

д. т. н., професор **Шоман О. В.**,

olgasho@ukr.net, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3660-0441>

к. т. н., доцент **Адашевська І. Ю.**,

adashevska@ukr.net, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5447-5114>

к. т. н., доцент **Шеліхова І. Б.**,

inessa.shelikhova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5637-1850

к. т. н., доцент **Сівак Є. М.**,

lskolos@i.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5526-8544>

доцент **Даниленко В. Я.**,

vladdanyl@ukr.net, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4952-7498>

Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»

## РОЗРАХУНОК ПЕРІОДИЧНОЇ ТРАЄКТОРІЇ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ

*Розглядаються маятникові коливання у вертикальній площині підвішеної невагомої пружини, зберігаючої при цьому прямолінійність своєї осі. В літературі такий вид маятника називають хитною пружиною (swinging spring). Шукана траєкторія вантажу хитної пружини за допомогою комп'ютера моделюється з використанням значень маси вантажу, жорсткості пружини та її довжини в ненавантаженому стані. Крім того, використовуються такі початкові величини параметрів ініціювання коливань хитної пружини: кут відхилення осі пружини від вертикалі, швидкість зміни величини цього кута, а також параметр подовження пружини та швидкість зміни подовження. Розрахунки виконано за допомогою рівняння Лагранжа другого роду. Також розглянуто варіанти знаходження періодичних траєкторій точкового вантажу хитної пружини з рухомою (вздовж координатних осей) точкою кріплення.*

*Актуальність теми визначається необхідністю дослідження та удосконалення нових технологічних схем механічних пристроїв, до складу яких входять пружини. Зокрема, дослідження умов відмежування від хаотичних коливань елементів механічних конструкцій та визначення раціональних значень параметрів для забезпечення періодичних траєкторій їх коливань.*

*Наведено спосіб знаходження значень набору параметрів для забезпечення нехаотичної періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини. Ідею способу пояснено на прикладі знаходження періодичної траєкторії руху другого вантажу подвійного маятника.*

*Наведено варіанти розрахунків для одержання періодичних*

*траєкторії руху вантажу, коли задані параметри:*

*– жорсткість пружини та її довжина без навантаження, але невідома величина маси вантажу;*

*– величина маси вантажу та довжина пружини без навантаження, але невідома жорсткість пружини;*

*– величина маси вантажу та жорсткість пружини, але невідома довжина пружини без навантаження.*

*Результати можна використати при вивченні нелінійних зв'язаних систем, а також при розрахунках варіантів механічних пристроїв, де пружини впливають на коливання їх елементів. А саме, коли при використанні механічних пристроїв необхідно відмежуватися від хаотичних переміщень вантажів, а забезпечити періодичні траєкторії їх руху.*

*Ключові слова: маятникові коливання; періодичної траєкторії руху; хитна пружина; рівняння Лагранжа другого роду.*

**Постановка проблеми.** Для пояснення складних процесів, що відбуваються в природі, часто застосовують наочні механічні інтерпретації. Зокрема, для коливальних процесів у якості моделей використовують маятникові аналоги [1].

Класичним прикладом вважається модель оберненого маятника з віброуючою точкою кріплення. Фізичну модель цього маятника покладено в основу теорії динамічної стабілізації. Ключова ідея теорії полягає у необхідності розділяти рух на «швидкі» і «повільні» складові, що нашло відображення у понятті ефективного потенціалу. За допомогою методу ефективного потенціалу пояснено принцип стійкості високочастотного генератора «ніготронома» [2]. До речі, для того щоб не виникало проблем з секретністю при публікації методу, було залучено фізичну модель маятника з віброуючим підвісом, яка б ілюструвала принцип стійкості генератора. Цим самим було розпочате математичне дослідження маятника з віброуючим підвісом.

Не менш вражаючі механічні інтерпретації пов'язані з іншим видом маятника. У ідеалізованому вигляді маятник має вигляд вертикально підвішеної невагомої пружини, до кінця якої прикріплено точковий вантаж. Пружина крім подовжніх коливань здійснює коливання подібно маятнику у вертикальній площині, зберігаючи при цьому прямолінійність своєї осі. Помічено, що якщо вантаж одночасно здійснює коливання вздовж осі пружини і маятникові коливання, то зазначена дія відкриває феномен коливань пружини із зовсім несподіваної сторони. У поводженні такої коливальної системи були виявлені цікаві й глибокі фізичні закономірності [3].

Модель пружини, що коливається подібно маятнику, – в літературі її називають хитною пружиною (swinging spring) – знаходить широке

застосування у якості механічної моделі більш складних процесів у природі й техніці. Мова йде про процеси із внутрішніми нелінійно пов'язаними системами надання різних коливальних компонентів. При цьому, що істотно, складові компоненти системи обмінюються енергією між собою. У роботі [1] представлено аналіз таких енергетичних обмінів з метою з'ясування того, як це залежить від параметрів керування системою. Для ілюстрації автори використовують хитну пружину як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Для хитної пружини ідентифікуються три енергетичні компоненти, схожі на рухи пружини, маятника, а також зв'язку між ними. Представлена процедура може бути застосована, в принципі, до довільних нелінійних зв'язаних систем, щоб показати, як зв'язок опосередкує внутрішні енергетичні обміни і як розподіл енергії змінюється відповідно до параметрів системи.

Особливість феномена хитної пружини проілюструємо графічно. Для цього порівняємо траєкторії переміщення точкового вантажу у двох випадках - хитної пружини (рис. 1, а) й параметричного маятника (рис. 1, б).

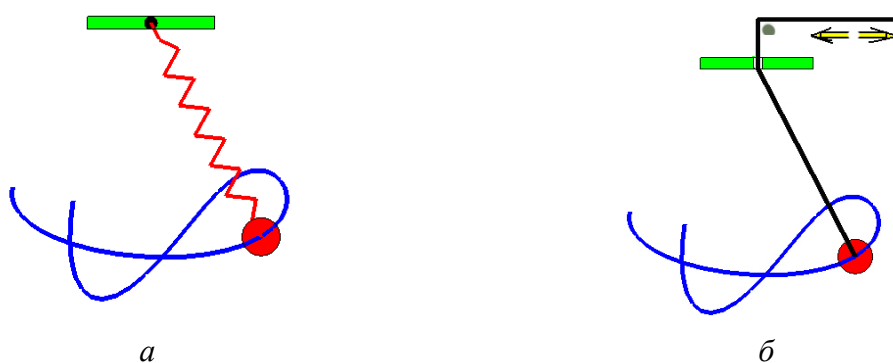


Рис. 1. Аналогія між кутовими коливаннями:  
*a* – хитної пружини; *б* – математичного параметричного маятника

Для параметричного маятника вплив параметра проявляються в зміні довжини маятника, який здійснюється завдяки зовнішньому джерелу енергії. При цьому цікавим є випадок, коли у нижнім положенні довжину небагато збільшувати, а в крайніх положеннях її небагато скорочувати. Тоді максимальне розгойдування досягатиметься у випадку, коли частота зміни параметра системи (довжини підвісу) у два рази перевищуватиме власну частоту коливань системи. Прикладом є коливання дитячих гойдалок. Для тривалої підтримки їхніх коливань необхідно швидко присідати в момент найбільшого відхилення гойдалок від положення рівноваги й також швидко вставати при проходженні нижнього положення.

