УДК 517.929
DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579x.2021.101.168-180

Печук В.Д.
pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522

к. ф.-м. н., доцент **Бондаренко Н.В.**
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Київський національний університет будівництва та архітектури

ЯВНІ ГІБРИДНІ МЕТОДИ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ

У роботі розглядаються системи диференціальних рівнянь з запізнюванням, які є математичними моделями багатьох технічних процесів з запізнюванням у часі. Побудовано явний гібридний метод п'ятого порядку збіжності для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням для змінного кроку чисельного інтегрування. Даний алгоритм розроблено на основі найбільш використовуваних явних методів Рунге-Кутти п'ятого порядку збіжності для звичайних систем диференціальних рівнянь та побудови поліномів Ньютона для передісторії моделі і формули Тейлора. Наведено основні принципи побудови таких явних гібридних методів вищих порядків збіжності. Отримана точна оцінка локальної похибки чисельного інтегрування даним методом.

Даний алгоритм дозволяє використання кроків чисельного інтегрування більших ніж величина запізнювання або процедур корегування величини кроку в залежності від похибки обчислень. Така задача чисельного інтегрування динамічних систем з запізнюванням виникає, коли проміжок часу досить великий порівняно з запізнюванням. Для чисельного інтегрування таких задач раніше застосовувались неявні неперервні методи Рунге-Кутти, що ускладнювали чисельний алгоритм, оскільки на кожному кроці чисельного інтегрування доводиться розв'язувати нелінійні системи рівнянь. Побудований нами явний гібридний метод для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням зручний для програмування, має велику швидкість підрахунку чисельного розв'язку, порівняно з неявними методами для таких моделей задач. Також даний метод не має обмежень на величину запізнювання, на відміну від гібридних методів, що використовують розклад в ряд Тейлора по запізнюванню. Отриманий метод може бути використано для побудови карт динамічних режимів, при дослідженні на регулярну та хаотичну поведінку динамічних систем з запізнюванням.

*Ключові слова**:** системи диференціальних рівнянь з запізнюванням; чисельні методи; методи Рунге-Кутти; поліноми Ньютона; екстраполяція.*

Постановка проблеми. Явище запізнювання у часі зустрічається в динамічних процесах, що описують об’єкти різної фізичної природи. Воно спостерігається як в фізико-механічних процесах, так і в біології, медицині, економіці і виявляє суттєвий вплив на стійкість і якість процесів управління. При моделюванні таких процесів з запізнюванням для опису впливу деяких факторів доводиться враховувати, що від впливу до чіткого наслідку проходить деякий проміжок часу – запізнювання. Таке запізнювання може бути обумовлене обмеженістю швидкості поширення взаємодії, наявністю інерційності деяких елементів, обмеженістю протікання технологічних процесів та інше. Факторами запізнювання не можна нехтувати в інженерних дослідженнях, як великих за розміром механічних систем так і наносистем теплообміну [1].

Динамічні процеси з запізнюванням описується диференціальним рівнянням з запізнюванням або для більш складних процесів системою диференціальних рівнянь з запізнюванням. Розв'язок систем диференціальних рівнянь з запізнюванням зазвичай знаходять чисельними методами. У випадку, коли величина запізнювання більша, ніж крок чисельного інтегрування, знаходження чисельного розв'язку систем диференціальних рівнянь з запізнюванням не викликає складності. Для цього використовують інтерполяцію передісторії моделі і чисельні методи для звичайних систем диференціальних рівнянь, наприклад, явні методи Рунге-Кутти. Застосовуючи метод кроків, отримують чисельний розв'язок на необхідний проміжок часу. Проте, якщо проміжок часу, на якому розглядається динамічна система, досить великий у порівнянні з запізнюванням, то число кроків збільшується. Це уповільнює процес чисельного інтегрування і приводить до накопичення похибки. У випадку малих за величиною запізнювань, застосовують розклад в ряд Тейлора по запізнюванню і далі розв’язують звичайну систему диференціальних рівнянь чисельним методом, наприклад, методом Рунге-Кутти. Такий підхід має обмеження на величину запізнювання і не може бути застосований для багатьох моделей задач. Тому часто доводиться застосовувати крок чисельного інтегрування більший, ніж величина запізнювання, і неперервні неявні методи Рунге-Кутти. Тоді на кожному кроці чисельного інтегрування доводиться розв'язувати системи нелінійних рівнянь, що ускладнює алгоритм розв'язку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченню розв'язків різного типу диференціальних рівнянь з запізнюванням і систем диференціальних рівнянь з запізнюванням присвячені роботи [2-10]. Але запропоновані методи знаходження розв'язку динамічних систем з запізнюванням, мають певні обмеження на величину запізнювання або складності в підрахунку числового розв'язку. Наприклад, в роботах [3] та [4] для чисельного розв’язку динамічних систем з запізнюванням використовуються неперервні неявні методи Рунге-Кутти, що приводять до необхідності розв'язання нелінійних систем на кожному кроці чисельного інтегрування. А це значно ускладнює процес програмування, збільшує час чисельних підрахунків. В роботі [5] використано методи Рунге-Кутти та розклад в ряд Тейлора по запізнюванню, що має суттєві обмеження на величину запізнювання. Явний метод Рунге-Кутти другого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням, що є модифікацією методу Рунге-Кутти другого порядку для звичайних систем диференціальних рівнянь, отримано нами в роботі [11].

