

УДК 514.18

DOI: 10.32347/0131-579x.2022.102.157-164

д. т. н., професор **Пилипака С.Ф.**,

s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

к. т. н., доцент **Кресан Т.А.**,

tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

аспірант **Хропост В.І.**,

hropost97@ukr.net ORCID 0000-0001-9363-3955

к. т. н., доцент **Бабка В.М.**

babka.v.m@gmail.com ORCID 0000-0003-4971-4285

Національний університет біоресурсів і природокористування України

## ОСОБЛИВОСТІ ЗГИНАННЯ ЗАГОТОВКИ У ВИГЛЯДІ ПЛОСКОГО КІЛЬЦЯ У ГВИНТОВИЙ КОНОЇД

*Дуже поширеною в різних механізмах гвинтовою поверхнею є прямий закритий гелікоїд або гвинтовий коноїд, відомий в техніці під назвою шнек. Зважаючи на широке застосування шнеків, існують різні способи їх виготовлення (навивка, прокатка, штамповка, розтягування на валу зварених між собою плоских кілець). Оскільки поверхня гвинтового коноїда є нерозгортною, то плоске кільце є наближеною розгорткою витка, оскільки точної розгортки не існує. При формуванні витка гвинтового коноїда із плоского кільця у ньому відбуваються пластичні деформації, зумовлені трансформацією розгортної поверхні у нерозгортну.*

*З диференціальної геометрії відомо, що всяку гвинтову поверхню можна зігнути на поверхню обертання. Для гвинтового коноїда такою поверхнею є катеноїд. У роботі наведено параметричні рівняння неперервного згинання катеноїда у гвинтовий коноїд. Пропонується відсік катеноїда, який відповідає заданому відсіку одного витка коноїда, замінити зрізаним конусом. Розгортку цього конуса у вигляді плоского кільця можна вважати заготовкою для формування поверхні коноїда. Зроблено порівняльний аналіз розмірів кільця, отриманого запропонованим способом, з розмірами, які можна отримати за формулами довідкової літератури. Розбіжності хоча і існують, але вони практично незначні.*

*У результаті дослідження неперервного згинання катеноїда у гвинтовий коноїд запропоновано удосконалення процесу такого згинання. В одному із існуючих способів формування шнека із плоских кілець пропонується декілька кілець у вигляді сектора зварювати між собою і потім розтягувати до отримання шнека з такою ж кількістю витків. Зварені кільця надіваються на вал, один кінець кріпиться до нього нерухомо (наприклад, зварюванням), а другий розтягується до потрібного розміру. При такому способі не враховується скручування заготовки навколо осі вала. Потрібно із окремих секторів зігнути зрізані конуси, їх*

зварити між собою, і тільки після цього розтягувати. В такому випадку кут скручування уже закладений у заготовку у вигляді зварених конусів.

*Ключові слова:* гвинтовий коноїд; поверхня; виток; заготовка; теорія неперервного згинання; шнек; плоске кільце.

**Постановка проблеми.** Поширеним способом виготовлення витків шнеків є їх формування із заготовки у вигляді плоского кільця із вирізаним сектором. Оскільки поверхня шнека є нерозгортною, то розміри заготовки не можуть бути точними. При їх визначенні керуються рівністю довжин гвинтових ліній, які обмежують виток шнека зовнішнім і внутрішнім чином, і відповідним довжинам дуг кіл, що таким же чином обмежують плоске кільце. Однак можна до знаходження розмірів кільця можна підійти і з інших міркувань. Відомо, що всяку гвинтову поверхню можна зігнути на поверхню обертання. Для гвинтового коноїда, тобто шнека, ця поверхня обертання відома – це катеноїд. Відсік катеноїда можна апроксимувати зрізаним конусом і звідси знаходити розміри плоского кільця, як розгортки зрізаного конуса.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Гвинтові поверхні сільськогосподарських машин виконують різноманітні функції. Вони використовуються для транспортування зерна і інших сипучих матеріалів [1], змішування кормів, виготовлення робочих органів ґрунтообробних [2], коренезбиральних [3] машин та інших механізмів [4]. Існують різні способи їх виготовлення, які розглянуті в працях [5, 6].

**Формулювання цілей та завдання статті.** На основі неперервного згинання катеноїда у гвинтовий коноїд вивести формули для розрахунку плоскої заготовки витка коноїда та розробити рекомендації по її деформуванню у готовий виріб.

