УДК 519.21
DOI: 10.32347/0131–579x.2022.102.84–99 к. ф-м. н. доцент **Наголкіна З.І.**,
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
к. ф-м. н. доцент **Філонов Ю.П.**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
Київський національний університет будівництва і архітектури

СХЕМА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ ДЛЯ СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ВІНЕРІВСЬКИМИ ПРОЦЕСАМИ

В даній роботі розглядається стохастичне диференціальне рівняння з двома незалежними вінерівськими процесами в нескінченновимірному гільбертовому просторі. Це рівняння може слугувати математичною моделлю динамічної системи при наявності кількох незалежних збурюючих випадкових факторів. Для дослідження властивостей цього рівняння використовується метод мультиплікативних представлень Далецького-Троттера. Цей метод застосовується як для детермінованих, так і для стохастичних рівнянь. Метод полягає в наступному: будують розбиття відрізку існування розв'язку $[t_0, T]$ *на елементарні* $[t_{k+1}, t_k]$*. На кожному елементарному відрізку розглядають еволюційний розрішаючий оператор повного рівняння* $S(t_{k+1}, t_k)$*, а також добуток розрішаючих операторів рівнянь, які є фрагментами повного рівняння* $U_k=Q_k\times S_{1k}\times S_{2k}$

Таким чином порівнюють дві мультиплікативні сім'ї, які складаються з різних розрішаючих операторів. При виконанні умов еквівалентності, які перевірені в даній роботі, можна стверджувати, що розв'язок стохастичного рівняння в деякому розумінні можна представити як композицію відповідних розв'язків диференціальних рівнянь на елементарних відрізках, праві частини яких є знесення, і відповідно дифузії.

Причому для запровадження такої мультиплікативної схеми у випадку кількох незалежних вінерівських процесів треба накласти додаткові вимоги щодо коефіцієнтів дифузії. А саме: коефіцієнти дифузії мають бути комутуючими операторами, неперервними за часом.

Схема мультиплікативних представлень базується на дослідженні властивостей еволюційних сімей розрішаючих операторів, а також їх оцінок в нормах відповідних просторів. При цьому для одержання певної оцінки розглядають кілька кроків ітерацій для відповідних рівнянь в гільбертовому просторі. Слід зазначити, що схема мультиплікативних

представлень може бути інтерпретована як схема отримання наближеного розв'язку.

Ключові слова: Вінерівський процес; умовне математичне сподівання; гільбертів простір; імовірнісний простір; потік подій; диференціальне рівняння; стохастичне рівняння; розв'язок; умови існування; неперервність; оператор; розрішаючий оператор; норма; математичне сподівання; нерівність Коші; еволюційна сім'я; мультиплікативне представлення; випадкові процеси; середнє квадратичне відхилення.

Постановка проблеми.

В статті розглядається схема мультиплікативних представлень, яка застосовується для дослідження стохастичного диференціального рівняння в формі Іто з двома незалежними вінерівськими процесами. Таке рівняння може теоретично обґрунтовувати врахування в математичній моделі вплив декількох незалежних випадкових факторів.

Ціль статті.

Для дослідження властивостей і оцінок розв'язку розглядуваного стохастичного диференціального рівняння застосована схема мультиплікативних представлень Далецького-Троттера. Це дає змогу більш якісного дослідження розв'язків рівняння. Також запроваджена схема дає можливість отримувати наближені розв'язки такого рівняння, як добуток розв'язків більш простих рівнянь.

Аналіз основних досліджень і публікацій.

Схема мультиплікативних представлень Далецького-Троттера, яка застосовується в даній роботі, спочатку була винайдена для детермінованих рівнянь в [1]. А в роботах [2], [3] перенесена на випадок стохастичних рівнянь в банаховому і гільбертовому просторі. В [5] цей метод проілюстровано в якості апроксимації нелінійного рівняння. Застосування схеми в нескінченновимірному функціональному просторі дає змогу досліджувати диференціальні стохастичні рівняння, для яких коефіцієнт знесення є необмеженим оператором.

Основна частина.