Однак існує принципова відмінність між маятником «хитна пружина» і маятником «гойдалка». У хитній пружині відсутнє зовнішнє джерело енергії, і маятники такого виду повинні самі «забезпечувати» існування подібних коливань. З дослідів слідує, що наростання кутових

коливань хитної пружини супроводжуються загасанням подовжніх коливань. Потім відбувається зворотне явище – розгойдування подовжніх коливань за рахунок зменшення енергії кутових коливань. Далі весь процес постійно повторюється. Повторюване послідовне перекачування енергії від одних коливань до інших відбувається доти, поки всі коливання не загаснуть через тертя.

Нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами присутні в багатьох областях – від фізики й техніки до біології й соціальних наук. Приклади зв'язаних систем містять у собі хвильове об'єднання у фізиці плазми, накачки лазерів, біологічних осциляторних мережах, нейронних мережах і генетичних ланцюгах (відповідні посилання на літературу наведено в роботі [1]). Для практичних впроваджень інтерес представляє дослідження особливостей коливань хитної пружини. Наприклад, з використанням моделі хитної пружини в роботі [4] досліджується атмосферний баланс планети, в роботі [5] – коливання молекули вуглекислого газу, в роботі [6] – коливання високовольтних проводів, а в роботі [7] моделюються вібрації гелікоптера. Опис коливань пружини подібний рівнянням задач «хижак-жертва» [8]. Список можна продовжувати. При цьому у всіх на перший погляд розрізнених впровадженнях є спільна особливість – можливість їх дослідження на основі моделі хитної пружини. При цьому ключовим моментом є визначення умов забезпечення нехаотичних періодичних траєкторій вантажу хитної пружини. Такі дослідження дозволяють відмежуватися від хаотичних рухів елементів механічних пристроїв, до складу яких входять пружинні елементи. Періодична траєкторія переміщення вантажу хитної пружини ілюструє розв'язок відповідних диференціальних рівнянь, що описують її коливання. Адже ці рівняння мають природу, аналогічну диференціальними рівняннями суміжних за змістом впроваджень. Одержана геометрична форма періодичної траєкторії переміщення вантажу хитної пружини у просторі параметрів конкретної задачі допоможе ілюструвати розв'язки цієї задачі. Тобто розгляд моделі хитної пружини дозволить аналізувати характер розв'язків в суміжних за змістом задачах, і виявляти серед них, у певному розумінні, оптимальні варіанти. Подібно тому, як в механіці для аналізу коливальних процесів механізмів застосовують фігури Ліссажу.

Отже, на актуальність обраної теми вказує необхідність розробки інженерного способу знаходження значень набору параметрів для забезпечення нехаотичної періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Історія виникнення досліджень, присвячених коливанням хитної пружини, розпочалася із квантово-механічного пояснення ефекту розщеплення ліній у спектрі комбінаційного розсіювання на молекулі  $C_2$ . Тоді ж було висловлено

припущення, що ефект має не квантову, а класичну механічну природу коливань. А саме – ефект обумовлений внутрішніми особливостями коливань молекули, де частота коливань одного типу приблизно вдвічі перевищує частоту коливань другого типу. Вчені вирішили перевірити це на моделі хитної пружини. Розрахований рух такої системи показав, що при співвідношенні частот 2:1 повинно наставати періодично повне перекачування енергії з вертикальних коливань у горизонтальні й назад.

Доцільність дослідження хитної пружини виникла у зв'язку з виявленими можливостями їх «нестандартних» використань як в теоретичному плані, так і на практиці. Однак більшість досліджень зосереджуються на аналітичних апроксимаціях для слабозв'язаних систем і енергетичних обмінів, які виникають, коли підсистеми перебувають у резонансі. Ефективним механізмом енергообміну є параметричний механізм [9]. Зокрема, хитна пружина із двома ступенями свободи є автопараметричною системою, що являє собою основу для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Крім того, хитна пружина має значення завдяки можливості якісного подання багатьох нелінійних сполучених систем. Серед цих подань назвемо класичний аналог для коливальних мод трьохатомних молекул, який реалізує резонанс Фермі в інфрачервоному й комбінаційному спектрах [1].

Коливання хитних пружин мають безпосереднє відношення до динаміки літаків і кораблів. Були виявлені ефекти порушення стійкості й керованості швидкохідних кораблів і надзвукових літаків. Виявилось, що найбільш інтенсивне розгойдування бічних коливань має місце, коли коливання за кутом атаки відбуваються із частотою вдвічі більшої частоти бічних коливань [10]. У будівельній механіці важливу роль грає видозмінена модель хитної пружини – модель гнучкої нитки. Гнучка нитка – це своєрідна пружина, що діє тільки на розтягнення. У типовій двовимірній моделі гнучка нитка одночасно може здійснювати поперечні коливання у своїй площині (аналог кутових коливань хитної пружини з вантажем) і маятникові коливання, що поєднують опорні закріплення (аналог вертикальних коливань) [6, 11]. При співвідношенні частот цих коливань 1:2 відбувається втрата динамічної стійкості, коли виникають поперечні коливання нитки, амплітуда яких може досягати досить великих значень. Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій (вісячих мостів, вантово-балкових систем, канатних доріг, ліній електропередачі, різних космічних тросових системи для втримання об'єктів, гнучких шлангів, різноманітних антен, тощо) [3].

У роботах [12, 13] наведено теоретичне дослідження плоских малих нелінійних коливань хитної пружини з нелінійною залежністю натягу пружини від її подовження. Використовується метод гамільтонової нормальної форми. Рішення гамільтонових рівнянь нормальної форми показали, що періодична перебудова коливань між вертикальною й

горизонтальною модами відбувається тільки у випадку резонансів 1:1 і 2:1. У всіх інших випадках, як при наявності резонансу, так і при його відсутності, коливання відбуваються із двома постійними частотами.