**Основна частина.** В довідковій літературі і в мережі Інтернет можна знайти відомості, як розрахувати плоску заготовку для виготовлення із неї витка гвинтового коноїда. Там в основному наводяться розрахункові формули. Розглянемо їх отримання теоретичним шляхом. На рис. 1,а зображено один виток гвинтового коноїда із кроком  $H$  і обмеженого зовнішньою і внутрішньою гвинтовими лініями, що розташовані на циліндрах радіусів  $R$  і  $r$  відповідно.

Умовна або наближена розгортка має вигляд плоского кільця із вирізом певного сектору (рис. 1,б). Для її побудови будемо виходити із того, що довжини обмежуючих гвинтових ліній на витку і довжини обмежуючих дуг кіл на розгортці мають бути рівними. Крім того, різниця радіусів  $R-r$  на витку і  $R_o-r_o$  на розгортці мають бути рівними:  $R-r=R_o-r_o$ . Довжину гвинтової лінії зручно знаходити на розгортці циліндра, на якому вона розташована. Вона перетворюється у гіпотенузу прямокутного трикутника, одним катетом якого є крок  $H$ , а іншим – довжина кола – Основи циліндра.

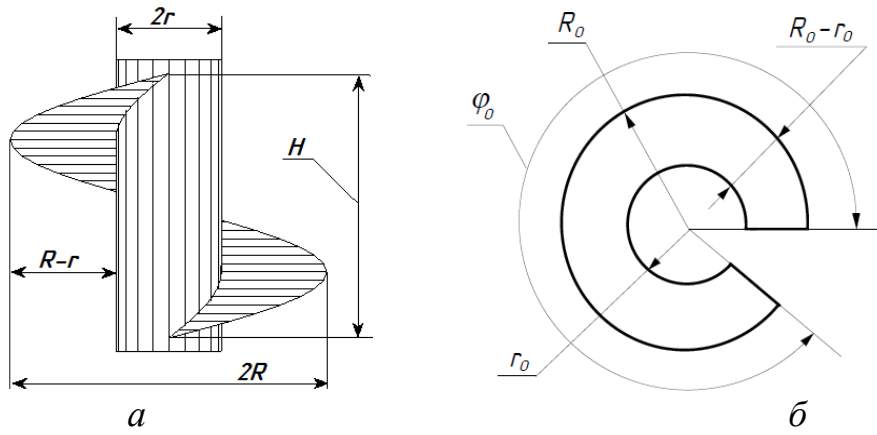


Рис. 1. Графічні ілюстрації до побудови умовної розгортки витка шнека:

а) фронтальна проекція витка із зазначеними розмірами;

б) умовна розгортка витка

Зважаючи на те, що  $H=2\pi h$ , де  $h$  – гвинтовий параметр, знайдемо довжини зовнішньої  $L$  і внутрішньої  $l$  гвинтових ліній за теоремою Піфагора:

$$L = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}; \quad l = 2\pi\sqrt{r^2 + h^2}. \quad (1)$$

Довжина внутрішньої дуги  $l_0$  обмежуючого кола кільця (рис. 1,б) запишеться через величину кута  $\varphi_0$ :

$$l_0 = \varphi_0 r_0. \quad (2)$$

Аналогічно запишеться довжина зовнішньої дуги  $L_0$  обмежуючого кола кільця плоскої заготовки, при цьому маємо на увазі, що  $R_0 = r_0 + (R_0 - r_0) = r_0 + R - r$ :

$$L_0 = \varphi_0 (r_0 + R - r). \quad (3)$$

Прирівняємо довжини дуг гвинтових ліній витка шнека і відповідних дуг кіл на його розгортці і отримаємо систему двох рівнянь із двома невідомими величинами  $r_0$  і  $\varphi_0$ :

$$\begin{cases} \varphi_0 r_0 = 2\pi\sqrt{r^2 + h^2}; \\ \varphi_0 (r_0 + R - r) = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}. \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язавши систему (4), отримаємо:

$$r_0 = \frac{r^2 + h^2 + \sqrt{(R^2 + h^2)(r^2 + h^2)}}{R + r}; \quad (5)$$

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{R - r} \left( \sqrt{R^2 + h^2} - \sqrt{r^2 + h^2} \right).$$

Розглянемо приклад. Виток шнека задано радіусами  $r=20$ ,  $R=60$ , кроком  $H=100$  ( $h=15,9$ ). Згідно формул (5) знаходимо:  $r_0=27$ ,  $\varphi_0=5,74$  рад  $=328,7^\circ$ ,  $R_0=r_0+R-r=67$ .

