

д. т. н., професор **Л. М. Куценко**,

leokuts@i.ua, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1554-8848>

к. т. н., доцент **А. Я. Калиновський**,

kalinovskiy.a@nuczu.edu.ua, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1021-5799>

Національний університет цивільного захисту України, (м. Харків)

д. т. н., ст. н. с. **Л. Л. Запольський**,

z\_1\_1@i.ua, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4357-2933>

Український науково-дослідний інститут цивільного захисту, (м. Київ)

## **МОДЕЛЮВАННЯ У НЕВАГОМОСТІ ЗМІНИ ФОРМИ СТЕРЖНЕВОЇ КОНСТРУКЦІЇ, ПОДІБНОЇ ПОДВІЙНОМУ СФЕРИЧНОМУ МАЯТНИКУ**

*Досліджено геометричну модель нового способу розкриття в умовах невагомості стержневої конструкції, подібної подвійному сферичному маятнику. Переміщення елементів конструкції відбуваються завдяки дії імпульсів піротехнічних реактивних двигунів на кінцеві точки ланок. Опис руху одержаного інерційного розкриття стержневої конструкції виконано за допомогою рівняння Лагранжа другого роду, і, зважаючи на умови невагомості, побудованого з використанням лише кінетичної енергії системи.*

*На актуальність обраної теми вказує необхідність дослідження процесу активізації розкриття просторової стержневої конструкції для виконання аварійно-рятувальних робіт. В якості рушіїв пропонується використати імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок конструкції. Легші і дешевші порівняно, наприклад, з електродвигунами або пружинними пристроями. А також економічно вигідніші, коли процес розкриття конструкції на орбіті планується виконати лише один раз.*

*Запропоновано спосіб визначення параметрів та початкових умов ініціювання коливань подвійної стержневої конструкції з метою одержання циклічної траєкторії кінцевої точки другої ланки. Це дозволяє при розрахунках процесу трансформування уникати хаотичних рухів елементів конструкції. Побудовано графіки зміни у часі функцій узагальнених координат, а також перших та других похідних цих функцій. Тому з'явилася можливість оцінити силові характеристики системи в момент гальмування (стопоріння) процесу розкриття.*

*Результати можуть використовуватися як геометричні моделі варіантів розкриття великогабаритних об'єктів в умовах невагомості, наприклад, силових каркасів космічних антен чи фермених конструкцій, а також інших орбітальних інфраструктур, необхідних при плануванні та виконанні аварійно-рятувальних робіт.*

*Ключові слова: стержнева конструкція; процес розкриття на орбіті; двохланкова сферична конструкція; рівняння Лагранжа другого роду.*

**Постановка проблеми.** Спорудження каркасів орбітальних космічних інфраструктур, а також виконання аварійно-рятувальних робіт пов'язані з трансформуванням стержневих конструкцій з метою надання їм необхідного просторового розташування. Компоненти конструкцій доставляються на орбіту у згорнутому вигляді. Після чого необхідно використати певну технологію трансформування розташування стержнів з метою надання всій конструкції запланованої просторової форми. Такі перетворення здійснюються за допомогою механічної операції розкриття [1, 2]. При транспортуванні з Землі заготовки конструкцій виглядають, переважно, як прямолінійні стержні, скріплені між собою подібно елементам багатоланкового маятника. Розкриття подвійної стержневої конструкції доцільно розглядати як аналог «коливання» подвійного сферичного маятника у невагомості. Керування розкриттям великогабаритних конструкцій у просторі є складною науково-технічною задачею механіки, яка не має аналогів у наземній техніці. Порівняно просто це можливо реалізувати для подвійної (двохланкової) стержневої конструкції. Зазначимо, що термін «маятник» у випадку невагомості застосовувати не коректно. Тому далі частіше вживатимемо термін «подвійна сферична стержнева конструкція (або система)».

При реалізації розкриття подвійної сферичної стержневої конструкції у невагомості виникають дві ключові технологічні проблеми – вибору способів активізації її руху, а також механізму фіксації (стопоріння) процесу розкриття. Перша проблема пов'язана з вибором рушійних сил для ініціювання розкриття стержневих конструкцій. Не менш важливою є проблема фіксації кутів між ланками з використанням спеціальних пристроїв, вмонтованих у сферичні шарніри. При цьому необхідні дані про величину сил, які виникають у вузлах в момент фіксації. В якості засобів ініціювання розкриття конструкції пропонується використовувати імпульсні реактивні двигуни (типу піропатронів), встановлених на кінцевих точках ланок стержневої конструкції. А також розглядається спосіб визначення величин сил в вузлах конструкції в момент закінчення розкриття.

Динаміку процесу розкриття конструкції у вигляді подвійної сферичної стержневої системи доцільно досліджувати на основі варіаційного принципу Лагранжа. Виникає питання про адаптування до невагомості «коливання» подвійної сферичної стержневої системи як основи геометричної моделі розкриття орбітального об'єкта. Відповідь на це питання можна знайти у роботах, присвячених застосуванню рівнянь Лагранжа другого роду для механічних систем у невагомості [3–5]. Формально вважається, що розрахунки стосовно трансформування у часі механічних стержневих конструкцій у невагомості можна виконувати,

користуючись лише поняттями кінетичних енергій. Тобто при складанні рівнянь Лагранжа другого роду потенціальну енергію консервативної механічної системи можна вважати «близькою до нуля». Після ініціювання коливань піротехнічними імпульсами, величина кінетичної енергії для малого проміжку часу має залишатися незмінною. При подальших дослідженнях такі умови можна зняти.