У роботі [14] вивчаються зміни в поведінці хитної пружини, коли під контролем параметра один відгук стає нестійким і замінюється іншим. Вибірка Пуанкаре використовується для зведення проблеми опису стійкості граничного циклу до більш простої задачі визначення стійкості нерухомої точки відображенням Пуанкаре. В роботі [15] розглянуто зв'язок нормальних мод коливань хитного маятника. Наводяться коментарі про експерименти, пов'язані з порушенням нормальних режимів. В роботі [16] досліджено системи хитної пружини поблизу резонансу за допомогою «повільного флуктуаційного» наближення, яке полягає в застосуванні тригонометричних поліномів і збереженні тільки члена з найповільнішої частотою. У роботі [17] показано, що інтегральне наближення просторової хитної пружини, налаштованої на резонанс 1:1:2, має монохромію, а ступінчастий кут прецесії площини коливання резонансного пружинного маятника є числом обертання інтегрального наближення. Стаття [18] присвячена коливанням хитного маятника, точка підвісу якого рухома уздовж вертикальної лінії. Періодичні рішення рівняння одержують з використанням детермінантів Хілла. Розроблена обчислювальна процедура використовується для визначення комбінацій параметрів системи, для яких можливі періодичні рішення. У роботі [19] досліджується просторова хитна пружина, яка має резонанс 2:1:1, наближено описаний лагранжіаном. В описах використано гамільтонові скорочення та методи виведення зразків. В результаті отримано формулу, яка описує ступінчасту прецесію азимутального кута. У роботі [20] перетікання енергії між подовжніми і маятниковими коливаннями розглядається як пульсація. Пульсація і ступінчаста прецесія є характерними особливостями динаміки хитної пружини. Для визначення повного аналітичного рішення використано гамільтонову редукцію. У статті [21] динаміка пружинного маятника досліджується з використанням асимптотичних методів. Методи теорії нелінійних нормальних форм коливань дозволили дослідити динаміку маятника не тільки для малих, але і для значних амплітуд коливань.

Але всі наведені роботи мають переважно теоретичне спрямування. Для інженерної практики необхідні способи побудови реальних нехаотичних періодичних траєкторій вантажів хитних пружин. Деякі з них описані в роботі [22], де наведено приклади періодичних траєкторій, а також в [23], де проведено дослідження умов побудови періодичних траєкторій. У роботі [24] наведено програму мовою Математика, за допомогою якої можна будувати періодичні траєкторії подвійного маятника. Робота [25] присвячена дослідженню зв'язку можливої траєкторії вантажу хитної пружини з фігурами Ліссажу. В роботі [26] наведено maple-програму побудови траєкторії вантажу хитної пружини.

Інший спосіб побудови траєкторій руху вантажу хитної пружини запропоновано в роботі [27]. У роботі [28] наведені приклади періодичних траєкторій хитних пружин. В роботі [29] досліджуються коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Але у відомих роботах відсутній універсальний підхід до побудови періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Також відсутні аналізи коливань за допомогою фазових траєкторій функцій, які входять до опису узагальнених координат відповідної коливальної системи.

У роботі [30] для побудови періодичних траєкторій вантажів різновидів математичних маятників наведено спосіб проєкційного фокусування. В роботі [31] розглянуті приклади реалізації цього способу.

В результаті огляду літературних джерел [1–29] були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступну проблему досліджень. Розробити спосіб знаходження значень набору параметрів, які б забезпечили нехаотичну періодичну траєкторію руху точкового вантажу хитної пружини – тобто вантажу на підвішеній вертикально пружині, яка здійснює маятникові коливання.

#### **Формулювання цілей статті.**

– навести варіанти розрахунків для одержання періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини, коли задані:

– довжина без навантаження та жорсткість, але невідомою є значення маси вантажу;

– довжина без навантаження та величина маси вантажу, але невідомою є жорсткість пружини;

– величина маси вантажу та жорсткість, але невідомою є довжина пружини без навантаження;

#### **Основна частина.**

1. Обчислення періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Наведемо спосіб визначення траєкторії переміщення по вертикальній площині  $Oxy$  вантажу хитної пружини залежно від маси вантажу, початкової довжини пружини у ненавантаженому стані, жорсткості пружини і початкових умов для виникнення коливань.

Задамо умови ідеалізації коливань хитної пружини:

– коливання здійснюється у вертикальній площині, якій належить точка кріплення (підвісу);

– маса вантажу зосереджена в одній точці, розташованій на осі пружини з незакріпленого кінця;

– пружина є невагомою і вісь пружини залишається прямолінійною в процесі коливань;

– опори у вузлах і опір повітря під час коливань відсутні;

– процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу (коливальна система є консервативною);

– параметри і початкові умови задаються в умовних числових одиницях.

Схему хитної пружини зображено на рис. 2.

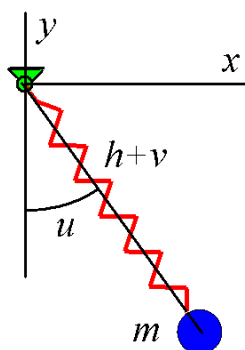


Рис. 2. Схema хитної пружини

У якості першої узагальненої координатної функції  $u(t)$  оберемо значення кута, який вісь хитної пружини утворює з вертикальною віссю  $Oy$ . Другу узагальнену координатну функцію  $v(t)$  пов'яжемо з подовжньою зміною довжини пружини в часі; через  $h$  позначимо довжину хитної пружини в ненавантаженому стані. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами:

$$x = (h + v) \sin u; \quad y = -(h + v) \cos u. \quad (1)$$

Лагранжіан задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій ( $g=9.81$ ):

$$L = 0.5m \left[ \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + (h + v) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \right] - 0.5kv^2 - mg(h + v)(1 - \cos u) - mgv. \quad (2)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (тут точка означає похідну по часу):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \quad (3)$$

В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$(v + h) \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{du}{dt} + g \sin u = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - (v + h) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{kv}{m} - g \cos u = 0.$$

**Постановка задачі.** Визначити значення маси  $m$ , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю  $k$  і довжиною  $h$  у ненавантаженому стані. У початковому положенні хитна пружина розташована вертикально, тобто  $u(0)=0$ . Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсу, наданого вантажу пружини у



напрямку осі  $Ox$ :  $du(0)=1,5$ . Величину 1,5 можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини кута  $u$ . Початкові значення для параметра  $v$  подовження пружини оберемо у вигляді  $v(0)=1$ ;  $dv(0)=0$ .

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (4) із початковими умовами  $u(0)=0$ ;  $du(0)=1,5$ ;  $v(0)=1$ ;  $dv(0)=0$ . Обранням параметрів  $m$ ,  $k$  і  $h$  маємо забезпечити періодичність траєкторії вантажу хитної пружини.

*Приклад 1.* Нехай  $k=30$  і  $h=1$ . В якості керуючого параметра коливання хитної пружини оберемо значення маси  $m$ . На рис. 3 зображено інтегральні криві у фазових просторах  $\{u, Du, t\}$  і  $\{v, Dv, t\}$  для знайденого критичного значення  $m_0=3,332$ . В результаті одержано фазові траєкторії на площинах  $\{u, Du\}$  і  $\{v, Dv\}$  (рис. 4), за допомогою яких можна визначити в процесі коливання хитної пружини діапазони зміни величини кута та його швидкості (координатна функція  $u(t)$ ), а також подовження пружини та швидкості подовження (координатна функція  $v(t)$ ).