Ціль статті. Ця стаття є продовженням досліджень зроблених в роботі [12]. Ми побудуємо покращений явний гібридний метод для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням п’ятого порядку збіжності, який базується на явних методах Рунге-Кутти та побудові поліномів Ньютона для передісторії моделі. Було використано явні методи Рунге-Кутти п’ятого порядку, оскільки вони є найбільш поширеними для звичайних систем диференціальних рівнянь завдяки зручності їх використання і швидкості обчислення чисельного розв’язку. Ми доведемо збіжність цього методу і зробимо оцінку локальної похибки на кожному кроці чисельного інтегрування. Завдяки застосуванню формули Тейлора на всіх стадіях підрахунку методу Рунге-Кутти, отримана краща в порівнянні з [12] точність наближення розв’язку. Ми також встановимо основні принципи побудови таких гібридних методів вищих порядків збіжності для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням.

Основна частина

1. Побудова явного гібридного методу для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням п’ятого порядку збіжності

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з запізнюванням наступного вигляду:

$$\frac{dy^J(t)}{dt} = f^J\left(t, y^1(t), ..., y^n(t), y^1(t-\tau), ..., y^n(t-\tau)\right), \tag{1}$$

$$J = 1, ..., n, \quad \tau = const > 0,$$

з початковими умовами:

$$y^J(t) = \varphi^J(t),\ t \in [t_0 - \tau,\ t_0],\ J = 1, ..., n.$$

Тут y^J - невідомі функції, f^J - деякі задані функції, φ^J - початкові функції, t_0 - початкове значення часу, τ - запізнювання аргументу, $J = 1, ..., n$.

Нехай $\varphi^J \in C^5[t_0 - \tau, t_0]$, існують і неперервні на $[t_0; T]$ всі частинні похідні до п'ятого порядку включно функцій f^J, а також φ^J і f^J узгоджені до похідних п’ятого порядку включно так, що

$$y^{J(i)}(t_0 + 0) = \varphi^{J(i)}(t_0),\ i = 0, ..., 5,\ J = 1, ..., n.$$

Тоді існує і єдиний розв’язок y^J та згідно [13]:

$$y^J \in C^5[t_0-\tau,T],\ J=1,...,n. \qquad (2)$$

Якщо в системі (1) $\tau=0$, тоді ми маємо систему без запізнювання

$$\frac{dy^J(t)}{dt}=f^J\left(t,y^1(t),...,y^n(t)\right), \qquad (3)$$

$$y^J(t_0)=\varphi^J(t_0),\quad J=1,...,n,$$

до якої застосовуються звичайні методи Рунге-Кутти [14].

Кажуть, що чисельний метод має порядок p, якщо має місце наступна нерівність для задач (1) або (3):

$$\|y(t_0+h)-y_1\|\le Kh^{p+1},$$

де K – стала, $y=\left(y^1,...,y^n\right)$, $\|y\|=\left|y^1\right|+...+\left|y^n\right|$, y_1 – шукане наближення невідомої функції y в точці t_0+h, де h – крок чисельного інтегрування.