Зазначені припущення дозволяють розробити формальний (ідеалізований) підхід до геометричного моделювання розкриття стержневих конструкцій – аналогів подвійних сферичних маятників. До цього в процесі розрахунків ще необхідно запобігати хаотичним рухам стержневих конструкцій. Для уникнення хаотичності при формоутворенні конструкції необхідно параметри підібрати так, щоб кінцева точка другої ланки рухалась по циклічній траєкторії.

Цінність геометричного моделювання проявляється у створених комп'ютерних анімаційних фільмах, де унаочнюється взаємне переміщення ланок подвійних сферичних стержневих конструкцій в процесі розкриття. Використання розроблених моделей допоможе на етапі проектування розрахувати компоновку та параметри функціонування конструкції в цілому.

Отже, на актуальність обраної теми вказує необхідність дослідження і запровадження імпульсного пристрою як легкого і дешевого рушія процесу розкриття стержневої конструкції типу подвійного сферичного маятника. Це буде економічно оправдано, коли на орбіті процес розкриття конструкції планується здійснити лише один раз. В якості такого рушія пропонується використати імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок подвійної сферичної стержневої конструкції. Піротехнічні пристрої набагато легші і дешевші порівняно з відомими засобами ініціювання розкриття конструкції. Наприклад, порівняно з електродвигунами або пружинними пристроями з термопам'яттю. Все це вказує на доцільність дослідження геометричних моделей розкриття стержневих конструкцій в умовах невагомості з імпульсними реактивними двигунами на кінцевих точках ланок.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Для розрахунків на площині геометричної форми послідовних фаз розкриття «маятникоподібних» стержневих конструкцій доцільно використати дослідження динаміки багатоланкових маятників. На практиці це виглядає [6] як складання та розв'язання рівнянь Лагранжа другого роду руху механічної системи відносно узагальнених координат. А також дослідження динаміки багатоланкового маятника, виконаного, наприклад, методами дробного числення [7]. Але в цих (і аналогічних) роботах не достатньо уваги приділено графічному трактуванню одержаних розв'язків.

Для розкриття стержневих конструкцій використовують переважно каркасні тросові системи. У роботах [8–10] наведені математичні моделі

процесу розкриття багатоланкової каркасної конструкції із тросовою системою синхронізації. Але застосування тросової системи розкриття на практиці обмежено розмірами конструкції та необхідністю синхронізувати дію електродвигунів, що є самостійною задачею при великій кількості ланок. Каркасну тросову систему можна вважати прототипом розглянутого у роботі способу розкриття багатоланкової стержневої конструкції.

Для чисельного аналізу процесу розкриття конструкцій, що трансформуються, використовують можливості сучасних пакетів моделювання динаміки механічних систем. Робота [11] присвячена методу розрахунку великогабаритних конструкцій, що розкриваються, з використанням програмних комплексів MSC.Software. В роботі [12] наведено приклад розрахунку розкриття за допомогою комплексу автоматизованого динамічного аналізу багатокomпонентних механічних систем EULER. Але зазначені програмні продукти не розраховані без відповідних надбудов на реалізацію «імпульсних» способів розкриття багатоланкових конструкцій. Інші варіанти систем розкриття наведені у огляді літератури [13], але там відсутня інформація про «імпульсні» способи розкриття багатоланкових стержневих конструкцій і перевага віддається тросовим системам, про недоліки який йшлося раніше.

Теоретичне значення для моделювання розкриття просторових подвійних стержневих конструкцій мають роботи, присвячені дослідженню коливань сферичних та подвійних сферичних маятників. У роботі [14] виконується моделювання руху сферичного маятника, закріпленого на обертовій платформі. У роботі [15] аналізується динаміка коливань сферичного маятника з тривимірною періодичною вібрацією точки підвісу. Питання динаміки сферичного маятника з вібруючою точкою підвісу розглянуто в роботі [16]. У роботі [17] чисельним інтегруванням рівняння руху досліджено динамічний режим повороту гнучкої ланки маятника з метою збільшення плавності приводного зусилля.

Багато робіт, спрямованих на дослідження просторових маятників, спираються на дослідження сферичного маятника і його варіантів. В роботі [18] вивчаються нові моделі маятників, які вважаються твердими тілами з трьома обертовими ступенями свободи. Іноді зручно для цього використовувати єдину модель циліндра твердого тіла [19]. У роботі [20] розглянуто 3D-маятник як тверде тіло, яке тримається на фіксованому шарнірі з трьома обертовими ступенями свободи. Особливості просторових математичних маятників розглянуто у роботах [21, 22]. Але результати зазначених робіт є скоріше теоретичними, адже складно покласти в основу алгоритму моделювання коливань. Більш складні просторові маятникові конфігурації вивчаються як об'єкти нелінійного аналізу, а також для тестування або розробки методів керування й стабілізації різноманітними об'єктами. Наприклад, у роботі [23] розглядається загальна модель інвертованого множинного керування

маятником з використанням одиночного крутного моменту. Аналогічне питання стосувалося і задачі про маятник з візком, що рухається [24]. В роботі [25] розглянуто інвертований подвійний твердотільний маятник, який контролюється чотирма зовнішніми моментами. Ще одна широка область застосування маятникових моделей стосується демпфування й стабілізації явищ, які можна інтерпретувати за допомогою математичної подвійної маяткової моделі [26]. В роботі [27] представлено результати чисельних розрахунків складної механічної системи, аналогічної подвійному сферичному маятнику. Цікаво, що результати тут пояснюються з використанням множинної графічної інтерпретації. У роботі [28] досліджується модельне відображення й візуалізація орбіт подвійного сферичного маятника. В роботі [29] параметри коливань подвійного сферичного маятника обчислюються на базі лагранжевої механіки. У роботі [30] подвійні маятникові конфігурації динамічної системи також моделюються лагранжевою механікою, використовуючи математичні пакети MapleTM і Matlab. На сайті [31] наведено коди мовою Matlab для моделювання коливань подвійного сферичного маятника. Але в зазначених роботах не надано графічне підтвердження результатів моделювання.

