?file=19983;155_2_phys-mat_13.pdf&sequence=-1&isAllowed=y.
8. *Захаров Ю. В.* Изгиб стержней под действием следящей нагрузки. ПМТФ. 2004. № 5. Т. 45, С. 167–175. Режим доступа: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/5e3/5e3f852fc1152d7db91748b950a1292f.pdf>
9. *Пилипака С.Ф.* Пружне згинання стержнів при значних їх прогинах. Електротехніка і механіка. 2007. № 1. С. 52–56.

References

1. Pisarenko G.S. Soprotivlenie materialov: Vishcha shk. Golovnoe izd-vo, 1986. 775 p.
2. Timoshenko S.P. Teoriya uprugosti. M.: Nauka, 1979. 560 p.
3. Popov E.P. Teoriya i raschet gibkih uprugih sterzhnej. Moskva : Nauka, 1986. 286 p.
4. Zuev D.M. Modificirovannye vyrazheniya dlya strely progiba konsoli v sluchae poperechnoj nagruzki. Kosmicheskie apparaty i tekhnologii 2020. № 1 (31), Tom 4. 286 p. URL: <http://journal-niss.ru/journal/archive/31/paper4.pdf>.

5. Harchenko V.Є. Analitichne rozv'yazannya nelinejnoї zadachi zginu pruzhnogo strizhnnya. Vidavnictvo L'vivs'koї politekhniki. 2015. № 820. P. 105–115. URL: <http://ena.lp.edu.ua:8080/bitstream/ntb/31079/1/15-105-115.pdf>.
6. Zaharov Yu.V. Nelinejnyj izgib tonkih uprugih sterzhnej. PMTF. 2002. №5. T. 43. pp. 122–131. URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/119/119edd93c91e530634380ce6e51cd8ea.pdf>
7. Artyuhin Yu.P. Proizvol'nyj izgib konsol'nogo sterzhnya konservativnoj siloj. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. 2013. Tom 155, kn. 2. pp. 144–157. URL: https://dspace.kpfu.ru/xmlui/viewer?file=19983;155_2_physmat_13.pdf&sequence=-1&isAllowed=y
8. Zaharov Yu. V. Izgib sterzhnej pod dejstviem sledyashchej nagruzki. PMTF. 2004. № 5. T. 45, P. 167–175. URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/5e3/5e3f852fc1152d7db91748b950a1292f.pdf>.
9. Pilipaka S.F. Pruzhne zginannya sterzhniv pri znachnih ih proginah. Elektrotehnika i mekhanika. 2007. № 1. pp. 52–56.

к. т. н., доцент **Кресан Т.А.**,

tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

Д. т. н., профессор **Пилипака С.Ф.**,

s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

аспирант **Хропост В.И.**,

hropost97@ukr.net ORCID 0000-0001-9363-3955

к. т. н., доцент **Бабка В.Н.**

babka.v.m@gmail.com ORCID 0000-0003-4971-4285

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

УПРУГОЕ ИЗГИБАНИЕ ПОЛОСЫ СО ЗНАЧИТЕЛЬНЫМ ПРОГИБОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ СИЛ И МОМЕНТА

Рассмотрено упругое изгибание полосы прямоугольного сечения в виде консольно закрепленного стержня. В курсе сопротивления материалов обычно рассматриваются задачи деформации балок под действием приложенных сил и моментов, допускающих незначительные прогибы. В связи с малыми угловыми перемещениями упругой линии принимается упрощенное выражение ее кривизны, и теория изгиба в таком случае носит линейный характер. При значительных прогибах стержней линейной теорией изгиба пользоваться нельзя, нужно использовать точное выражение кривизны продольной упругой оси стержня.