Тепер побудову умовної розгортки розглянемо, виходячи із теорії неперервного згинання поверхні гвинтового коноїда (шнека). Із диференціальної геометрії відомо, що гвинтовий коноїд згинається на

поверхню обертання, якою є катеноїд. Це класичний приклад згинання нерозгортних поверхонь. У праці [7] наведені параметричні рівняння неперервного згинання гвинтового коноїда у катеноїд зменшенням параметра  $p$ , який представляє собою проміжний гвинтовий параметр поверхні. При  $p=h$  ми маємо вихідну поверхню (гвинтовий коноїд), а при  $p=0$  – поверхню обертання, якою є катеноїд. При значенні параметра  $p$  в межах  $h \geq p \geq 0$  можна побудувати скільки завгодно проміжних положень поверхні при її згинанні. Параметричні рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{u^2 + h^2 - p^2} \cos \left[ \varphi - \operatorname{arctg} \frac{pu}{\sqrt{(h^2 - p^2)(u^2 + h^2)}} \right]; \\ Y &= \sqrt{u^2 + h^2 - p^2} \sin \left[ \varphi - \operatorname{arctg} \frac{pu}{\sqrt{(h^2 - p^2)(u^2 + h^2)}} \right]; \\ Z &= \frac{\sqrt{h^2 - p^2}}{2} \ln \frac{\sqrt{u^2 + h^2} + u}{\sqrt{u^2 + h^2} - u} + p\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $u$ ,  $\varphi$  – незалежні змінні поверхні, причому  $u$  – довжина прямолінійної твірної коноїда, відлік якої починається від його осі;  $\varphi$  – кут повороту, який для одного витка коноїда змінюється в межах  $\varphi=0 \dots 2\pi$ .

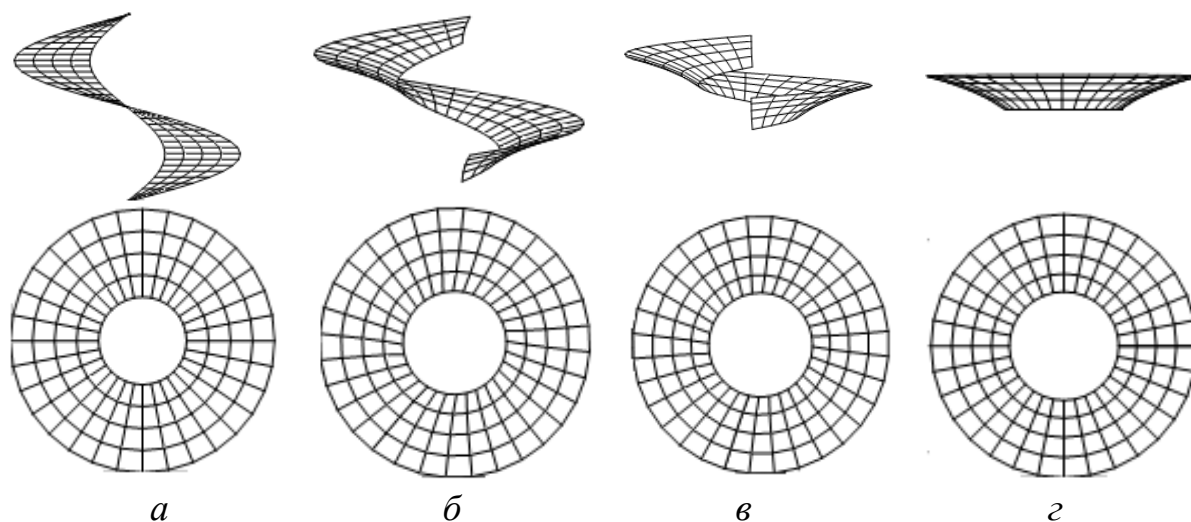


Рис. 2. Проекції окремих положень неперервного згинання гвинтового коноїда за параметричними рівняннями (6):

а)  $p=15,9$ ;

б)  $p=10$ ;

в)  $p=5$ ;

г)  $p=0$

На рис. 2 за параметричними рівняннями (6) побудовані проекції гвинтового коноїда при його згинанні в катеноїд для різних значень параметра  $p$ . Змінна  $u$  набувала значень в межах  $u=20 \dots 60$ , що відповідає  $r=20$ ,  $R=60$  вихідної поверхні. Крок  $H=100$ , тобто виток вихідної поверхні відповідає тим розмірам, для яких ми перед цим розраховували умовну розгортку.