У роботах [32–35] започатковано геометричну модель розкриття на уявній площині у невагомості стержневої конструкції як багатоланкового маятника. Вважалося, що рушіями розкриття є імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок. Проведені тестові розрахунки показали можливість застосування багатоланкових стержневих конструкцій з спільною точкою кріплення. На сайті [36] наведено комп'ютерні анімаційні зображення для ілюстрації основних положень даної роботи.

В результаті огляду літературних джерел [8–30] були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступну проблему досліджень. Для реалізації ідеї розкриття сферичних двохланкових конструкцій у невагомості імпульсами реактивних двигунів ще не розв'язаними залишаються питання поєднання величин імпульсів з узагальненими координатами подвійних сферичних стержневих конструкцій. А також зі схемою ініціювання руху елементів конструкції шляхом впливу імпульсів двигунів на кінцеві точки ланок. Також не вирішеним є питання оцінки величини сили, яка виникає у вузлових елементах в момент фіксації (стопоріння) елементів двохланкової конструкції в наперед розрахованому розкритому стані.

**Формулювання цілей статті.** Продемонструвати на конкретних прикладах реалізацію геометричної моделі розкриття в умовах невагомості стержневої конструкції, аналогічної подвійному сферичному маятнику. Для цього необхідно:

– скласти та розв’язати систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду для опису в невагомості фаз руху елементів подвійних сферичних стержневих конструкцій;

– для моделювання дії імпульсних реактивних двигунів розробити схему ініціювання руху подвійних сферичних стержневих конструкцій шляхом впливу імпульсів двигунів на кінцеві точки ланок;

– за допомогою комп’ютерної анімації спрогнозувати у часі взаємне розташування у просторі ланок подвійних сферичних стержневих конструкцій та визначити на цій базі необхідний для експерименту момент фіксації (стопоріння) розкриття;

– для запобігання хаотичних рухів в процесі розкриття розробити спосіб визначення параметрів та початкових умов ініціювання коливань подвійної стержневої конструкції для одержання циклічної траєкторії кінцевої точки другої ланки;

– побудувати графіки зміни у часі функцій узагальнених координат, а також перших та других похідних цих функцій; на базі цього оцінити силові характеристики системи в момент фіксації (стопоріння) розкриття.

**Основна частина.** Розглянемо основні етапи розробки геометричної моделі процесу розкриття у невагомості стержневої конструкції, аналогічної подвійному сферичному маятнику.

**Етап 1.** При реалізації будь-якої схеми розкриття стержневої конструкції у невагомості виникає проблема вибору рушійних сил як засобів активізації цього процесу. Тобто вибір технічних пристроїв або технологічних процесів для ініціювання розкриття стержневих конструкцій на орбіті. На практиці найбільш ймовірним є одноразове розкриття, коли стержнева конструкція набуває геометричної форми і фіксується відразу після доставки на орбіту. Тоді електродвигуни або інші технічні пристрої після розкриття і фіксування конструкції будуть не ефективними і становитимуть зайвий вантаж. Альтернативу цьому можуть скласти піротехнічні імпульсні реактивні двигуни.

Для пояснення ідеї виникнення руху розглянемо невагомий нерозтяжний стержень довжини  $r$  з точкою кріплення  $O$ , до кінцевої точки  $C$  якого приєднано вантаж масою  $m$  (рис. 1). Нерухомість точки кріплення забезпечується завдяки її приєднанню до космічного апарату, маса якого на порядки більша маси вантажу маятника.

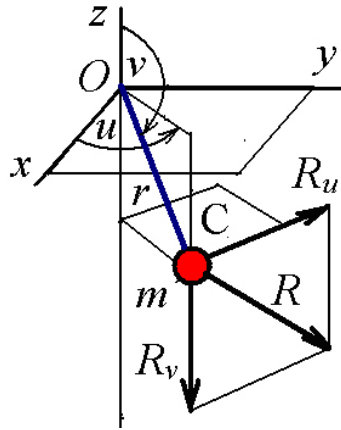


Рис. 1. Схема сферичного маятника

Ініціювання коливань у невагомості сферичного стержня (назва за аналогією зі сферичним маятником) здійснюється шляхом вибору напрямку дії та величини імпульсу, наданих кінцевій точці стержня за допомогою реактивного двигуна імпульсного типу. Узагальненими координатами вважатимемо кути  $u(t)$  і  $v(t)$ , утворені горизонтальною проекцією стержня з віссю  $Ox$  і стержнем з віссю  $Oz$ . Позначимо віртуальний вектор  $\mathbf{R}_V$  дії імпульсу за напрямком розкриття кута  $v$  і віртуальний вектор  $\mathbf{R}_U$  дії імпульсу за напрямком розкриття кута  $u$ . Шуканий напрямок дії імпульсу реактивного двигуна визначатиме сумарний реальний вектор  $\mathbf{R}=\mathbf{R}_U+\mathbf{R}_V$ . Розташування реактивного двигуна пов'яжемо з точкою  $C$  і вважатимемо вантажем стержневої конструкції масою  $m$ .