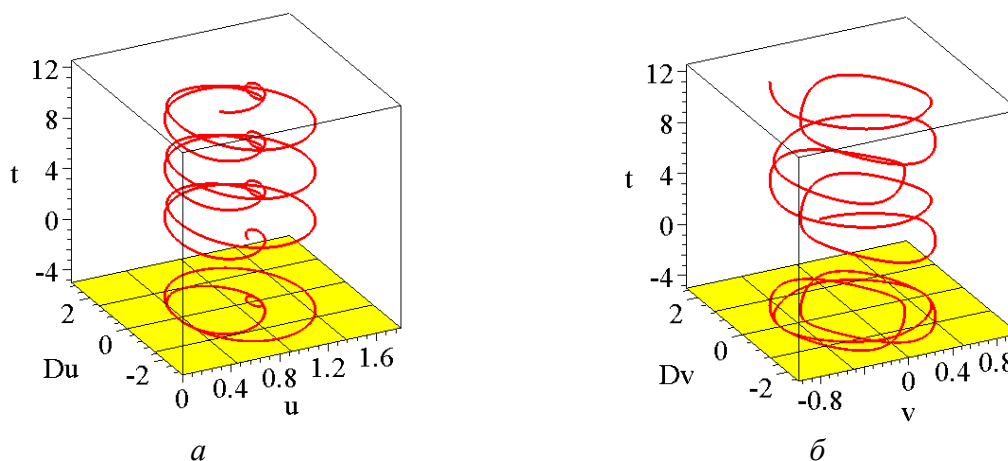


Рис. 3. Інтегральні криві для критичного значення  $m=3,332$  у фазових просторах:  $a - \{u, Du, t\}$ ;  $b - \{v, Dv, t\}$

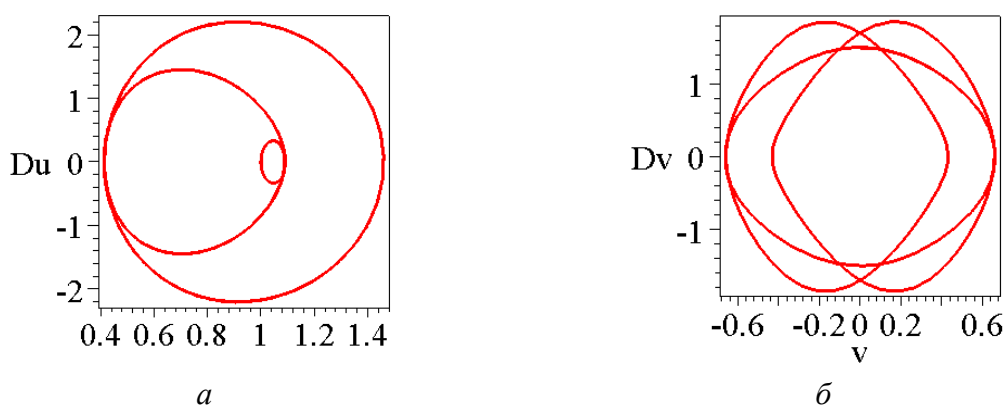


Рис. 4. Фазові траєкторії на площинах  $\{u, Du\}$  і  $\{v, Dv\}$  для:  $a -$  координатної функції  $u(t)$ ;  $b -$  координатної функції  $v(t)$

Після обчислення  $m_0$  необхідно його значення підставити на місце  $m$  в систему рівнянь Лагранжа другого роду (4) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій  $u(t)$  і  $v(t)$ . Одержимо послідовність значень  $(u_i, v_i)$  при  $t=t_i$  (де  $i=1\dots S$ ). Для побудови траєкторії руху другого

вантажу на площині  $Oxy$  слід у вирази (1) віртуальних координат  $(x, y)$  підставити послідовність значень  $(u_i, v_i)$ . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині  $Oxy$  траєкторії руху вантажу хитної пружини (рис. 5).

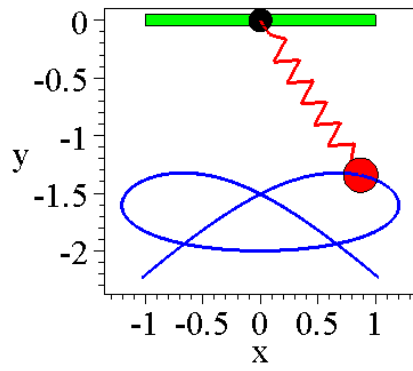


Рис. 5. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 1

*Приклад 2.* Нехай  $m=1$  і  $h=1$ . В якості керуючого параметра оберемо значення жорсткості  $k$ . На рис. 6 зображено інтегральні криві у фазових просторах  $\{u, Du, t\}$  і  $\{v, Dv, t\}$  для знайденого критичного значення  $k_0=14,4$ . На рис. 7 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити діапазони їх змін.

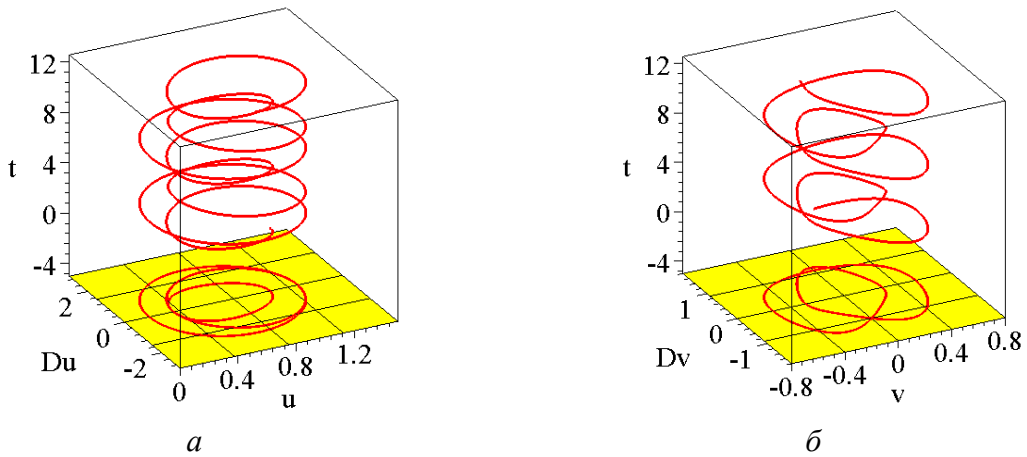


Рис. 6. Інтегральні криві для критичного значення  $k=14,4$  у фазових просторах:  $a - \{u, Du, t\}$ ;  $b - \{v, Dv, t\}$