Якщо крок чисельного інтегруванн $h\le\tau$, $h>0$, тоді чисельний розв’язок системи (1) не викликає труднощів. Для цього використовують інтерполяцію передісторії моделі і чисельні методи для звичайних систем диференціальних рівнянь (3) [11]. Але, якщо потрібно знайти чисельний розв'язок для досить великого проміжку часу, порівняно з τ, доцільно використовувати крок $h>\tau$.

Ми побудуємо для системи (1) явний гібридний метод п’ятого порядку збіжності. Нехай крок чисельного інтегрування $h>\tau$.

Оскільки $\varphi^J\in C^5[t_0-\tau,t_0]$, $J=1,...,n$, то запишемо формулу Тейлора для функції φ^J в точці $t_0-\tau$:

$$\varphi^J(t)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_i^J(t-t_0+\tau)^i+\frac{\varphi^{J(5)}(\eta)(t-t_0+\tau)^5}{5!}, \qquad (4)$$

де $\varphi_i^J=\dfrac{\varphi^{J(i)}(t_0-\tau)}{i!}$, $i=0,...,4$, $\eta\in[t_0-\tau,t_0]$, $J=1,...,n$.

Оскільки $y^J\in C^5[t_0-\tau,t_0+h-\tau]$, тоді

$$\tilde{y}^J\left(t_0+ch-\tau\right)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_i^J\left(ch\right)^i \qquad (5)$$

є наближенням четвертого порядку значення функції y^J в точці $t_0+ch-\tau$, де $t_0+h\le T$, $0\le c\le 1$.

За твердженням 2 з [11], якщо s- стадійний метод Рунге-Кутти для звичайних систем диференціальних рівнянь (3) з коефіцієнтами a_{ij},b_j [14] має порядок збіжності п'ять, то і метод

$$g_i^J = \varphi^J(t_0) + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J\left(t_0 + c_j h, g_j^1, ..., g_j^n, \tilde{y}_j^1, ..., \tilde{y}_j^n\right),$$

$$y_1^J = \varphi^J(t_0) + \sum_{j=1}^{s} b_j h f^J\left(t_0 + c_j h, g_j^1, ..., g_j^n, \tilde{y}_j^1, ..., \tilde{y}_j^n\right), \tag{6}$$

$$\tilde{y}_i^J = \sum_{j=0}^{4} \varphi_j^J (c_i h)^j, \; t_1 = t_0 + h, \;\; c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \;\; \sum_{j=1}^{s} b_j = 1,$$

$$i = 1, ..., s, \; J = 1, ..., n,$$

для систем з запізнюванням (1) має порядок збіжності п’ять на першому кроці $[t_0, t_1]$. Тут y_1^J шукане наближення невідомих функцій y^J для одного кроку чисельного інтегрування h, $J = 1, ..., n$.

Ми запишемо цей метод для деякого з наступних кроків чисельного інтегрування $[t_k, t_k + h]$. Для цього, аналогічно до роботи [12] ми отримаємо наближення четвертого порядку $\tilde{y}^J$ для кроку чисельного інтегрування $[t_k, t_k + h]$, маючи розв’язок на попередньому кроці $[t_{k-1}, t_k]$, $t_{k-1} \ge t_0$, $t_k = t_{k-1} + h$, $t_k + h \le T$, $h > \tau$.

З попереднього кроку чисельного інтегрування $[t_{k-1}, t_k]$ ми маємо значення $y_{k-1}^J = y^J(t_{k-1}), y_{-\tau}^J = y^J(t_k - \tau), y_k^J = y^J(t_k)$ і значення похідних в точках t_{k-1} та t_k: $f_{k-1}^J = f^J\left(t_{k-1}, y_{k-1}, \tilde{y}(t_{k-1} - \tau)\right)$, $f_k^J = f^J\left(t_k, y_k, y_{-\tau}\right)$, $J = 1, ..., n$.

Поліноми Ньютона значень y_{k-1}^J, $y_{-\tau}^J$, y_k^J, f_{k-1}^J, f_k^J в точках t_{k-1}, $t_k - \tau$, t_k отримані в роботі [12]:

$$N^J(t) = y_{k-1}^J + (t - t_{k-1}) f_{k-1}^J + (t - t_{k-1})^2 N_2^J + (t - t_{k-1})^2 (t - t_k + \tau) N_3^J + \\ + (t - t_{k-1})^2 (t - t_k + \tau)(t - t_k) N_4^J. \tag{7}$$