Початкове положення стержня будемо визначати координатами вектора  $\mathbf{U}_0=\{u(0), v(0)\}$ . Виразом  $\mathbf{U}_0'=\{u'(0), v'(0)\}$  позначимо величини швидкостей ініціювання коливань. Цей вираз означає, що вантажу масою  $m$  надано імпульс величиною  $mu'(0)$  за напрямком розкриття кута  $u$ , та одночасно з цим імпульс величиною  $mv'(0)$  за напрямком розкриття кута  $v$ . Тобто кутам розкриття  $u(0)$  і  $v(0)$  надано початкові швидкості  $u'(0)$  і  $v'(0)$ , відповідно. З врахуванням цього маятникова система далі має розкриватися за інерцією, що пояснює термін «інерційна система розкриття». У якості піротехнічного імпульсного реактивного двигуна можна використати довільний пристрій, здатний забезпечити наперед розраховану величину імпульсу (наприклад, піропатрон). Отже, можливість використання розрахункових величин імпульсів реактивних двигунів базується на зв'язку з числовими значеннями миттєвих швидкостей  $u'(0)$  і  $v'(0)$ .

Розрахунки коливання сферичної стержневої конструкції виконаємо за допомогою лагранжіана [18], опис якого співпадає з виразом для кінетичної енергії

$$L = 0,5rm(x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos(u(t)) \sin(v(t)); \\y(t) &= r \sin(u(t)) \sin(v(t)); \\z(t) &= r \cos(v(t)).\end{aligned}\tag{2}$$

З врахуванням (2) вираз для лагранжіана набуде вигляду

$$L = 0,5mr^2 (u'^2 - u'^2 \cos^2 v + v'^2).\tag{3}$$

Тут  $u' = \frac{d}{dt}u(t)$ ;  $v' = \frac{d}{dt}v(t)$  – похідні функції опису узагальнених координат. З використанням виразу (3) одержуємо систему двох рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned}u'' - u'' \cos^2 v + u'v' \sin 2v &= 0; \\v'' - u'^2 \cos v \sin v &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

При розв'язанні системи рівнянь (4) крім довжини стержня  $r$  і маси вантажу  $m$  слід враховувати значення початкових кутів відхилень  $U_0 = \{u(0), v(0)\}$ , а також значень швидкостей, наданих кутам відхилень:  $U_0' = \{u'(0), v'(0)\}$ . З виконанням початкових умов систему рівнянь (4) розв'язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету Maple. Одержані розв'язки умовно позначено символами  $U(t)$ ,  $V(t)$ . Це дозволяє у просторовій системі координат  $Oxyz$  за допомогою формул (2) визначити координати кінцевої точки  $(x_C, y_C, z_C)$  ланки в момент часу  $t$ . Для обчислення цих координат у виразах функцій (2) опису координат необхідно формально замінити малі літери  $u$  і  $v$  на великі  $U$  і  $V$ . Наближений вигляд траєкторії переміщення кінцевої точки  $C$  одержимо, сполучивши близькі точки відрізками.

Наведемо приклади зображення результатів руху сферичного стержня у невагомості (рис. 2, а). Для порівняння траєкторій переміщення кінцевої точки стержня зобразимо результати коливання також і у полі земного тяжіння (рис. 2, б) з тими ж початковими умовами. Параметри руху:  $r=1$ ;  $m=1$ ;  $U_0 = \{0, \pi/2\}$ ,  $U_0' = \{1.56, 2\}$ . Час інтегрування  $T=5$ .



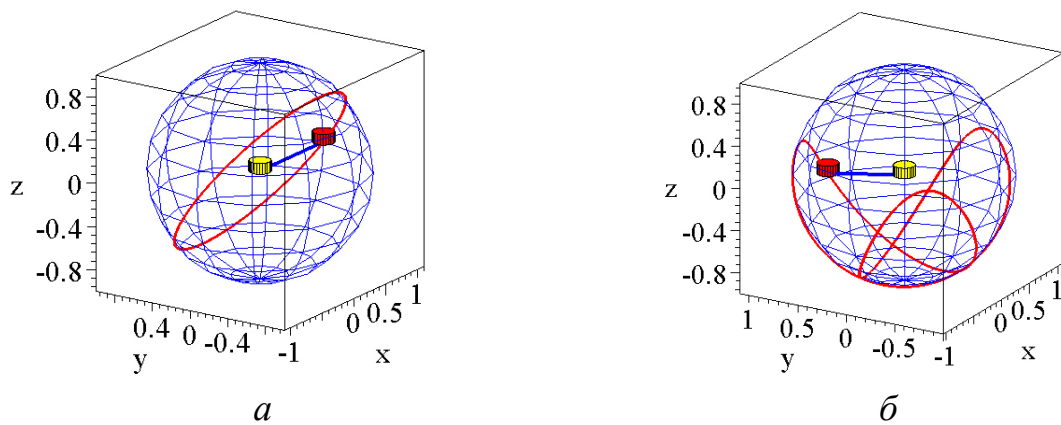


Рис. 2. Траєкторія руху точки С:  
а – в невагомості; б – в полі земного тяжіння

Далі розглянемо рух у невагомості подвійної сферичної стержневої конструкції. Вважається, що подвійна стержнева конструкція приєднується до сферичного шарніру, закріпленого на космічному апараті. Маса апарату на порядки більша сумарної маси елементів конструкції, тому вузол кріплення вважається нерухомим. Також вважатимемо, що стержні виготовлено з легкого та міцного вуглепластика, тому вся маса стержневої конструкції буде зосереджена у вантажах вузлових точок. Початок першої ланки закріплено до нерухомої точки  $O$ , а початок другої ланки приєднано до кінцевої точки першої ланки з координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  (рис. 3). Узагальненими координатами вважатимемо кути  $u_1(t)$  і  $v_1(t)$ , а також  $u_2(t)$  і  $v_2(t)$ , утворені відповідними горизонтальними проекціями стержнів з віссю  $Ox$ , а також відповідними стержнями з віссю  $Oz$  (рис. 3).