В статье рассмотрен изгиб полосы с малой толщиной по сравнению с шириной, примером которой может служить линейка. Предполагается, что материал полосы работает упруго по закону Гука и после прекращения действия деформирующих усилий полностью восстанавливает свою форму. За счет малой толщины полосы в плоскости изгиба по сравнению с длиной этой полосы перемещения конечной точки полосы получаются значительными. В то же время, в любом малом объеме этой полосы с линейными размерами порядка ее толщины все деформации остаются малыми. Таким образом, при малых внутренних упругих деформациях достигаются большие перемещения конца консольной полосы при ее изгибе.

Под действием приложенных сил и моментов упругая ось полосы принимает криволинейную форму, определяемую зависимостью ее кривизны от длины дуги. Согласно теории упругого изгиба кривизна полосы прямо пропорциональна приложенному моменту и обратно пропорциональна ее жесткости. Такая зависимость кривизны представляет собой натуральное уравнение кривой. В дифференциальной геометрии существуют формулы перехода от натурального уравнения кривой к параметрическим уравнениям, по которым можно построить кривую. Однако этот переход осуществить к конечному результату практически не удается из-за двойного интегрирования выражений даже для простейших случаев нагружения полосы. К примеру, при действии сосредоточенной силы на конце консоли момент имеет линейную зависимость. Кривая с линейным натуральным уравнением известна и носит название клотоида. Однако ее построение нужно производить численными методами. В работе рассмотрен этот случай в сочетании с действием приложенного момента и построена упругая ось полосы.

Ключевые слова: сила; момент силы; деформация; упругость; сгибание; кривая; длина дуги; упругая ось; жесткость.

Ph. D., assoc. prof. **Tetiana Kresan**,
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

Ph. D., prof. **Serhiy Pylypaka**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

Postgraduate Student **Vyacheslav Hropost**,
hropost97@ukr.net ORCID 0000-0001-9363-3955

Ph. D., assoc. prof. **Vitaliy Babka**
babka.v.m@gmail.com ORCID 0000-0003-4971-4285
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

ELASTIC BENDING OF A STRIP WITH A SIGNIFICANT DEFLECTION UNDER THE ACTION OF APPLIED FORCES AND MOMENT

The elastic bending of a strip of rectangular cross-section in the form of a cantilevered rod is considered. In the course of resistance of materials problems of deformation of beams under the influence of the applied forces and the moments allowing insignificant deflections are usually considered. Due to the small angular displacements of the elastic line, a simplified expression of its curvature is adopted, and the theory of bending in this case is linear. At considerable deflections of cores the linear theory of a bend cannot be used, it is necessary to use exact expression of curvature of a longitudinal elastic axis of a core.

The article considers the folding of a strip with its small thickness in comparison with the width, which can be exemplified by a ruler. It is assumed that the strip material works resiliently according to Hooke's law and after the cessation of the deforming forces completely restores its shape. Due to the small thickness of the strip in the plane of the bend in comparison with the length of this strip, the displacement of the end of the point of the strip are significant. At the same time, in any small volume of this band with linear dimensions of the order of its thickness, all deformations remain small. Thus, with small internal elastic deformations, large displacements of the end of the cantilever strip are achieved during its bending.

Under the action of applied forces and moments, the elastic axis of the strip acquires a curvilinear shape, which is determined by the dependence of its curvature on the length of the arc. According to the theory of elastic bending, the curvature of the strip is directly proportional to the applied moment and inversely proportional to its stiffness. This dependence of the curvature is a natural equation of the curve. In differential geometry, there are formulas for the transition from the natural equation of the curve to the parametric equations on which the curve can be constructed. However, this transition to the final result is almost impossible due to the double integration of expressions, even for the simplest cases of band load. For example, under the action of a concentrated force at the end of the console, the moment has a linear relationship. The curve with a linear natural equation is known and is called clothoid. However, its construction must be carried out by numerical methods. The paper considers this case in combination with the action of the applied moment and constructs the elastic axis of the strip.

Keywords: force; force moment; setting; spring power; folding; curved line; arc length; elastic line; inflexibility.