Тут $N_2^J = \dfrac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{h - \tau}$, $N_3^J = \dfrac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h^2} - \dfrac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{(h - \tau)h}$,

$$N_4^J = \frac{f_k^J - \Delta_2^J}{\tau h^2} - 2\frac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h^3} + \frac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{(h - \tau)h^2},$$

$$\Delta_1^J = \frac{y_{-\tau}^J - y_{k-1}^J}{h - \tau}, \; \Delta_2^J = \frac{y_k^J - y_{-\tau}^J}{\tau}, J = 1, ..., n.$$

Запишемо поліноми (7) по степеням $(t - t_k + \tau)$:

$$N^J(t) = \sum_{i=0}^{4} K_i^J (t - t_k + \tau)^i, \tag{8}$$

де згідно [12]:

$K_0^J = y_{-\tau}^J$;

$$K_1^J = f_{k-1}^J + 2N_2^J(h-\tau) + (h-\tau)^2 N_3^J - \tau(h-\tau)^2 N_4^J;$$
$$K_2^J = N_2^J + 2(h-\tau)N_3^J + (h-\tau)(h-3\tau)N_4^J;$$
$$K_3^J = N_3^J + (2h-3\tau)N_4^J;$$
$$K_4^J = N_4^J,\ J = 1,...,n.$$

Оскільки поліноми Ньютона (7) четвертого порядку, то вони мають порядок апроксимації чотири [15]. Таким чином, поліноми (8) співпадають з розкладами в ряд Тейлора функції y^J в точці $t_k - \tau$ до четвертого порядку малості $o\left(h^4\right)$, $J = 1,...,n$.

Отже, для чисельного розв'язку на кроці $[t_k, t_k + h]$ ми маємо необхідне наближення четвертого порядку функції y^J в точці $t_k + ch - \tau$, $0 \le c \le 1$:

$$\tilde{y}^J(t_k + ch - \tau) = \sum_{i=0}^{4} K_i^J \left(ch\right)^i,\ J = 1,...,n. \tag{9}$$

Таким чином, якщо a_{ij}, b_j – коефіцієнти будь-якого s- стадійного методу Рунге-Кутти п’ятого порядку для систем без запізнювання (3) [14], то за твердженням 2 з [11] гібридний метод для систем з запізнюванням (1)

$$\begin{gathered} g_i^J = y_k^J + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J\left(t_k + c_j h, g_j^1,...,g_j^n, \tilde{y}_j^1,...,\tilde{y}_j^n\right), \\ y_{k+1}^J = y_k^J + \sum_{j=1}^{s} b_j h f^J\left(t_k + c_j h, g_j^1,...,g_j^n, \tilde{y}_j^1,...,\tilde{y}_j^n\right), \\ \tilde{y}_i^J = \sum_{j=0}^{4} K_j^J \left(c_i h\right)^j,\ t_{k+1} = t_k + h,\ c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij},\ \sum_{j=1}^{s} b_j = 1, \\ i = 1,...,s,\ J = 1,...,n, \end{gathered} \tag{10}$$

має п’ятий порядок збіжності. Тут y_{k+1}^J - шукане наближення невідомих функцій y^J в точці $t_k + h$, $J = 1,...,n$.

Гібридний метод третього та четвертого порядків збіжності може бути отриманий аналогічно, побудувавши поліноми Ньютона другого і третього порядків відповідно. Явний метод Рунге-Кутти другого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням отриманий в роботі [11].

Побудова явного гібридного методу для систем диференціальних рівнянь більших порядків збіжності p може бути здійснена шляхом збільшення порядку наближення поліномів Ньютона (збільшення точок інтерполяції) до $p-1$ і, відповідно, використання звичайних явних методів Рунге-Кутти порядку збіжності p.

2. Оцінка локальної похибки чисельного інтегрування отриманого гібридного методу

Знайдемо точну оцінку локальної похибки чисельного інтегрування отриманого гібридного методу (6), (10).

Оскільки існують і неперервні на $[t_0;T]$ всі частинні похідні до п'ятого порядку включно функцій f^J, $J=1,...,n$, то відповідний метод Рунге-Кутти п'ятого порядку для задачі Коші без запізнюванням (3) має оцінку похибки

$$\| y(t_0+h)-y_1 \| \le Ch^6, \tag{11}$$

де $C=const$ [14].