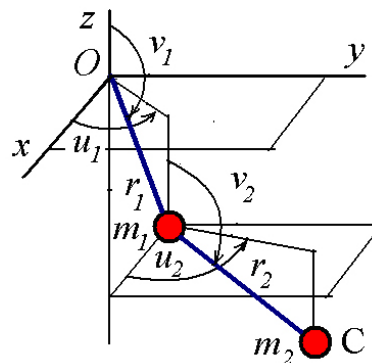


Рис. 3. Схема подвійної сферичної стержневої конструкції

Ініціювання коливань подвійної сферичної стержневої конструкції у невагомості здійснюється аналогічно сферичному стержню попереднього прикладу. А саме – шляхом вибору напрямку дії та величини імпульсів, наданих прикінцевим точкам ланок маятника за допомогою реактивних двигунів імпульсного типу. Віртуальний вектор  $\mathbf{R}_{v1}$  одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута  $v_1$ , а віртуальний вектор  $\mathbf{R}_{u1}$  одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута  $u_1$ . Сумарний реальний вектор  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{u1} + \mathbf{R}_{v1}$  визначає необхідний напрямок дії

імпульсу першого реактивного двигуна. Аналогічно, віртуальний вектор  $\mathbf{R}_{V2}$  одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута  $v_2$ , а віртуальний вектор  $\mathbf{R}_{U2}$  одержуємо внаслідок дії імпульсу за напрямком розкриття кута  $u_2$ . Сумарний реальний вектор  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{U2} + \mathbf{R}_{V2}$  визначає необхідний напрямок дії імпульсу другого реактивного двигуна.

Початкове положення подвійної стержневої конструкції будемо визначати координатами вектора  $\mathbf{U}_0 = \{u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)\}$ . Виразом  $\mathbf{U}_0' = \{u_1'(0), v_1'(0), u_2'(0), v_2'(0)\}$  позначимо величини швидкостей ініціювання коливань. Цей вираз означає, що вантажу масою  $m_1$  надано імпульс величиною  $m_1 u_1'(0)$  за напрямком розкриття кута  $u_1$ , та одночасно з цим імпульс величиною  $m_1 v_1'(0)$  за напрямком розкриття кута  $v_1$ . Теж саме стосується і другої пари кутів та маси  $m_2$ . Звідси слідує, що кутам розкриття  $u_1(0)$  і  $v_1(0)$  надано початкові швидкості  $u_1'(0)$  і  $v_1'(0)$ , а кутам розкриття  $u_2(0)$  і  $v_2(0)$  – швидкості  $u_2'(0)$  і  $v_2'(0)$ , відповідно. Отже, можливість використання розрахункових величин імпульсів реактивних двигунів також базується на зв'язку з числовими значеннями миттєвих швидкостей  $u'(0)$  і  $v'(0)$ .

Вимоги до організацій дії піротехнічних рушіїв стержневої конструкції висуває конкретні умови до конструкції сферичного шарніру, розташованого між ланками конструкції. А саме, сферичний шарнір у вузлі повинен забезпечувати розкриття його ланок за умови існування двох осей обертання, яка проходить через центральну точку шарніру. Цього можна досягти завдяки належній конструкції сферичного шарніру вузла маятника, описаній, наприклад, в роботах [37, 38].

До важливих моментів організації руху стержневої конструкції належить можливість запобігти хаотичних рухам стержневих конструкцій. Зазначене досягається за допомогою належного вибору величин піротехнічних рушіїв для забезпечення рухів елементів, зрозумілих для розрахунків. Це можна досягти організацію циклічних нехаотичних траєкторій кінцевої точки другої ланки.

**Етап 2.** Для розуміння характеру коливань двохланкових сферичних стержневих конструкцій необхідно мати прогнозовану траєкторію переміщення кінцевої вузлової точки другої ланки маятника. Прийнятною кривою при цьому буде нехаотична циклічна траєкторія. Циклічною назвемо траєкторію переміщення кінцевої точки  $C(x_C, y_C, z_C)$  двохланкової конструкції, геометрична форма якої періодично повторюється (можливо і наближено). Циклічність траєкторії забезпечується вибором параметрів конструкції та початкових умов.

Умовою  $\mathbf{U}_0 = \{u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)\}$  забезпечуються «стартова» геометрична форма конструкції. У нашому випадку вона повинна мати «складений» вигляд, зручний для доставки на орбіту. Наприклад, в подальших прикладах буде застосована така умова  $\mathbf{U}_0 = \{0, \pi/2, -\pi, \pi/2\}$ . Для

коригування форми траєкторії залишається умова  $\mathbf{U}_0' = \{u_1'(0), v_1'(0), u_2'(0), v_2'(0)\}$ , що визначає величини швидкостей ініціювання коливань. З цими швидкостями слід погоджувати величини піротехнічних зарядів.