При поступовому (неперервному) згинанні коноїда згідно рівнянь (6) і зображень на рис. 2 можна зробити певні висновки. Гвинтовий коноїд тільки у вихідному положенні є лінійчатою поверхнею. При згинанні на поверхню обертання (катеноїд) ці прямолінійні твірні трансформуються у криві, тобто при подальшому згинанні поверхня стає нелінійчатою. І головне, що при такому згинанні кут  $\varphi$  залишається незмінним – він дорівнює  $360^\circ$ . Отже, поверхнею обертання, яку потрібно деформувати у гвинтовий коноїд, є відсік катеноїда. Однак для його отримання потрібно застосовувати штамповку, однак простіше штампувати відразу готовий виток гвинтового коноїда. Але відсік катеноїда можна із певною точністю замінити відсіком зрізаного конуса, що зробити набагато простіше. Виходячи із цього, можна знайти розміри цього зрізаного конуса і далі його розгортку, яка буде наближеною розгорткою витка коноїда.

На рис. 3 побудовано меридіан катеноїда, на який згинається гвинтовий коноїд із вказаними вище розмірами. Частина меридіана, яка відповідає відсіку гвинтового коноїда ( $r=20$ ,  $R=60$ ) виділено потовщеною лінією. Крайні точки цієї ділянки меридіана (ланцюгової лінії) сполучено відрізком прямої. Цей відрізок, що нахилений під кутом  $\beta$  до осі  $O\rho$ , є твірною апроксимованого конуса.

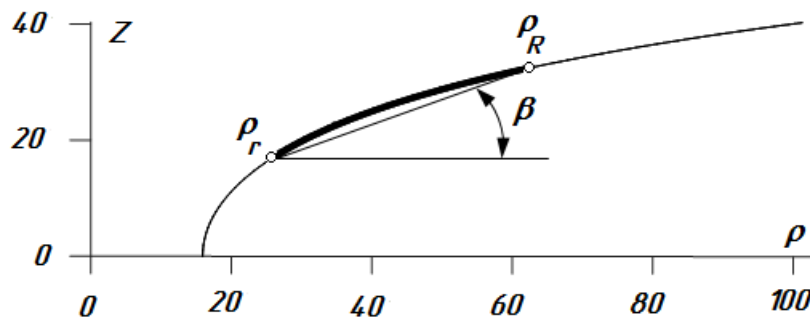


Рис. 3. Частина меридіана катеноїда, апроксимована відрізком прямої

Із отриманої апроксимації можна зробити важливий висновок, а саме: чим далі від осі обертання апроксимується дуга меридіана (ланцюгова лінія), тим точніше зрізаний конус апроксимує відповідний відсік катеноїда. Найгірша апроксимація відбувається при  $r=0$ , тобто при нульовій товщині вала, що на рис. 3 відповідає значенню  $\rho_r \approx 17$ . Вал нульового діаметра не може бути, але із збільшенням його величини покращується апроксимація катеноїда зрізаним конусом.

Знайдемо розміри зрізаного конуса, який апроксимує відповідний відсік катеноїда. Для цього достатньо визначити координати точок  $\rho_r$  і  $\rho_R$ . Рівняння меридіана катеноїда отримаємо із (6) при  $p=0$  і  $\varphi=0$ :

$$\rho = \sqrt{u^2 + h^2}; \quad z = \frac{h}{2} \ln \frac{\sqrt{u^2 + h^2} + u}{\sqrt{u^2 + h^2} - u}. \quad (7)$$

Підставимо у (7) по чергово значення  $u=r$  і  $u=R$  і отримаємо координати точок  $\rho_r$  і  $\rho_R$  (рис. 3):

$$\rho_r \left\{ \sqrt{r^2 + h^2}; \quad z = \frac{h}{2} \ln \frac{\sqrt{r^2 + h^2} + r}{\sqrt{r^2 + h^2} - r} \right\}. \quad (8)$$

$$\rho_R \left\{ \sqrt{R^2 + h^2}; \quad z = \frac{h}{2} \ln \frac{\sqrt{R^2 + h^2} + R}{\sqrt{R^2 + h^2} - R} \right\}. \quad (9)$$