З (2) ми маємо

$$| y^{J(5)}(t) | \le \mu^J,\ t\in[t_0;T],\ \mu^J=const,\ J=1,...,n. \tag{12}$$

Нехай $h>\tau$ (У випадку $h\le\tau$ похибки обчислення розв'язку в точках $t_0-\tau+c_ih,\ i=1,...,s$ відсутні, а похибка методу співпадає з похибкою методу Рунге-Кутти (11)).

Оскільки в даному випадку похибка наближення розв'язку в точці $t_0-\tau+c_ih$ функцій y^J (5) співпадає з похибкою розкладу в ряд Тейлора (4), то:

$$| y^J(t_0-\tau+c_ih)-\tilde{y}^J\left(t_0-\tau+c_ih\right) | \le \frac{\mu^J}{5!}\left(c_ih\right)^5,\ J=1,...,n,\ i=1...s.$$

Оскільки $0\le c_i\le 1$, то

$$\| y(t_0-\tau+c_ih)-\tilde{y}\left(t_0-\tau+c_ih\right) \| \le \frac{\|\mu\|}{5!}h^5,\ i=1,...,s. \tag{13}$$

З (11), (13) та доведення твердження 2 з роботи [11] маємо для задачі Коші з запізнюванням (1):

$$\| y(t_0+h)-y_1 \| \le \left(C+n\sum_{j=1}^{s}|b_j|L\frac{\|\mu\|}{5!}\right)h^6, \tag{14}$$

де L - найбільша з констант Ліпшиця для функцій f^J, $J=1,...,n$.

Розглянемо локальну похибку на наступних кроках чисельного інтегрування $[t_k,t_k+h]$. Для цього вважатимемо, що поліноми $N^J(t)$ (7) побудовані по точним значенням y_{k-1}^J, $y_{-\tau}^J$, y_k^J, f_{k-1}^J, f_k^J з минулого кроку чисельного інтегрування $[t_{k-1},t_k]$. Тоді згідно [15]:

$$y^J(t)-N^J(t)=\frac{y^{J(5)}(\xi)}{5!}(t-t_{k-1})^2(t-t_k+\tau)(t-t_k)^2, \tag{15}$$

де $\xi\in[t_k-\tau,t_k+h-\tau]$, $J=1,...,n$.

Нехай $h>\tau$ (Якщо $h<\tau$, то обчислення похибки $\tilde{y}^J\left(t_k-\tau+c_ih\right),\ i=1,...,s$ співпадає з похибкою інтерполяції передісторії моделі поліномами Ньютона (7). В цьому випадку справедливі формули аналогічні до (13) та (14)).

Тоді з (15) маємо:

$$y^J(t_k-\tau)-N^J(t_k-\tau)=0, \tag{16}$$

$$y^{J(1)}(t)-N^{J(1)}(t)=$$

$$=\frac{y^{J(5)}(\xi)}{5!}\Big((t-t_{k-1})^2(t-t_k)^2+2(t-t_{k-1})(t-t_k)(2t-t_{k-1}-t_k)(t-t_k+\tau)\Big).$$

Розглядаючи $0\le\tau<h$, ми отримаємо:

$$|\,y^{J(1)}(t_k-\tau)-N^{J(1)}(t_k-\tau)\,|=\frac{|\,y^{J(5)}(\xi)\,|}{5!}(h-\tau)^2\tau^2\le\frac{\mu^J h^4}{16\cdot 5!}. \tag{17}$$

$$y^{J(2)}(t)-N^{J(2)}(t)=\frac{y^{(5)}(\xi)}{5!}2\Big(2(t-t_{k-1})(t-t_k)(3t-2t_k-t_{k-1}+\tau)+$$

$$+(2t-t_{k-1}-t_k)^2(t-t_k+\tau)\Big),$$

$$|\,y^{J(2)}(t_k-\tau)-N^{J(2)}(t_k-\tau)\,|=\frac{|\,y^{(5)}(\xi)\,|}{5!}4\,|\,(h-\tau)\tau(h-2\tau)\,|\le\frac{\mu^J h^3}{5!}. \tag{18}$$

$$y^{J(3)}(t)-N^{J(3)}(t)=\frac{|\,y^{(5)}(\xi)\,|}{5!}2\Big(2(2t-t_{k-1}-t_k)(5t-4t_k-t_{k-1}+3\tau)+$$