Розглянемо динамічну систему, яка знаходиться під впливом кількох незалежних випадкових факторів. Поведінку такої системи можливо моделювати стохастичним диференціальним рівнянням Іто з кількома незалежними вінерівськими процесами в нескінченновимірному функціональному просторі. При виконанні певних умов на коефіцієнти цього рівняння існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок рівняння. Схема мультиплікативних представлень Далецького-Троттера дає можливість поліпшити дослідження розв'язку цього рівняння, а також побудувати його наближений розв'язок, як добуток розв'язків більш простих рівнянь [5]. У випадку стохастичного рівняння з кількома вінерівськими процесами на коефіцієнти дифузії слід накласти ще додаткові умови. Проте вони мають сенс тільки при побудові мультиплікативного представлення. Для цього будують розбиття відрізку існування розв'язку на елементарні. На кожному елементарному відрізку розглядають окремо диференціальні рівняння, праві частини яких є коефіцієнтами знесення і дифузії.

Мультиплікативна композиція розв'язків цих спрощених рівнянь і є наближеним розв'язком повного стохастичного диференціального рівняння. При цьому застосовуються властивості еволюційної сім'ї операторів, які є розрішаючими операторами для всього рівняння і для окремих спрощених рівнянь.

Застосування розрішаючих операторів дає змогу досліджувати стохастичні диференціальні рівняння з необмеженим оператором знесення. Ці рівняння можна інтерпретувати як рівняння в частинних похідних з випадковим збуренням.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння в формі Іто вигляду

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} b_i(s)x(s)dw_i s). \qquad (1)$$

де m – скінченне. Сформулюємо умови на коефіцієнти цього рівняння, при яких розв'язок (1) допускає мультиплікативне представлення, тобто, його можна розщепити на співмножники, які відповідають знесенню та різним вінерівським процесам. Розглянемо таку конструкцію при m=2. Тоді рівняння (1) має вигляд

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} b_1(s)(x(s)dw_1 s) + \int_{t_0}^{t} b_2(s)(x(s)dw_2 s) \qquad (2)$$

Нехай H – гільбертів простір, (Ω, F, P) – імовірнісний простір, F_t-потік σ- подалгебр σ- алгебри F , стандартним чином узгоджений з вінерівськими процесами. В даному випадку $F_t = F_t^1 \cup F_t^2$:

$$F_t^1 = \sigma\{x_{0,} w_1(s), \qquad t_0 \le s \le t\}$$

$$F_t^2 = \sigma\{x_{0,} w_2(s), \qquad t_0 \le s \le t\}$$

Теорема. Нехай коефіцієнти $a(s), b_i(s), (i = 1{,}2)$ рівняння (2) відповідно лінійні і білінійні операторнозначні функції зі значеннями відповідно в $H, \wp_2(H)$ (де $\wp_2(H)$ - простір операторів Гільберта-Шмідта) – задовольняють умовам теореми існування і єдності сильних розв'язків стохастичного рівняння Іто [4],

$$\|a(s)x\|^2 + \sigma^2(b_1(s)x) + \sigma^2(b_2(s)x) \le k_1 \|x\|^2 \tag{3}$$

де b_1, b_2 –оператори Гільберта - Шмідта з нормою

$$\sigma_2^2(b_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\|b_1\varphi_j\right\|^2,\ \sigma_2^2(b_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \|b_2\varphi_m\|^2$$

$\{\varphi_{j,m}\}_{j,m=1}^{\infty}$ – ортонормований базис в H.

і нехай $b_i(s)$ - $F_s^i (i = 1,2)$ – вимірні, попарно комутують і неперервні по s,

$$\sigma_1^2\,(b_1(s) - b_1(\tau)) + \sigma_2^2(b_2(s) - b_2(\tau)) \le k_2|s - \tau|^{\varepsilon}. \tag{4}$$