Знаючи координати точок  $\rho_r$  (8) і  $\rho_R$  (9), можна визначити відстань між ними, тобто довжину твірної конуса. При заданих розмірах  $r=20$ ,  $R=60$ ,  $h=15,9$  вона становить 39,74 лін. од. Інтегруванням можна знайти довжину відповідної дуги меридіана (7). Він зводиться до виразу  $R-r$ , тобто довжина дуги ланцюгової лінії між точками  $\rho_r$  і  $\rho_R$  становить 40 лін. од. Різниця в довжині відрізка і дуги несуттєва, однак саме на цю різницю має розтягнутися метал заготовки.

За координатами точок (8) і (9) знаходимо кут  $\beta$ :

$$\beta = \text{Arctg} \frac{\frac{h}{2} \ln \frac{(A-r)(B+R)^2}{h^2(A+r)}}{B-A}, \quad (10)$$

де  $A = \sqrt{r^2 + h^2}$ ,  $B = \sqrt{R^2 + h^2}$ .

Для нашого випадку (рис. 3)  $\beta=23^\circ$ . Радіус меншої основи конуса дорівнює координаті  $\rho$  точки  $\rho_r$ , тобто значенню  $A$ , а радіус більшої основи – відповідно значенню  $B$ . Висоту зрізаного конуса теж можна визначити – вона дорівнює різниці координат  $Z$  точок  $\rho_R$  і  $\rho_r$ . Знаючи всі розміри зрізаного конуса, можна знайти його розгортку у вигляді плоского кільця. Наводимо формули для визначення внутрішнього радіуса  $r_o$  кільця і кута  $\varphi_o$ :

$$r_o = \frac{A}{2(B-A)} \sqrt{4(B-A)^2 + h^2 \ln^2 \frac{h^2 + 2r(r+A)}{h^2 + 2R(R+B)}};$$

$$\varphi_o = \frac{4(B-A)}{\sqrt{4(B-A)^2 + h^2 \ln^2 \frac{h^2 + 2r(r+A)}{h^2 + 2R(R+B)}}}. \quad (11)$$

Згідно отриманих формул (11) для заданих значень  $r=20$ ,  $R=60$ ,  $h=15,9$  знаходимо:  $r_o=27,8$ ,  $\varphi_o=326,6^\circ$ ,  $R_o=r_o+R-r=67,8$ . Таким чином, отримані формули (11) дають практично однакові результати в порівнянні із формулами (5). Однак отримані теоретичні результати можуть бути використані для вдосконалення способу виготовлення шнеків із плоских кілець. Один із способів виготовлення шнеків полягає у зварюванні плоских кілець (рис. 1,б) з наступним їх розтягуванням. Для цього зварені кільця надівають на вал, один кінець приварюють до валу, а другий тягнуть з допомогою лебідки. Кільця розтягуються у гвинтову поверхню, але при цьому не враховується поворот кільця навколо його осі на кут  $360^\circ - \varphi_o$ . Згідно теорії неперервного згинання зварювати між собою

потрібно не плоскі кільця, а зігнуті із них зрізані конуси. Якщо кільце зігнути так, щоб прями краї, які його обмежують, збіглися, то кут  $\beta$  визначиться автоматично. Згідно нашої пропозиції плоске кільце потрібно розрізати в радіальному напрямі без вирізу сектора. Такі кільця потрібно зігнути у конуси, але при цьому частина поверхні конуса буде взаємно перекриватися на величину вирізу. В такого конуса можна проконтролювати кут  $\beta$  нахилу твірних за допомогою формули (10). Після цього зварені конуси можна розтягувати на валу. При такому способі кількість кілець, з яких зігнуті конуси, не відповідатиме кількості витків шнека. При їх великій кількості буде економія зварного шва в порівнянні із кільцями із вирізаним сектором.