$$+6(t-t_{k-1})(t-t_k)+(2t-t_{k-1}-t_k)^2\Big),$$

$$|\,y^{J(3)}(t_k-\tau)-N^{J(3)}(t_k-\tau)\,|=\frac{|\,y^{(5)}(\xi)\,|}{5!}6\Big((h-2\tau)^2-2\tau(h-r)\Big)\le\frac{\mu^J 6h^2}{5!}. \tag{19}$$

$$y^{J(4)}(t)-N^{J(4)}(t)=24(5t-3t_k-2t_{k-1}+3\tau)\frac{y^{(5)}(\xi)}{5!},$$

$$|\,y^{J(4)}(t_k-\tau)-N^{J(4)}(t_k-\tau)\,|=\frac{y^5(\xi)}{5!}48\,|\,h-2\tau\,|<\frac{48\mu^J h}{5!}. \tag{20}$$

Тут $J=1,\ldots,n$.

З (16)-(19) для похибки $\tilde{y}^J\left(t_k-\tau+c_ih\right)$ (9) маємо:

$$\left|y^J(t_k-\tau+c_ih)-\tilde{y}^J\left(t_k-\tau+c_ih\right)\right|=$$

$$\left|\sum_{j=0}^{4}\frac{y^{J(j)}(t_k-\tau)}{j!}\left(c_ih\right)^j+\frac{y^{J(5)}(\zeta)\left(c_ih\right)^5}{5!}-\sum_{j=0}^{4}\frac{N^{J(j)}(t_k-\tau)}{j!}\left(c_ih\right)^j\right|\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{4}\frac{|\,y^{J(j)}(t_k-\tau)-N^{J(j)}(t_k-\tau)\,|}{j!}\left(c_ih\right)^j+\frac{\mu^J\left(c_ih\right)^5}{5!}<\frac{41\mu^J h^5}{16\cdot 5!},$$

де $\zeta \in [t_k - \tau, t_k + h - \tau]$, $J = 1,...,n,\ i = 1,...,s$.

Звідси, маємо

$$\| y(t_k - \tau + c_i h) - \tilde{y}\left(t_k - \tau + c_i h\right) \| \le \frac{41\|\mu\| h^5}{16 \cdot 5!},\ \ i = 1,...,s.$$

Відповідно до доведення твердження 2 з [11] та оцінки (11) маємо:

$$\| y(t_k + h) - y_{k+1} \| \le \left(C + n\sum_{j=1}^{s} | b_j | L \frac{41\|\mu\|}{16 \cdot 5!} \right) h^6. \tag{21}$$

Формули (14), (21) дають точну оцінку локальної похибки на першому та наступних кроках чисельного інтегрування за цим гібридним методом і доводять, що ми маємо наближення п’ятого порядку збіжності.

Висновки та перспективи. Таким чином, ми побудували явний гібридний метод для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням для кроку чисельного інтегрування більшого за запізнювання. Для цього достатньо записати поліноми Ньютона необхідного порядку по підрахованим наближенням та отримати розклад за формулою Тейлора для наближення на наступний крок чисельного інтегрування. Ці ж поліноми Ньютона можна використовувати для випадку кроку чисельного інтегрування меншого за запізнювання.

Отриманий таким чином явний гібридний метод п’ятого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням, наприклад, з коефіцієнтами Кутти-Нюстрема [14] або коефіцієнтами методу Дормана-Принса, з оцінкою похибки чисельного інтегрування, підходить для дослідження актуальних на даний момент систем з запізнюванням на досить великі, порівняно з запізнюванням, проміжки часу.

Отримані в роботі результати можуть бути використані для вивчення різних типів систем диференціальних рівнянь з запізнюванням та побудови для таких систем явних гібридних методів більших порядків. Цей метод може бути використаний для побудови карт динамічних режимів при вивченні регулярної та хаотичної поведінки динамічних систем з запізнюванням.

Література

1. *Kyrychko Y.N., Hogan S.J.* On the use of delay equations in engineering applications. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 16 (7–8), 2010, P. 943 – 960.

2. *Gu K., Niculesc S.I.* Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. *ASME J Dyn Syst-T*, V. 125, 2003, P. 158–165.

3. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical Methods for Delay Differential Equations, *Clarendon Press Oxford*, 2003.

4. *Gimeno J., Alquezar I.* On time Delay Deferential Equations, Final project thesis master of advanced mathematics facultat de matematiques universitat de Barcelona, 2015.