тоді має місце наступне мультиплікативне представлення розв'язку $x(t)$ (2)

$$U_q x_0 = \prod_{k=0}^{n} Q_k \cdot S_{1k} \cdot S_{2k} x_0 \tag{5}$$

де – $Q_k = Q(t_{k+1}, t_k)$, $S_{1k} = S_1(t_{k+1}, t_k)$, $S_{2k} = S_2(t_{k+1}, t_k)$ - еволюційні сім'ї відповідних розрішаючих операторів рівнянь. Розрішаючі оператори породжуються розв'язками цих рівнянь відповідно за наведеними формулами

$$x(t) = x_k + \int_{t_k}^{t} a(s)x(s)ds$$

$$x\,(t) = Q(t, t_k)x_k,\ t \in [t_{k,} t_{k+1}] \tag{6}$$

$$x_1\,(t) = x_{1k} + \int_{t_k}^{t} b_1(s)(x_1(s)dw_1 s)$$

$$x_1\,(t) = S_1(t, t_k)x_{1k},\ t \in [t_{k,} t_{k+1}] \tag{7}$$

$$x_2\,(t) = x_{2k} + \int_{t_k}^{t} b_2(s)(x_2(s)dw_2 s)$$

$$x_2\,(t) = S_2(t, t_k)x_{2k},\ t \in [t_{k,} t_{k+1}] \tag{8}$$

Представлення (5) називають мультиплікативним представленням Далецького-Троттера.

Доведення теореми базується на лемі про еквівалентність мультиплікативних сімей операторів і детально доведена в [3]. Для кращого розуміння ситуації наведемо лему без доведення.

Розглянемо $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ – гільбертів простір випадкових величин зі значеннями в H і скінченними моментами другого порядку і нормою $\langle x \rangle$ =$\{\mathrm{E}\|x\|_H^2\}^{1/2}$. Позначимо $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{H}$ сукупність елементів $L_2(\Omega)$, які є F_t – вимірними величинами. Розглянемо двопараметричну стохастичну сім'ю операторів $U(t,\tau)$. Введемо $M_{[t_0,T]}$ клас стохастичних сімей $U(t,\tau)$, які задовольняють умовам:

$$U(t,\tau)\colon\ \mathcal{H}_\tau \to\ \mathcal{H}_t$$

$$\mathrm{E}_\tau\|U(t,\tau)x\|_H^2 \le c\|x\|^2$$

Стохастична сім'я відображень (операторів) називається еволюційною, якщо

$$S(t,\tau)S(\tau,s)x = S(t,s)x$$

$S(t,t)x = x,$ де $x\epsilon\mathcal{H}_\tau$,$\tau\epsilon[s,t]$.

Нехай $q\colon t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots . t_{n+1} = T$ довільне розбиття відрізку $[t_0,T]$ на елементарні $\Delta_k t = t_{k+1} - t_k$.

Тоді
$U_q(T,t_0)x$=$U(t_{n+1},t_n)U(t_n,t_{n-1}) \ldots . . U(t_1,t_0)x$=$\prod_{k=0}^{n} U(t_{k+1},t_k)\, x$.

<u>Лема</u>. Нехай U_q, S_q дві мультиплікативні сім'ї стохастичних відображень, які задовольняють умовам:

$$U_q \in M_{[t_0,T]}$$

$$E_k\|S(t_{k+1},t_k)x - S(t_{k+1},t_k)y\|^2 \le e^{\alpha_1 \Delta_k t}\|x-y\|^2 \tag{9}$$

$$E_k\|U(t_{k+1},t_k)x - S(t_{k+1},t_k)x\|^2 \le \alpha_2\varepsilon(\Delta_k t)|\Delta_k t|^2 \tag{10}$$

Тоді, якщо існує

$$P - \lim_q U_q(t,t_0)x = U(t,t_0)x,$$

- то існує і $P - \lim_q S_q(t,t_0)x$ =$\mathrm{S}(t,t_0)x$, а також вони співпадають з точністю до стохастичної еквівалентності $U(t,t_0)x = \mathrm{S}(t,t_0)x$. Для доведення цієї лемі, згідно з нерівністю Чебишева в відповідному просторі розглядається оцінка

$$E\left\|U_q(T,t_0)x - S_q(t,t_0)x\right\|^2 = E\|\textstyle\prod_{k=0}^{n} U(t_{k+1},t_k)\,x - \prod_{k=0}^{n} S(t_{k+1},t_k)\,x\|^2.$$

Користуючись властивостями умовних математичних сподівань можна отримати відповідно необхідні оцінки (8),(9).