**Висновки.** Застосування теорії неперервного згинання гвинтового коноїда у катеноїд дозволяє удосконалити спосіб виготовлення шнеків за допомогою примусового розтягування зварених між собою плоских кілець. Катеноїд, який є поверхнею обертання, можна апроксимувати зрізаним конусом. Розтягувати потрібно не зварені плоскі кільця, а зігнуті із них зрізані конуси, зварені між собою. Такий спосіб відповідає теорії неперервного згинання. Точність апроксимації катеноїда зрізаним конусом залежить від діаметра вала шнека: чим більший діаметр, тим більша точність апроксимації.

## Література

1. Куликівський В.Л. Вплив шнекових транспортувальних пристроїв на показники якості насіння зернових культур. *Інженерія природокористування*. 2018. № 2(10). С. 108–114.
2. Драган А., Клендій М. Обґрунтування конструкції робочого органа гвинтової секції комбінованого ґрунтообробного знаряддя. *Перспективні технології та прилади*, 2021. №18. С. 66-73.
3. Ванін В.В., Грубич М.В., Юрчук В.П. Геометричне моделювання гвинтових поверхонь змінного (аксіального) кроку при конструюванні вилкових копачів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. № 3(62). Херсон, 2017. С. 256–259.
4. Гевко Б.М., Данильченко М.Г., Рогатинський Р.М. Механізми з гвинтовими пристроями. Львів: 1993. 208 с.
5. Гевко І.Б., Лещук Р.Я., Гудь В.З., Дмитрів О.Р., Дубиняк Т.С., Навроцька Т.Д., Круглик О.А. Гнучкі гвинтові конвеєри: проектування, технологія виготовлення, експериментальні дослідження монографія / за ред. ФОП В. А. Паляниця. Тернопіль: 2019. 208 с.
6. Гевко І.Б., Гудзь В.З., Круглик О.А. Синтез способів навивання спіралей шнеків. *Збірник наукових праць «Перспективні технології та прилади»* Луцьк, 2018. Випуск 12. С. 39–47.
7. Пилипака С.Ф. Неперервне згинання катеноїда в гвинтовий коноїд. *Прикл. геометрія та інж. графіка*. 1998. № 63. С. 80–83.

Ph. D., prof **Serhiy Pylypaka**,  
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

Ph. D., assoc. prof **Tetiana Kresan**,  
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

Postgraduate Student **Vyacheslav Hropost**,  
hropost97@ukr.net ORCID 0000-0001-9363-3955

Ph. D., assoc. prof **Vitaliy Babka**  
babka.v.m@gmail.com ORCID 0000-0003-4971-4285

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

## **ROLLING OF A DEVELOPABLE HELICOID OF THE SCREW LINE ALONG ITS BENDING**

*A very common helical surface in various mechanisms is a straight closed helicoid or screw conoid, known in the technical field as a screw. Considering the wide application of screws, there are various methods of their production (winding, rolling, stamping, stretching flat rings welded together on a shaft). Since the surface of the screw conoid is nondevelopable, the flat ring is an approximate sweep of the screw, since an exact sweep does not exist. During the formation of the turn of a screw conoid from a flat ring, plastic deformations occur in it, caused by the transformation of a developable surface into a nondevelopable one.*

*It is known from differential geometry that any screw surface can be bent into a surface of revolution. For a screw conoid, such surface is a catenoid. The paper presents parametric equations for the continuous bending of a catenoid into a screw conoid. It is proposed to replace the compartment of the catenoid, which corresponds to the given compartment of one turn of the conoid, with a truncated cone. The sweep of this cone in the form of a flat ring can be considered a blank for forming the surface of a conoid. A comparative analysis of the sizes of the ring obtained by the proposed method with the sizes that can be obtained according to the formulas of the reference literature were made. Although there are differences, but they are practically insignificant.*

*As a result of the study of the continuous bending of a catenoid into a screw conoid, an improvement of the process of such bending is proposed. In one of the existing methods of forming a screw from flat rings, several rings in the form of a sector are proposed to be welded together and then stretched to obtain a screw with the same number of turns. Welded rings are put on the shaft, one end is fixed to it (for example, by welding), and the other is stretched to the desired size. With this method, the twisting of the workpiece around the axis of the shaft is not taken into account. It is necessary to bend truncated cones from separate sectors, weld them together, and only then stretch them. In this case, the twist angle is already embedded in the workpiece in the form of welded cones.*

*Key Words: helical conoid; surface; turn; workpiece; theory of continuous bending; auger; flat ring.*