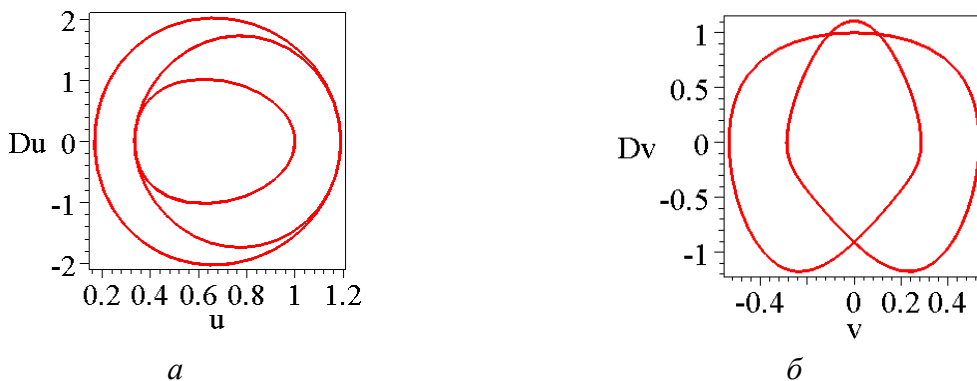


Рис. 7. Фазові траєкторії на площинах  $\{u, Du\}$  і  $\{v, Dv\}$ :  $a -$  координатної функції  $u(t)$ ;  $b -$  координатної функції  $v(t)$

Після обчислення  $k_0=14,4$  необхідно його значення підставити на місце  $k$  в систему рівнянь Лагранжа другого роду (4) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій  $u(t)$  і  $v(t)$ . Одержимо послідовність значень  $(u_i, v_i)$  при  $t=t_i$  (де  $i=1\dots S$ ). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині  $Oxy$  слід у виразі (1) віртуальних координат  $(x, y)$  підставити послідовність значень  $(u_i, v_i)$ . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині  $Oxy$  траєкторії руху вантажу хитної пружини (рис. 8).

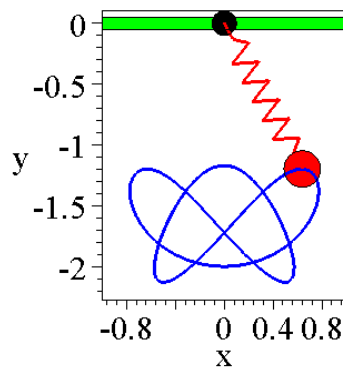


Рис. 8. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 2

*Приклад 3.* Нехай  $m=1$  і  $k=10$ . В якості керуючого параметра оберемо довжину  $h$  хитної пружини без навантаження. На рис. 9 зображено інтегральні криві у фазових просторах  $\{u, Du, t\}$  і  $\{v, Dv, t\}$  для знайденого критичного значення  $h_0=0,39$ . На рис. 10 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін.

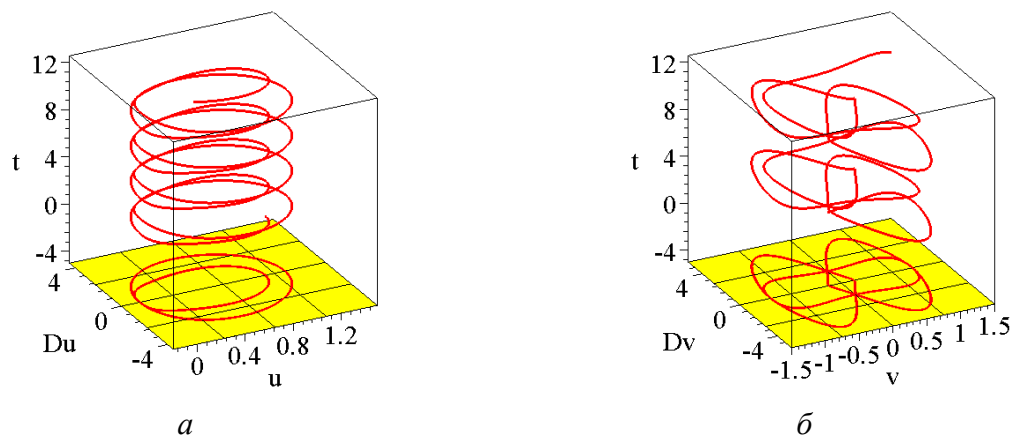


Рис. 9. Інтегральні криві для критичного значення  $h=0,39$  у фазових просторах:  $a - \{u, Du, t\}$ ;  $b - \{v, Dv, t\}$

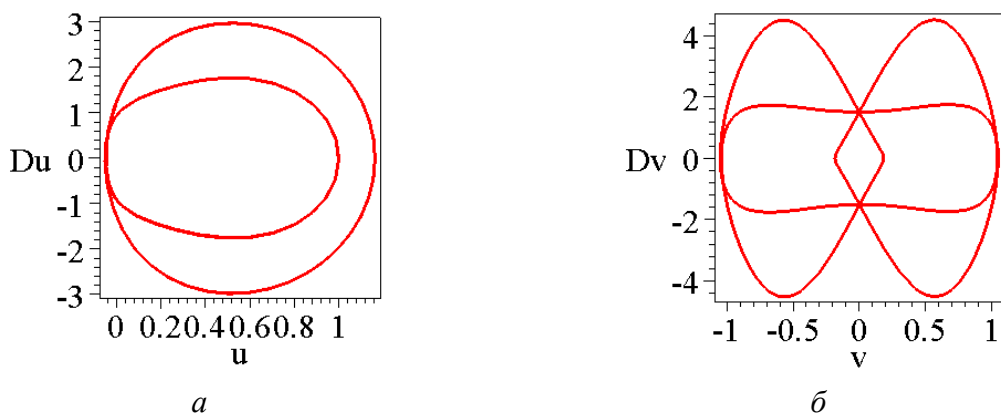


Рис. 10. Фазові траєкторії на площинах  $\{u, Du\}$  і  $\{v, Dv\}$ :  
 $a$  – координатної функції  $u(t)$ ;  $b$  – координатної функції  $v(t)$

Після обчислення  $h_0=0,39$  необхідно його значення підставити на місце  $h$  в систему рівнянь Лагранжа другого роду (4) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій  $u(t)$  і  $v(t)$ . Одержимо послідовність значень  $(u_i, v_i)$  при  $t=t_i$  (де  $i=1\dots S$ ). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині  $Oxy$  слід у виразі (1) віртуальних координат  $(x, y)$  підставити послідовність значень  $(u_i, v_i)$ . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині  $Oxy$  періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини (рис. 11).

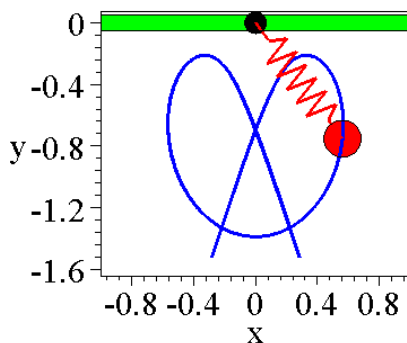


Рис. 11. Траєкторії руху вантажу хитної пружини для прикладу 3

Зазначимо, що знайдені способом проекційного фокусування критичні значення керуючого параметра можна підтвердити за допомогою графіка насиченості зображення лінії фазової траєкторії. Тобто графіка залежності кількості пікселів  $Np$  зображення фазової траєкторії від значення керуючого параметра.