$S(t,t_k)$, $Q(t,t_k)$, $S_1(t,t_k)$, $S_2(t,t_k)$ – відповідні сім'ї розрішаючих операторів що породжені розв'язками відповідно рівнянь (2), (6),(7),(8) на відрізку $t\epsilon[t_k,t_{k+1}]$.

Доведення теореми. Для доведення теореми треба перевірити виконання умов (9) та (10) для стохастичних сімей операторів. Будемо вважати, що в позначеннях леми:

$$U(t_{k+1}, t_k)x = Q(t_{k+1}, t_k)S_1(t_{k+1}, t_k)S_2(t_{k+1}, t_k)x$$

Операторна сім'я $S(t, t_k)$ є еволюційною і породжується єдиним розв'язком рівняння (2) за формулою

$$S(t, t_k)x_k = x_k + \int_{t_k}^{t} a(s)S(s, t_k)x_k ds + \int_{t_k}^{t} b_1(s)(S(s, t_k)x_k, dw_1 s)) + \int_{t_k}^{t} b_2(s)(S(s, t_k)x_k, dw_2(s)),$$

$$x(t) = S(t, t_k)x_k, \qquad x_k = x(t_k) \qquad (11)$$

Застосовуючи нерівність Гронуола до оцінки норми в H

$$E_k\|S(t_{k+1}, t_k)x_k\|^2{}_H = E_k(S(t_{k+1}, t_k)x_k, S(t_{k+1}, t_k)x_k) \leq$$
$$E_k\|x_k\|^2 + E_k\left\|\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s)S(s, t_k)x_k ds\right\|^2 +$$
$$E_k\left\|\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s)(S(s, t_k)x_k, dw_1 s))\right\|^2 +$$
$$E_k\left\|\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s)(S(s, t_k)x_k, dw_1 s))\right\|^2 \leq$$
$$E_k\|x_k\|^2 + (k_1\Delta_k t + k_1)\int_{t_k}^{t_{k+1}} E_k\|S(s, t_k)x_k\|^2 ds$$

$$E_k\|S(t_{k+1}, t_k)x_k\|^2{}_H \leq E_k\|x_k\|^2 + (k_1\Delta_k t + k_1)\int_{t_k}^{t_{k+1}} E_k\|S(s, t_k)x_k\|^2 ds$$

$$E_k\|S(t_{k+1}, t_k)x_k\|^2{}_H \leq E_k\|x_k\|^2 e^{(k_1\Delta_k t + k_1)\Delta_k t} \leq E_k\|x_k\|^2 e^{c\Delta_k t}$$

(*Лема Гронуола.*

Нехай $m(t), t \in [0, T]$ *невід'ємна функція, яка задовольняє співвідношенню:*

$$m(t) \leq C + \alpha \int_0^T m(s)ds\,\text{т},$$

де C, $\alpha > 0$. *Тоді при* $t \in [0, T]$

$$m(t) \leq Ce^{\alpha t}.)$$

Отримуємо оцінку

$$E_k\|S(t_{k+1}, t_k)x - S(t_{k+1}, t_k)y\|^2 \leq e^{\alpha_1 \Delta_k t}\|x - y\|^2,$$

де $\alpha_1 > 0$ стала, яка залежить від k_1, i $\Delta_k t$.