5. *Siregar B.H., Rangkuti Y.R., Mansyur A.* Numerical Solution of Delayed SIR Model of Tuberculosis with Combination of Runge Kutta Method and Taylor Series Approach. *Proceedings of The 5th Annual International Seminar on Trends in Science and Science Education,* AISTSSE 2018, 18-19 October 2018, Medan, Indonesia.

6. *Cimen E., Uncu S.* On the Solution of the Delay Differential Equation via Laplace Transform. *Communications in Mathematics and Applications*, Vol. 13, No. 3, 2020, P. 284–304.

7. *Guglielmi N, Hairer E.* Computing breaking points in implicit delay differential equations. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 29 (3), 2008, P. 229-247.

8. *Ibrahim F., Salama A.A., Quazzi A, Turek S.* Extended One-Step Methods for Solving Delay-Differential Equations. *Applied Mathematics & Information Sciences*, Vol. 8 (7), 2014, P. 941-948.

9. *Jaaffar N.T., Majid Z.A., Senu N.* Numerical Approach for Solving Delay Differential Equations with Boundary Conditions, *MDPI Mathematics*, V. 8, 2020, P. 1-18.

10. *Rebenda J., Smarda Z.* Numerical algorithm for nonlinear delayed differential systems of nth order. *Advances in Difference Equations,* Vol. 26, 2019, P. 1-16.

11. *Бондаренко Н.В., Печук В.Д.* Моделювання динамічних систем з запізнюванням за допомогою узагальнених методів Рунге-Кутти. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, 2019. Випуск 96, С. 3-11.

12. *Бондаренко Н.В., Печук В.Д.* Побудова явних методів Рунге-Кутти для моделювання динамічних систем з запізнюванням. Прикладна геометрія та інженерна графіка, 2020. Випуск 99, С. 16-23.

13. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296с.

14. *E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner* Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2nd ed., *in Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag*, 528 p., 1993.

15. *Ильин М.И.* Аппроксимация и интерполяция. Методы и приложения. Учебное пособие, Рязань, 2010. 56 с.

Reference

1. *Kyrychko Y.N., Hogan S.J.* On the use of delay equations in engineering applications. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 16 (7–8), 2010, P. 943 – 960. *{in English}*

2. *Gu K., Niculesc S.I.* Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. *ASME J Dyn Syst-T,* V. 125, 2003, P. 158–165. *{in English}*

3. *Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations, Clarendon Press Oxford, 2003.* {in English}

4. *Gimeno J., Alquezar I. On* time Delay Deferential Equations, *Final project thesis master of advanced mathematics facultat de matematiques universitat de Barcelona, 2015. {in English}*

5. *Siregar B.H., Rangkuti Y.R., Mansyur A.* Numerical Solution of Delayed SIR Model of Tuberculosis with Combination of Runge Kutta Method and Taylor Series Approach. *Proceedings of The 5th Annual International Seminar on Trends in Science and Science Education,* AISTSSE 2018, 18-19 October 2018, Medan, Indonesia. *{in English}*

6. *Cimen E., Uncu S. On the Solution of the Delay* Differential Equation via Laplace Transform. *Communications in Mathematics and Applications,* Vol. 13, No. 3, 2020, P. 284–304. *{in English}*

7. *Guglielmi N, Hairer E.* Computing breaking points in implicit delay differential equations. *Advances in Computational Mathematics,* Vol. 29 (3), 2008, P. 229-247. *{in English}*

8. *Ibrahim F., Salama A.A., Quazzi A, Turek S.* Extended One-Step Methods for Solving Delay-Differential Equations. *Applied Mathematics & Information Sciences,* Vol. 8 (7), 2014, P. 941-948. *{in English}*

9. *Jaaffar N.T., Majid Z.A., Senu N.* Numerical Approach for Solving Delay Differential Equations with Boundary Conditions, *MDPI Mathematics,* V. 8, 2020, P. 1-18. *{in English}*

10. *Rebenda J., Smarda Z.* Numerical algorithm for nonlinear delayed differential systems of nth order. *Advances in Difference Equations,* Vol. 26, 2019, P. 1-16. *{in English}*

11. *Bondarenko N.V., Pechuk V.D.* Modeliuvannia dynamichnykh system z zapizniuvanniam za dopomohoiu uzahalnenykh metodiv Runhe-Kutty. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika,* 2019. Vypusk 96, S. 3-11. *{in Ukranian}*