**Перспективи досліджень.** Отримані результати можна пояснити можливістю застосування варіаційного принципу Лагранжа до розрахунку механічних коливань типу хитної пружини. Це дозволило використати рівняння Лагранжа другого роду для опису руху її вантажу.

Дослідження необхідно продовжити у напрямку використання

хитної пружини як моделі для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Адже для хитної пружини ідентифікуються необхідні для цього три енергетичні компоненти, подібні рухам пружини, рухам маятника, а також зв'язку між ними. Такий підхід може бути застосований, в принципі, до довільних нелінійних зв'язаних систем, щоб показати, як зв'язок опосередкує внутрішні енергетичні обміни і як розподіл енергії змінюється відповідно до параметрів системи.

Цікаво буде дослідити із зазначених позицій нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами на прикладах задач техніки. Першою сходинкою до цієї мети буде дослідження механічних пристроїв, де пружини впливатимуть на траєкторії коливання їх вантажів. У якості прикладів доцільно розглянути механізми з рухомими вантажами, схеми які мають вигляд:

- двох пружин зі спільним вантажем;
- маятника, закріпленого до підвішеної пружини;
- маятника, на довжину якого впливає пружина;
- маятника під рухомим візком, на положення якого впливає пружина;
- вантажа на кінці пружини, підвішеній до рухомого візка.

Труднощі розвитку досліджень в цьому напрямку виникнуть при спробі розв'язати обернену задачу в такій постановці. Нехай маємо криву, форма якої належить класу фігур Ліссажу. Необхідно підібрати значення параметрів хитної пружини (маси вантажу, жорсткості пружини, та її довжини у ненавантаженому стані) так, щоб траєкторія руху вантажу була подібна обраній кривій.

### **Висновки.**

Наведено варіанти розрахунків для одержання періодичної траєкторії переміщення вантажу хитної пружини, коли задані її параметри:

- жорсткість пружини та її довжина без навантаження з невідомою величиною маси вантажу (наприклад,  $h=1$ ;  $m=3.332$ ;  $k=40$ ;  $v_0=1$ ;  $Dv_0=0$ :  $u_0=0$ ;  $Du_0=1.5$ ;  $T=8.4$ );
- величина маси вантажу пружини та її довжина без навантаження з невідомою жорсткістю пружини (наприклад,  $h=1$ ;  $m=1$ ;  $k=14.4$ ;  $v_0=1$ ;  $Dv_0=0$ :  $u_0=0$ ;  $Du_0=1$ ;  $T=8.4$ );
- величина маси вантажу пружини та її жорсткість з невідомою довжиною пружини без навантаження (наприклад,  $h=0.39$ ;  $m=2$ ;  $k=40$ ;  $v_0=1$ ;  $Dv_0=0$ :  $u_0=0$ ;  $Du_0=1.5$ ;  $T=6$ ).

### **Література**

1. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm / De Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. / *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2018. Vol. 509. P. 1110–1119. doi:

<https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.089>

2. Власов В. Н. Величайшая Революция в Механике 4. URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2114-vls.pdf>

3. Булдакова Д. А., Курюшин А. В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники / *Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ»*. 2015. Т. 6, № 2. С. 238–243.

4. Lynch P. The swinging spring: a simple model for atmospheric balance. *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics: Vol. II: Geometric Methods and Models*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. 50 p.

5. Алдошин Г. Т., Яковлев С. П. Аналитическая модель колебаний молекулы углекислого газа. Резонанс Ферми / *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 1. С. 42–53.

6. Zhang P., Ren L., Li H., Jia Z., Jiang T. Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum / *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Vol. 2015. P. 1–10. doi: <https://doi.org/10.1155/2015/671632>

7. Castillo-Rivera S., Tomas-Rodriguez M. Helicopter flap/lag energy exchange study // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 88, Issue 4. P. 2933–2946. doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3422-4>

8. Богданов К. Ю. Хищник и жертва // *Квант*. 1993. № 2. URL: [http://kvant.mccme.ru/1993/02/hishchnik\\_i\\_zhertva.htm](http://kvant.mccme.ru/1993/02/hishchnik_i_zhertva.htm)

9. Gendelman O. V. Transition of Energy to a Nonlinear Localized Mode in a Highly Asymmetric System of Two Oscillators // *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. 2001. P. 237–253. doi: [https://doi.org/10.1007/978-94-017-2452-4\\_13](https://doi.org/10.1007/978-94-017-2452-4_13)

10. Алдошин Г. Т. Замечания к методу линеаризации нелинейных уравнений с двумя степенями свободы / *В сб. «Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе»*. Труды международной научно-практической конференции. Т. 1. М.: МФЮФ, 2009.

11. Бубнович Э. В., Молдагананова А. Г. К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити. URL: <http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагананова%20.pdf>

12. Петров А. Г. О вынужденных колебаниях качающейся пружины при резонансе / *Доклады Академии наук*. 2015. Т. 464, № 5. С. 553–557. doi: <https://doi.org/10.7868/s0869565215290113>

13. Петров А. Г., Шундерюк М. М. О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине / *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 2. С. 27–40.

14. Bayly P. V., Virgin L. N. An Empirical Study of the Stability of Periodic Motion in the Forced Spring-Pendulum / *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1993. Vol. 443, Issue 1918. P. 391–408. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0152>

15. Duka B., Duka R. On the elastic pendulum, parametric resonance and “pumping” swings / *European Journal of Physics*. 2018.

doi: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aaf146>

16. Breitenberger E., Mueller R. D. The elastic pendulum: A nonlinear paradigm / *Journal of Mathematical Physics*. 1981. Vol. 22, Issue 6. P. 1196–1210. doi: <https://doi.org/10.1063/1.525030>

17. Dullin H., Giacobbe A., Cushman R. Monodromy in the resonant swing spring / *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 190, Issue 1-2. P. 15–37. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.10.004>

18. Ryland G., Meirovitch L. Stability boundaries of a swinging spring with oscillating support / *Journal of Sound and Vibration*. 1977. Vol. 51, Issue 4. P. 547–560. doi: [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(77\)80051-5](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(77)80051-5)

19. Holm D. D., Lynch P. Stepwise Precession of the Resonant Swinging Spring / *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2002. Vol. 1, Issue 1. P. 44–64. doi: <https://doi.org/10.1137/s1111111101388571>

20. Lynch P., Houghton C. Pulsation and precession of the resonant swinging spring / *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 190, Issue 1-2. P. 38–62. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.09.043>

21. Клименко А. А., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика пружинного маятника / *Динамические системы*. 2009. Вып. 27. С. 51–65.