Таким чином, треба встановити виконання оцінки (10), а саме доведемо, що

$$\Delta = E_k \| S(t_{k+1}, t_k)x_k - Q(t_{k+1}, t_k) S_1(t_{k+1}, t_k) S_2(t_{k+1}, t_k) x_k \|^2 \le \varepsilon(\Delta_k t) | \Delta_k t|^2$$

На відміну від стохастичного диференціального рівняння стандартного вигляду [4] з одним вінерівським доданком, для можливості розщепити рівняння на компоненти, необхідно виконання додаткових умов – неперервності, комутативності коефіцієнтів $b_i(s)$, які є лінійними операторами Гільберта- Шмідта в H. Для оцінки цієї різниці Δ візьмемо ще одну ітерацію рівняння (11) для $S(t_{k+1}, t_k)$:

$$S(t_{k+1}, t_k)x_k = x_k +$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s)(x_k + \int_{t_k}^{s} a(\tau)S(\tau, t_k)x_k d\tau + \int_{t_k}^{s} b_1(\tau)(S(\tau, t_k)x_k, dw_1(\tau)\, ds +$$

$$\int_{t_k}^{s} b_2(\tau)(S(\tau, t_k)x_k, dw_2(\tau))\, ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s)(\, x_k$$

$$+ \int_{t_k}^{s} a(\tau)S(\tau, t_k)x_k d\tau + \int_{t_k}^{s} b_1(\tau)(S(\tau, t_k)x_k, dw_1(\tau))$$

$$+ \int_{t_k}^{s} b_2(\tau)(S(\tau, t_k)x_k, dw_2(\tau)), dw_1(s)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s)(\, x_k$$

$$+ \int_{t_k}^{s} a(\tau)S(\tau, t_k)x_k d\tau + \int_{t_k}^{s} b_1(\tau)(S(\tau, t_k)x_k, dw_1(\tau) +$$

$$\int_{t_k}^{s} b_2(\tau)(S(\tau, t_k)x_k, dw_2(\tau)), dw_2(s)). \qquad (12)$$

Якщо оцінити всі доданки суми (12), то її можна розбити на дві частини, а саме

$$S(t_{k+1}, t_k)x_k = J_1 + R_1, \text{ де}$$

$$J_1 = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s)\, x_k ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s)\, x_k dw_1(s) +$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s)\, x_k dw_2(s) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau)x_k\, dw_1(\tau), dw_1(s)$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s) \int_{t_k}^{s} b_2(\tau)x_k\, dw_2(\tau), dw_2(s)$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s) \int_{t_k}^{s} b_2(\tau)x_k\, dw_2(\tau) dw_1(s) +$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau)x_k\, dw_1(\tau) dw_2(s)$$

де R_1 позначена сума скінченної кількості доданків, умовне математичне сподівання від квадрата норми кожного з яких не перевищує $C\, (\Delta_k t)^{2+\varepsilon}$, де C залежить від k_1 , $\Delta_k t$.

Дійсно, покажемо це на прикладі оцінки доданку типу

$$\mathrm{I}= E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s)(\int_{t_k}^{s} a(\tau)S(\tau,t_k)x_k d\tau, dw_1 s)) \right\|^2 =$$
$$E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s) \int_{t_k}^{s} a(\tau)S(\tau,t_k)x_k d\tau dw_1(s) \right\|^2$$

Оскільки $b_1(s), a(s)$ і S(s,t_k) обмежені в відповідних нормах, то

$$I \le \int_{t_k}^{t_{k+1}} E_k \sigma_2^2 (b_1(s) \int_{t_k}^{s} a(\tau)S(\tau,t_k)x_k d\tau ds)$$
$$\le \int_{t_k}^{t_{k+1}} k_1 E_k \left\| \int_{t_k}^{s} a\,(\tau)S(\tau,t_k)x_k d\tau \right\|^2 ds$$
$$\le \int_{t_k}^{t_{k+1}} k_1(s-t_k) \int_{t_k}^{s} const\; d\tau\, ds \le \mathrm{C}\; (\Delta_k t)^3$$

Для існування мультиплікативного представлення розв’язку рівняння (2) необхідно, щоб виконувалась оцінка (10). Розглянемо далі добуток розрішаючих операторів відповідних спрощених рівнянь (6), (7), (8)

$$U(t_{k+1},t_k)x = Q(t_{k+1},t_k)S_1(t_{k+1},t_k)S_2(t_{k+1},t_k)x$$

Розпишемо, враховуючи лінійність відповідних розрішаючих операторів:

$$Q(t_{k+1},t_k)\cdot S_1(t_{k+1},t_k)\cdot S_2(t_{k+1},t_k)x_k = x_k +$$
$$+\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s)S_2(s,t_k)x_k\, dw_2(s) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s)S_1(s,t_k)\, S_2(t_{k+1},t_k)x_k dw_1(s)$$
$$+\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s)\, Q(s,t_k)S_1(t_{k+1},t_k)\cdot S_2(t_{k+1},t_k)x_k ds. \qquad (13)$$