Таким чином, виникає питання: як для значень початкових кутів відхилень  $\mathbf{U}_0 = \{u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)\}$ , довжин ланок:  $\mathbf{L} = \{r_1, r_2\}$  та значень мас вантажів  $\mathbf{m} = \{m_1, m_2\}$  знайти такі значення швидкостей відхилень  $\mathbf{U}_0' = \{u_1'(0), v_1'(0), u_2'(0), v_2'(0)\}$ , щоб траєкторія кінцевої точки другої ланки мала б циклічний характер.

У роботі [39] наведено спосіб визначення набору параметрів коливань маятників (в полі земного тяжіння, що не позбавляє узагальнення), які б забезпечили циклічну траєкторію переміщення другого вантажу подвійного маятника.

Нехай маємо консервативну коливальну систему, до опису якої серед інших входить і узагальнена координата – позначимо її як функцію  $u(t)$ . Чисельно розв'яжемо диференціальні рівняння Лагранжа другого роду та побудуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазовому просторі  $\{u, Du, t\}$  узагальненої змінної  $u(t)$ . Зображення складатиметься із множини відрізків, що з'єднують послідовні точки, одержані в результаті наближеного розв'язання рівняння. Це унаочнення залежатиме від певного значення «керуючого» параметра задачі або значення початкової умови (позначимо його як  $p$ ). При випадкових значеннях  $p$  у фазовому просторі  $\{u, Du, t\}$  утвориться «плутана» інтегральна крива, проекція якої на фазову площину  $\{u, Du\}$  також буде «плутаною» фазовою траєкторією (рис. 4, а). Вибір випадкового значення  $p$  при розрахунках призведе до хаотичних коливань вантажу маятника. У разі зміни значень «керуючого» параметра  $p$  має змінюватися і характер фазової траєкторії. При критичному значенні  $p = p_0$  характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – вона перетвориться у «сфокусовану» криву (рис. 4, б).

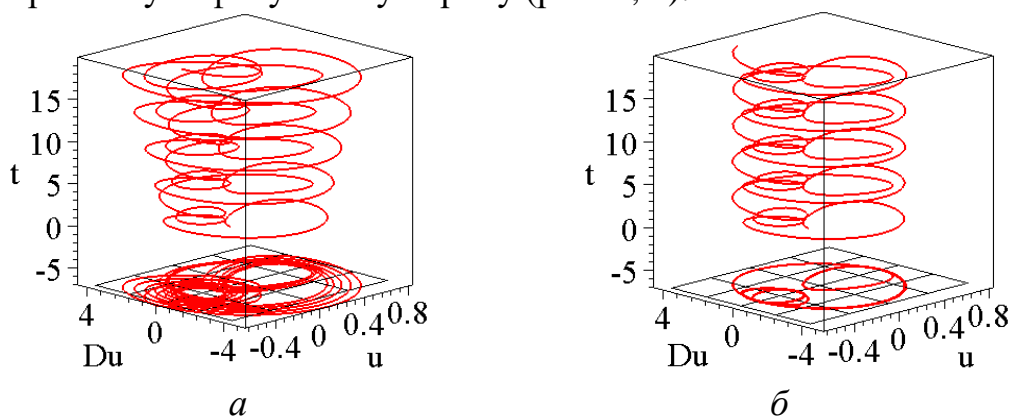


Рис. 4. Інтегральні криві і фазові траєкторії для:  
 а – випадкового значення  $p$ ; б – обчисленого значення  $p = p_0$

На фазовій площині  $\{u, Du\}$  відбудеться ніби оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій (в роботі [39] цей

феномен названо проєкційним фокусуванням). Урахування значення параметра  $p=p_0$  у процесі розв'язання рівняння Лагранжа другого роду дозволяє обчислити координати точок, які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії сліду маятника. Отже, нехаотичні технологічні траєкторії коливання елемента маятнкової механічної системи проявляються на зображеннях фазових траєкторій у вигляді «сфокусованих» кривих. Інакше це можна сформулювати так: критичне значення параметра  $p$  одержимо в момент, коли зображення проєкції інтегральної кривої на фазову площину (тобто фазової траєкторії) набуде мінімальної площі (у піксельному вимірі).

На практиці наведений підхід було реалізовано з застосуванням бібліотеки обробки графічної інформації ImageTools пакету maple. Наведемо відповідний текст фрагменту програми.

Нехай маємо  $S$  масивів точок за умови, що  $s$ -тий з них визначає сім'ю кривих,  $\mathbf{x}[i] := \text{solu}(w)$ ;  $\mathbf{y}[i] := \text{dsolu}(w)$ , коли параметри  $s$  і  $w$  змінюється з одиничним кроком від нуля до  $S$  і  $W$ , відповідно. Для формування зображення та його аналізу використаємо maple програму, фрагменти якої наведено на рис. 5, а–б.

```
for i from 0 to S do
plotsetup(bmp, plotoutput =
cat(`C://TEMP//`, i, `.`, bmp));
display(Gr[i]);
plotsetup(default)
end do;
```

*a*

```
for i from 0 to S do
img[i] := Read(cat(cat(cat
("C://TEMP/"), i), ".bmp"))
end do:
for s from 0 to S do;
R := 1:G := 1:B := 1:kk := 0:
for i to N do for j to M do
if `and`(`and`(img[s][i,j,1] =
R, img[s][i, j, 2] = G),
img[s][i, j, 3] = B)
then kk := kk+1 end if
end do end do;
K[s] := N*M - kk;
end do:
min([seq(K[s], s=0..S)]).
```

*б*

Рис. 5. Блоки програми для формування зображення та його аналізу:  
*a* – перетворення точкового зображення кривої в графічний файл;  
*б* – визначення значення  $s$ , яке відповідає мінімальній кількості пікселів

В результаті виконання програми буде визначено значення параметра  $s$ , що відповідатиме мінімальній кількості пікселів в прямокутнику з пікселів розміром  $N$  на  $M$ . З використанням знайденого параметра  $s$  можливо обчислити значення керуючого параметра та зобразити циклічну нехаотичну траєкторію другого вантажу маятника. Значення всіх параметрів в умовних величинах.