22. Broucke R., Baха P. A. Periodic solutions of a spring-pendulum system / *Celestial Mechanics*. 1973. Vol. 8, Issue 2. P. 261–267. doi: <https://doi.org/10.1007/bf01231426>

23. Hitzl D. L. The swinging spring invariant curves formed by quasi-periodic solution. III // *Astron and Astrophys*. 1975. Vol. 41, Issue 2. P. 187–198.

24. Моделирование движения двойного маятника в Декартовой системе координат. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/advanced-hybrid-and-differential-algebraic-equations/double-pendulum.html>

25. The Spring Pendulum (Optional). URL: <http://homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/CTLC3rdEd/ProjectsOldCD/estroyan/cd/46/index.htm>

26. Gavin H. P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints / *CEE 541. Structural Dynamics*. Department of Civil and Environmental Engineering Duke University, 2014. 23 p.

27. Van der Weele J. P., de Kleine E. The order-chaos-order sequence in the spring pendulum / *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1996. Vol. 228, Issue 1-4. P. 245–272. doi: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(95\)00426-2](https://doi.org/10.1016/0378-4371(95)00426-2)

28. File:Spring pendulum.gif. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Spring\\_pendulum.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Spring_pendulum.gif)

29. Алдошин Г. Т., Яковлев С. П. Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом / *Вестник Санкт-Петербургского университета*. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 4. С. 45–52.

30. Semkiv O., Shoman O., Sukharkova E., Zhurilo A., Fedchenko H. Development of projection technique for determining the non-chaotic oscillation trajectories in the conservative pendulum systems / *Eastern-European Journal*

- of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 2, Issue 4 (86). P. 48–57. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95764>
31. *Kutsenko L., Semkiv O., Asotskyi V., Zapolskiy L., Shoman O., Ismailova N. et al.* Geometric modeling of the unfolding of a rod structure in the form of a double spherical pendulum in weightlessness / *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 4, Issue 7 (94). P. 13–24. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139595>
32. *Куценко Л. М. Пікрасов М. М., Запольський Л. Л.* Ілюстрації до статті "Геометричне моделювання періодичної траєкторії вантажу хитної пружини". 2018. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>

## References

1. *De Sousa, M. C., Marcus, F. A., Caldas, I. L., Viana, R. L.* (2018). Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 509, 1110–1119. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.089>
2. *Vlasov, V. N.* Velichayshaya Revolyuciya v Mekhanike 4. Available at: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2114-vls.pdf>
3. *Buldakova, D. A., Kiryushin, A. V.* (2015). Model of the shaking spring pendulum in the history of physics and equipment. *Elektronnoe nauchnoe izdanie «Uchenye zametki TOGU»*, 6 (2), 238–243.
4. *Lynch, P.* (2001). The swinging spring: a simple model for atmospheric balance. *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics: Vol. II: Geometric Methods and Models*. Cambridge University Press, Cambridge, 50.
5. *Aldoshin, G. T., Yakovlev, S. P.* (2015). Analiticheskaya model' kolebaniy molekuly uglekislogo gaza. *Rezonans Fermi. Izv. RAN. MTT*, 1, 42–53.
6. *Zhang, P., Ren, L., Li, H., Jia, Z., Jiang, T.* (2015). Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 1–10. doi: <https://doi.org/10.1155/2015/671632>
7. *Castillo-Rivera, S., Tomas-Rodriguez, M.* (2017). Helicopter flap/lag energy exchange study. *Nonlinear Dynamics*, 88 (4), 2933–2946. doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3422-4>
8. *Bogdanov, K. Yu.* (1993). Hishchnik i zhertva. *Kvant*, 2. Available at: [http://kvant.mccme.ru/1993/02/hishchnik\\_i\\_zhertva.htm](http://kvant.mccme.ru/1993/02/hishchnik_i_zhertva.htm)
9. *Gendelman, O. V.* (2001). Transition of Energy to a Nonlinear Localized Mode in a Highly Asymmetric System of Two Oscillators. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*, 237–253. doi: [https://doi.org/10.1007/978-94-017-2452-4\\_13](https://doi.org/10.1007/978-94-017-2452-4_13)
10. *Aldoshin, G. T.* (2009). Zamechaniya k metodu linearizacii nelineynyh uravneniy s dvumya stepenyami svobody. *V sb. «Matematika, informatika, estestvoznaniye v ekonomike i obshchestve»*. Trudy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferencii. Vol. 1. Moscow: MFYUF.



11. *Bubnovich, E. V., Moldaganapova, A. G.* К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити. Available at: <http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагананпова%20.pdf>
12. *Petrov, A. G.* (2015). О вынужденных колебаниях качающемся пружине при резонансе. *Doklady Akademii nauk*, 464 (5), 553–557. doi: <https://doi.org/10.7868/s0869565215290113>
13. *Petrov, A. G., Shunderiyuk, M. M.* (2010). О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине. *Izv. RAN. MTT*, 2, 27–40.
14. *Bayly, P. V., Virgin, L. N.* (1993). An Empirical Study of the Stability of Periodic Motion in the Forced Spring-Pendulum. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 443 (1918), 391–408. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0152>
15. *Duka, B., Duka, R.* (2018). On the elastic pendulum, parametric resonance and “pumping” swings. *European Journal of Physics*. 2018. doi: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aaf146>
16. *Breitenberger, E., Mueller, R. D.* (1981). The elastic pendulum: A nonlinear paradigm. *Journal of Mathematical Physics*, 22 (6), 1196–1210. doi: <https://doi.org/10.1063/1.525030>
17. *Dullin, H., Giacobbe, A., Cushman, R.* (2004). Monodromy in the resonant swing spring. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 190 (1-2), 15–37. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.10.004>
18. *Ryland, G., Meirovitch, L.* (1977). Stability boundaries of a swinging spring with oscillating support. *Journal of Sound and Vibration*, 51 (4), 547–560. doi: [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(77\)80051-5](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(77)80051-5)
19. *Holm, D. D., Lynch, P.* (2002). Stepwise Precession of the Resonant Swinging Spring. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 1 (1), 44–64. doi: <https://doi.org/10.1137/s1111111101388571>
20. *Lynch, P., Houghton, C.* (2004). Pulsation and precession of the resonant swinging spring. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 190 (1-2), 38–62. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.09.043>
21. *Klimenko, A. A., Mihlin, Yu. V.* (2009). Нелинейная динамика пружинного маятника. *Динамические системы*, 27, 51–65.
22. *Broucke, R., Baxa, P. A.* (1973). Periodic solutions of a spring-pendulum system. *Celestial Mechanics*, 8 (2), 261–267. doi: <https://doi.org/10.1007/bf01231426>
23. *Hitzl, D. L.* (1975). The swinging spring invariant curves formed by quasi-periodic solution. III. *Astron and Astrophys*, 41 (2), 187–198.
24. Моделирование движения двойного маятника в Декартовой системе координат. Available at: <https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/advanced-hybrid-and-differential-algebraic-equations/double-pendulum.html>
25. The Spring Pendulum (Optional). Available at: <http://homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/CTLC3rdEd/ProjectsOldCD/estroyan/cd/46/index.htm>
26. *Gavin, H. P.* (2014). Generalized Coordinates, Lagrange’s Equations, and

Constraints. *CEE 541*. Structural Dynamics. Department of Civil and Environmental Engineering Duke University, 23.