Слід відміти , що властивість еволюційності мають окремі розрішаючі оператори $Q(t_{k+1},t_k)$, $S_1(t_{k+1},t_k)$, $S_2(t_{k+1},t_k)$.

Якщо проітерувати оператори $S_2(s,t_k), S_1(s,t_k), Q(s,t_k)$, то вираз (13) можна представити як суму

$$Q(t_{k+1},t_k)\cdot S_1(t_{k+1},t_k)\cdot S_2(t_{k+1},t_k)x_k = \quad J_2 + R_2,$$

де

$$J_2 = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(s)\, x_k ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s)\, x_k dw_1(s) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s)\, x_k dw_2(s) +$$
$$+\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k\, dw_1(\tau) dw_1(s)$$
$$+\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s) \int_{t_k}^{s} b_2(\tau) x_k\, dw_2(\tau) dw_2(s)$$
$$+\int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s) dw_1(s) \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s)\, x_k dw_2(s)$$

Через R_2 позначена сума скінченної кількості доданків, умовне математичне сподівання від квадрата норми кожного з яких не перевищує $C\ (\Delta_k t)^{2+\varepsilon}$, де C стала, яка залежить від k_1 , $\Delta_k t$.

Таким чином відповідну оцінку для Δ одержимо, якщо взяти різницю (11) і (12):

$$\Delta = E_k \| S(t_{k+1}, t_k)x_k - Q(t_{k+1}, t_k)S_1(t_{k+1}, t_k)S_2(t_{k+1}, t_k)x_k \|^2$$

Після приведення подібних і скориставшись нерівністю Коші, отримаємо нерівність

$$\Delta \leq 2(\Delta_1 + \Delta_2)$$

Де $\Delta_1 = E_k \| R_1 - R_2 \|^2 \leq \ C\ (\Delta_k t)^{2+\varepsilon}$

$$\Delta_2 = E_k \| J_1 - J_2 \|^2 =$$

$$E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s) \int_{t_k}^{s} b_2(\tau) x_k \, dw_2(\tau) dw_1(s)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s)) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s) dw_1(s) \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s)\, x_k dw_2(s) \ \right\|^2 =$$

$$= E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_1(s) \int_{s}^{t_{k+1}} b_2(\tau)\, x_k dw_2(\tau)\, dw_1(s) \right\|^2$$

Скориставшись неперервністю і комутативністю коефіцієнтів $b_1(s)$, $b_2(s)$, маємо для Δ_2 нерівність

Для оцінки доданків типу $\gamma = \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(s) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s)$,з яких складається Δ_2 скористаємось неперервністю відповідних коефіцієнтів, для чого представимо

$$\gamma = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b_2(s) - b_2(t_k) + b_2(t_k)) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s) = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma_1 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b_2(s) - b_2(t_k)) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s),$$

$$\gamma_2 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(t_k) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s)$$

$\gamma_2 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(t_k) \int_{t_k}^{s} (b_1(\tau) - b_1(t_k) + b_1(t_k)) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s) = \gamma_3 + \gamma_4$

$$\gamma_3 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(t_k)) \int_{t_k}^{s} (b_1(\tau) - b_1(t_k)) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s)$$

$$\gamma_4 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_2(t_k) \int_{t_k}^{s} b_1(t_k)) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s).$$

Таким чином $\Delta_2 \leq 2E_k \|\mathrm{P}\|^2 + 2E_k \|\mathrm{P}_1\|^2$, де P позначена сума скінченої кількості доданків типу γ_1 , γ_3, а P_1доданків типу γ_4.