**Етап 3.** Розрахунки коливання подвійної сферичної стержневої конструкції виконаємо за допомогою лагранжіана [28], опис якого за умови невагомості співпадає з виразом для кінетичної енергії

$$L = 0,5r_1m_1(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + 0,5r_2m_2(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2), \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r_1 \cos(u_1(t)) \sin(v_1(t)); \\ y_1(t) &= r_1 \sin(u_1(t)) \sin(v_1(t)); \\ z_1(t) &= r_1 \cos(v_1(t)); \\ x_c(t) &= r_1 \cos(u_1(t)) \sin(v_1(t)) + r_2 \cos(u_2(t)) \sin(v_2(t)); \\ y_c(t) &= r_1 \sin(u_1(t)) \sin(v_1(t)) + r_2 \sin(u_2(t)) \sin(v_2(t)); \\ z_c(t) &= r_1 \cos(v_1(t)) + r_2 \cos(v_2(t)). \end{aligned} \quad (6)$$

З використанням лагранжіану (5) та формул (6) складаємо систему чотирьох рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u_1'} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} &= 0; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_1'} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_1} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u_2'} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} &= 0; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_2'} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_2} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $u_1' = \frac{d}{dt}u_1(t)$ ;  $v_1' = \frac{d}{dt}v_1(t)$ ;  $u_2' = \frac{d}{dt}u_2(t)$ ;  $v_2' = \frac{d}{dt}v_2(t)$  – похідні функції опису узагальнених координат. З причини громіздкості рівняння (7) в розгорнутому вигляді не наводяться.

При розв'язанні системи рівнянь Лагранжа другого роду слід враховувати координати таких векторів: довжин ланок:  $\mathbf{L}=\{r_1, r_2\}$ ; значень мас вантажів:  $\mathbf{m}=\{m_1, m_2\}$ ; значень початкових кутів відхилень:  $\mathbf{U}_0=\{u_1(0),$

$v_1(0), u_2(0), v_2(0)\}$ , а також значень швидкостей  $U_0'=\{u_1'(0), v_1'(0), u_2'(0), v_2'(0)\}$ , наданих кутам відхилень.

З виконанням початкових умов систему рівнянь Лагранжа другого роду (7) розв'язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету *maple*. Математичний пакет *maple* спроможний оперувати з інформацією у вигляді аналітичних виразів. Наприклад, оперувати з одержаним «комп'ютерним» наближеним розв'язком диференціального рівняння як зі звичайною функцією. Одержані розв'язки умовно позначено символами  $U_1(t), V_1(t), U_2(t), V_2(t)$ . Це дозволяє у просторовій системі координат  $Oxyz$  за допомогою формул (6) визначити «реальні» координати кінцевої вузлової точки  $(x_c, u_c, z_c)$  другої ланки маятника в момент часу  $t$ . Для обчислення цих координат у виразах функцій (6) опису координат вузлових елементів маятників необхідно формально замінити малі літери  $u$  і  $v$  на великі  $U$  і  $V$  [34]. Наближений вигляд траєкторії переміщення прикінцевої точки  $C$  одержимо, сполучивши близькі точки відрізками.

Далі наведено приклади геометричного моделювання розкриття двохланкових сферичних стержневих механізмів. Значення всіх параметрів наведено в умовних величинах. Враховуючи те, що двохланкова конструкція доставлятиметься на орбіту у складеному вигляді, то у всіх прикладах одна з початкових умов матиме вигляд  $U_0=\{0, \pi/2, -\pi, \pi/2\}$ . Також вважатимемо, що  $m_1=1$  і  $m_2=1$ . Силкові характеристики обчислюються як добуток маси на значення другої похідної (прискорення). У наведених прикладах було розраховано системи з шести подвійних сферичних стержневих конструкцій у межах площини зі спільною нерухомою точкою [32]. Кути між початковими розташуваннями стержневих конструкцій складають  $\pi/3$  (рис. 6).

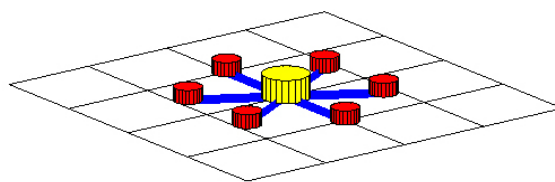


Рис. 6. Початкове положення шести двохланкових конструкцій у межах площини

Для кожного з прикладів було обчислено і побудовано:

- значення швидкостей, наданих кутам відхилень, які забезпечують циклічну нехаотичну траєкторію кінцевої точки другої стержневої конструкції та її зображення;
- деякі фази розташування ланок двохланкових стержневих механізмів в процесі розкриття;
- фазові траєкторії функцій узагальнених координат, які відповідають циклічній нехаотичній траєкторії кінцевої точки другої ланки;

– графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, а також перших (швидкості) та других (прискорення) похідних цих функцій;

– з графіків прискорення визначено графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції:

$$Fu_1=m_1d^2u_1(t)dt^2; Fv_1=m_1d^2v_1(t)dt^2; Fu_2=m_2d^2u_2(t)dt^2; Fv_2=m_2d^2v_2(t)dt^2.$$

На сайті [36] наведено анімаційні зображенн процесів розкриття подвійних сферичних стержневих конструкцій.