27. Van der Weele, J. P., de Kleine, E. (1996). The order-chaos-order sequence in the spring pendulum. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 228 (1-4), 245–272. doi: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(95\)00426-2](https://doi.org/10.1016/0378-4371(95)00426-2)

28. File:Spring pendulum.gif. Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Spring\\_pendulum.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Spring_pendulum.gif)

29. Aldoshin, G. T., Yakovlev, S. P. (2012). Dynamics of a swinging spring with moving support. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 4, 45–52.

30. Semkiv, O., Shoman, O., Sukharkova, E., Zhurilo, A., Fedchenko, H. (2017). Development of projection technique for determining the non-chaotic oscillation trajectories in the conservative pendulum systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (4 (86)), 48–57. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95764>

31. Kutsenko, L., Semkiv, O., Asotskyi, V., Zapolskiy, L., Shoman, O., Ismailova, N. et. al. (2018). Geometric modeling of the unfolding of a rod structure in the form of a double spherical pendulum in weightlessness. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4 (7 (94)), 13–24. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139595>

32. Kutsenko, L. M. Piksasov, M. M., Zapolskiy, L. L. (2018). Iliustratsiyi do statti "Heometrychne modeliuвання periodychnoi traiektoriyi vantazhu khytnoi pruzhyny". Available at: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>

Д. Т. Н., профессор **Шоман О. В.**,  
[olgasho@ukr.net](mailto:olgasho@ukr.net), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4952-7498>

К. Т. Н., доцент **Адашевская И. Ю.**,  
[adashevaska@ukr.net](mailto:adashevaska@ukr.net), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5447-5114>

К. Т. Н., доцент **Шелихова И. Б.**,  
[inessa.shelikhova@gmail.com](mailto:inessa.shelikhova@gmail.com), ORCID: 0000-0002-5637-1850

К. Т. Н., доцент **Сивак Е. М.**,  
[lskolos@i.ua](mailto:lskolos@i.ua), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5526-8544>

доцент **Даниленко В. Я.**,  
[vladdanyl@ukr.net](mailto:vladdanyl@ukr.net), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4952-7498>

Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»

## РАСЧЕТ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУЗА КАЧАЮЩЕЙМЯ ПРУЖИНЫ

*Рассматриваются маятниковые колебания в вертикальной плоскости подвешенной невесомой пружины, сохраняющей при этом прямолинейность своей оси. В литературе такой вид маятника называют*

*качающейся пружиной (swinging spring). Искомая траектория груза качающейся пружины при помощи компьютера моделируется с использованием значений массы груза, жесткости пружины и ее длины без нагрузки. Кроме того, используются начальные величины параметров инициализации колебаний качающейся пружины: начальный угол отклонения оси пружины от вертикали, начальная скорость изменения величины этого угла, а также начальный параметр удлинения пружины и начальная скорость изменения удлинения. Расчеты выполнены с помощью уравнения Лагранжа второго рода. Рассмотрены варианты нахождения условно периодических траекторий движения точечного груза качающейся пружины с подвижной точкой крепления.*

*Актуальность темы определяется необходимостью исследования и усовершенствования новых технологических схем механических устройств, в состав которых входят пружины. В частности, исследования условий отмежевания от хаотичных колебаний элементов механических конструкций и определения рациональных значений параметров для обеспечения периодических траекторий их колебаний.*

*Приведены варианты расчетов для получения периодических траектории движения груза, когда заданные параметры:*

*– длина пружины без нагрузки и ее жесткость с неизвестной величиной массы груза;*

*– длина пружины без нагрузки и величина массы груза с неизвестной жесткостью пружины;*

*– величина массы груза и жесткость пружины с неизвестной длиной пружины без нагрузки.*

*Результаты можно использовать как парадигму для изучения нелинейных связанных систем, а также при расчетах вариантов механических устройств, когда необходимо отмежеваться от хаотичных перемещений грузов, а обеспечить периодические траектории их движения.*

*Ключевые слова: маятниковые колебания; периодические траектории движения; качающаяся пружина; уравнение Лагранжа второго рода.*

**Doctor of Technical Science, Professor Olga Shoman,**  
olgasho@ukr.net, ORCID: [http:// orcid.org/0000-0003-4952-7498](http://orcid.org/0000-0003-4952-7498)

**Ph. D., assoc. prof. Irina Adashevskaya,**  
adashevskaya@ukr.net , ORCID: [http:// orcid.org/0000-0001-5447-5114](http://orcid.org/0000-0001-5447-5114)

**Ph. D., assoc. prof. Inessa Shelikhova,**  
inessa.shelikhova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5637-1850

**Ph. D., assoc. prof. Elizaveta Sivak,**  
lskolos@i.ua, ORCID: [https:// orcid.org/ 0000-0002-5526-8544](https://orcid.org/0000-0002-5526-8544)

## **CALCULATION OF A TRAJECTORY FOR THE MOVEMENT OF A LOAD OF SWINGING SPRING**

*Pendulum oscillations in the vertical plane of a suspended weightless spring, while maintaining the straightness of its axis, are considered. In the literature, this type of pendulum is called a swinging spring. The required trajectory of the load of the swinging spring is modeled using a computer using the values of the mass of the load, the stiffness of the spring and its length without load. In addition, the initial values of the parameters for initiating oscillations of the oscillating spring are used: the initial angle of deviation of the spring axis from the vertical, the initial rate of change of this angle, as well as the initial parameter of the spring elongation and the initial rate of change of the elongation. The calculations were performed using the Lagrange equation of the second kind. Variants of finding conditionally periodic trajectories of movement of a point load of a swinging spring with a movable attachment point are considered.*

*The relevance of the topic is determined by the need to research and improve new technological schemes of mechanical devices, which include springs. In particular, the study of the conditions for separating from chaotic vibrations of mechanical structure elements and determining the rational values of parameters to ensure periodic trajectories of their vibrations.*

*Calculation options are given to obtain periodic trajectories of cargo movement, when the given parameters are:*

- the length of the spring without load and its stiffness with an unknown value of the mass of the load;*
- the length of the spring without load and the value of the mass of the load with an unknown spring stiffness;*
- the value of the mass of the load and the stiffness of the spring with an unknown length of the spring without load.*

*The results can be used as a paradigm for studying nonlinear coupled systems, as well as for calculating options for mechanical devices, when it is necessary to dissociate themselves from chaotic movements of loads, and provide periodic trajectories of their movement.*

*Key Words: pendulum oscillations; periodic motion trajectories; swinging spring; Lagrange equation of the second kind.*