$\mathrm{P} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b_2(s) - b_2(t_k)) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b_1(s) - b_1(t_k)) \int_{t_k}^{s} b_2(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s) + \ldots\ldots\ldots.$

Кожний з яких, враховуючи неперервність (4), оцінюється:

$E_k \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b_2(s) - b_2(t_k)) \int_{t_k}^{s} b_1(\tau) x_k \, dw_1(\tau) dw_2(s) \right\|^2 \leq$

$\int_{t_k}^{t_{k+1}} k_2 (s - t_k)^{1+\delta} \int_{t_k}^{s} \mathrm{C} \, d\tau ds \leq \mathrm{C} \, (\Delta_k t)^{2+\varepsilon} \|x_k\|^2.$

Розглянемо P_1.

$P_1 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{j,m=1}^{\infty} b_1(t_k) \varphi_j \, b_2(t_k) \varphi_m \int_{t_k}^{s} dw_{1j}(\tau) \, dw_{2m}(s) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{j,m=1}^{\infty} b_1(t_k) \varphi_j \, b_2(t_k) \varphi_m \int_{s}^{t_{k+1}} dw_{2m}(\tau) \, dw_{1j}(s) = \sum_{j,m=1}^{\infty} b_1(t_k) \varphi_j \, b_2(t_k) \varphi_m (\int_{t_k}^{t_{k+1}} (w_{1j}(s) - w_{1j}(t_k)) dw_{2m}(s) - (w_{2m}(t_{k+1}) - w_{2m}(s)) dw_{1j}(s)) \equiv 0.$

$w_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (w_1, \varphi_j) \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} w_{1j} \varphi_j$ $\quad w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (w_2, \varphi_m) \varphi_m = \sum_{m=1}^{\infty} w_{2m} \varphi_m$ – розклад вінерівських процесів за ортонормованим базисом $\{\varphi_{j,m}\}$ – в гільбертовому просторі H.

Таким чином, $\Delta \leq 2(\Delta_1 + \Delta_2) \leq \mathrm{C} \, (\Delta_k t)^{2+\varepsilon}$
Що остаточно доводить лему, про еквівалентність мультиплікативних представлень. При цьому представлення (5) рівняння (2) можна інтерпретувати, як наближений розв'язок цього рівняння.

Висновки та перспективи.

Схема мультиплікативних представлень, яка розглянута в даній роботі для стохастичного диференціального рівняння з двома вінерівськими процесами, може бути поширена і на рівняння з кількома вінерівськими незалежними збурюваннями. Також вона ефективна для дослідження властивостей розв'язків стохастичних рівнянь з необмеженим оператором знесення і кількома незалежними випадковими збурюючими факторами. Тобто перспективним є дослідження диференціального рівняння в частинних похідних з кількома випадковими незалежними збуреннями.

Література

1. *Далецкий Ю.Л., Заплитная А.Т.* Интегралы по пространству деревьев, связанные с нелинейными стохастическими уравнениями. Укр. матем. ж., 1965, т 5. С. 110-114.

2. *Белопольская Я.И., Далецкий Ю.Л.* Диффузионные процессы в гладких банаховых пространствах и многообразиях. Тр. Моск.матем о-ва, 1078, т. 37. С. 107- 141.

3. *Белопольская Я.И., Наголкина З.И.* О мультипликативных представлениях решений стохастческих уравнений. ДАН УССР, 1977, т.11, с. 966-970.

4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Москва : Наука, 1975 т. 3. 496 с.

5. *Наголкіна З., Філонов Ю.* Мультиплікативна апроксимація випадкового процесу / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2021. Випуск 100. С. 205-214.