12. *Bondarenko N.V., Pechuk V.D.* Pobudova yavnykh metodiv Runhe-Kutty dlia modeliuvannia dynamichnykh system z zapizniuvanniam. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 2020. Vypusk 99, S. 16-23. *{in Ukranian}*

13. *El'sgol'c L.E., Norkin S.B.* Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom. M.: Nauka, 1971. 296s. *{in Russian}*

14. *Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I*: Nonstiff Problems, 2nd ed., in Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag,* 528 p., 1993. *{in English}*

15. *Il'in M.I. Approksimaciya i interpolyaciya.* Metody i prilozheniya. Uchebnoe posobie, Ryazan', 2010. 56 s. *{in Russian}*

Печук В. Д.
pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
к. ф.-м. н., доцент **Бондаренко Н. В.**
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ЯВНЫЕ ГИБРИДНЫЕ МЕТОДЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА СХОДИМОСТИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, которые являются математическими моделями многих технических процессов с запаздыванием во времени. Построен явный гибридный метод пятого порядка сходимости для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием для изменяемого шага численного интегрирования. Данный алгоритм разработан на основе наиболее используемых явных методов Рунге-Кутты пятого порядка сходимости для обычных систем дифференциальных уравнений и построения полиномов Ньютона для предистории модели и формулы Тейлора. Приведены основные принципы построения таких явных гибридных методов высших порядков сходимости. Полученная точная оценка локальной погрешности численного интегрирования данным методом.

Данный алгоритм позволяет использование шагов численного интегрирования больших чем величина запаздывания или процедур корректировки величины шага в зависимости от погрешности вычислений. Такая задача численного интегрирования динамических систем с запаздыванием возникает, когда промежуток времени достаточно большой по сравнению с запаздыванием. Для численного интегрирования таких задач ранее применялись неявные непрерывные методы Рунге-Кутты, что усложняли численный алгоритм, поскольку на каждом шагу численного интегрирования приходится решать нелинейные системы уравнений. Построенный нами явный гибридный метод для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием удобный для программирования, имеет большую скорость подсчета численного решения, по сравнению с неявными методами для таких моделей задач. Также данный метод не имеет ограничений на величину запаздывания, в отличие от гибридных методов, использующих разложение в ряд Тейлора по запаздыванию. Полученный метод может быть использован для построения карт динамических режимов, при исследовании на регулярное и хаотическое поведение динамических систем с запаздыванием.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с запаздыванием; численные методы; методы Рунге-Кутты; полиномы Ньютона; экстраполяция.

Vasiliy Pechuk
pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
Ph.D., assoc. prof. **Nataliya Bondarenko**,
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA)

EXPLICIT FIFTH-ORDER HYBRID METHODS FOR DYNAMICAL SYSTEMS WITH DELAY

In the paper we consider the systems of delay differential equations, which are mathematical models of many technical processes with delay in time. An explicit fifth-order hybrid method for systems of delay differential equations for the variable step of numerical integration is constructed. This algorithm is based on the most commonly used explicit fifth-order Runge-Kutta methods for ordinary systems of differential equations and the construction of Newton polynomials for the prehistory of the model and Taylor formula. The basic principles of construction of such explicit hybrid methods of higher orders of convergence are given. An accurate estimate of the local error of numerical integration by this method is obtained.

This algorithm allows the use of numerical integration steps greater than the magnitude of the delay or procedures for adjusting the magnitude of the step depending on the calculation error. Such a problem of numerical integration of time-delay dynamical systems occurs when the time interval is large enough compared to the delay. Implicit continuous Runge-Kutta methods were previously used for numerical integration such problems, which complicated the numerical algorithm, because nonlinear systems of equations have to be solved at each step of numerical integration. The explicit hybrid method constructed by us for systems of delay differential equations is convenient for programming, has a high speed of calculation of numerical solution, in comparison with implicit methods for such models of problems. Also, this method has no restrictions on the magnitude of the delay, in contrast to the hybrid methods with decomposition in Taylor series for delay. The method obtained by us can be used to construct maps of dynamic modes in the study of regular and chaotic behavior of time-delay dynamical systems.

Key words: Time-delay systems of differential equations; numerical methods; Runge-Kutta methods; Newton polynomials; Taylor formula; extrapolation.