к. ф-м. н. доцент **Наголкіна З.І.**

zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176

к.ф-м.н. доцент **Філонов Ю.П.**,

yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854

Київський національний університет будівництва і архітектури

СХЕМА МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ВИНЕРОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

В данной работе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение с двумя независимыми винеровскими процессами в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Это уравнение может служить математической моделью динамической системы при наличии нескольких независимых возмущающих случайных факторов. Для исследования параметров этого уравнения употребляется метод мультипликативных представлений Далецкого-Троттера. Этот метод применяется как для детерминированных, так и стохастических уравнений. Метод состоит в следующем: строят разбиение отрезка существования решения $[t_0, T]$ *на элементарные* $[t_{k+1}, t_k]$*. На каждом элементарном отрезке рассматривают эволюционный разрешающий оператор полного уравнения* $S(t_{k+1}, t_k)$*, а также произведение разрешающих операторов уравнений, являющихся фрагментами полного уравнения* $U_k = Q_k \times S_{1k} \times S_{2k}$

Таким образом сравнивают две мультипликативные семьи, состоящие из разных разрешающих операторов. При выполнении условий эквивалентности, которые проверены в данной работе, можно утверждать, что решение стохастического уравнения в некотором смысле можно представить как композицию соответствующих решений дифференциальных уравнений на элементарных отрезках, правые части которых есть снос, и соответственно диффузии.

Причем для внедрения такой мультипликативной схемы в случае нескольких независимых винеровских процессов следует наложить дополнительные требования относительно коэффициентов диффузии. А именно: коэффициенты диффузии должны быть коммутирующими операторами, непрерывными по времени.

Схема мультипликативных представлений базируется на исследовании параметров эволюционных семейств разрешающих операторов, также их оценок в нормах соответствующих пространств. При этом для получения определенной оценки рассматривают несколько шагов итераций для соответствующих уравнений в пространстве Гильберта. Следует отметить, что схема мультипликативных представлений может быть интерпретирована как схема получения приближенного решения.

Ключевые слова: Винеровский процесс; условное математическое ожидание; гильбертово пространство; вероятностное пространство; поток событий; дифференциальное уравнение; стохастическое уравнение; решение, условия существования; непрерывность; оператор; разрешающий оператор; норма; математическое ожидание; неравенство Коши; эволюционная сім'я; мультипликативное представление; случайные процессы; среднее квадратическое отклонение.

Ph. D., assoc. Prof **Zoya Nagolkina**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
Ph. D., assoc. Prof **Yuri Filonov**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
Kyiv National University of Construction and Architecture» (KNUCA)

SCHEME OF MULTIPLICATIVE REPRESENTATIONS FOR A STOCHASTIC EQUATION WITH TWO WIENER PROCESSES

In this paper we consider a stochastic differential equation with two independent Wiener processes in an infinite-dimensional Hilbert space. This equation can be a mathematical model of a dynamic system in the presence of several independent perturbing random factors. To study the parameters of this equation, the Daletsky-Trotter method of multiplicative representations is used.

This method is applied to both deterministic and stochastic equations. The method consists in the following: one constructs a partition of the interval of existence of the solution $[t_0, T]$ *into elementary* $[t_{k+1}, t_k]$. *On each elementary segment, the evolutionary resolving operator of the complete equation* $S(t_{k+1}, t_k)$ *is considered, as well as the product of the resolving operators of equations that are fragments of the complete equation* $U_k = Q_{1k} \times S_{1k} \times S_{2k}$

Thus, two multiplicative families consisting of different resolving operators are compared. When the equivalence conditions, which are verified in this paper, are satisfied, it can be argued that the solution of a stochastic equation can, in a certain sense, be represented as a composition of the corresponding solutions of differential equations on elementary intervals, the right parts of which are drift, and, accordingly, diffusion.

Moreover, in order to implement such a multiplicative scheme in the case of several independent Wiener processes, additional requirements regarding diffusion coefficients should be imposed. Namely: the diffusion coefficients must be commuting operators, continuous in time.

The scheme of multiplicative representations is based on the study of the parameters of evolutionary families of decision operators, as well as their estimates in the norms of the corresponding spaces. In this case, to obtain a certain estimate, several iteration steps are considered for the corresponding equations in the Hilbert space. It should be noted that the scheme of multiplicative representations can be interpreted as a scheme for obtaining an approximate solution.

Keywords: Wiener process; conditional expectation; Hilbert space; probability space; event flow; differential equation; stochastic equation; solution; existence conditions; continuity; operator; decision operator; norm; mathematical expectation; Cauchy inequality; evolutionary family; multiplicative representation; random processes; mean squre deviation.