*Приклад 1.*  $r_1=2$ ;  $r_2=1$ ;  $U_0'=\{1, -1.024, 1.9, 0.5\}$ . Час інтегрування  $T = 6,6$ . На рис. 7 наведено циклічну траєкторію руху кінцевої точки  $C$  та положення подвійної конструкції в деякі моменту часу. На рис. 8 зображено фазові траєкторії функцій узагальнених координат, які відповідають циклічній нехаотичній траєкторії кінцевої точки другої ланки.

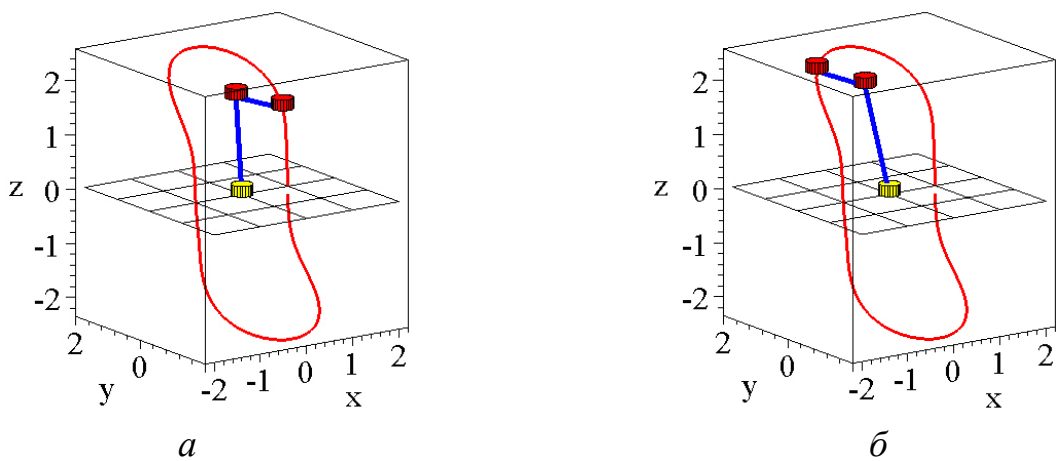
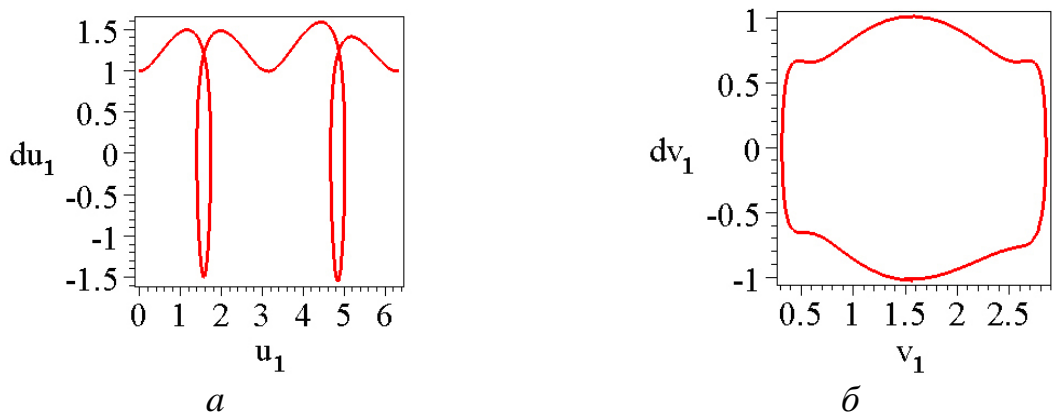


Рис. 7. Циклічна траєкторія руху точки  $C$  для прикладу 1:  
 $a - t=0.858$ ;  $б - t=1.98$



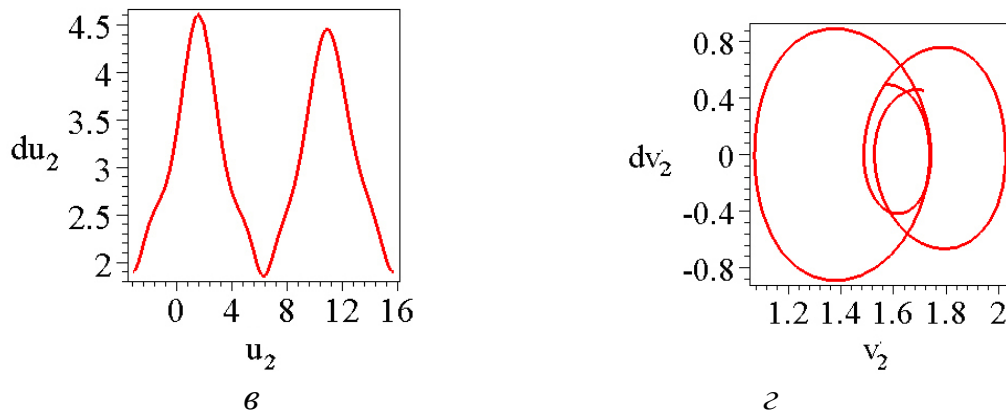


Рис. 8. Фазові траєкторії узагальнених координат для прикладу 1:  
*a* –  $u_1(t)$ ; *б* –  $v_1(t)$ ; *в* –  $u_2(t)$ ; *г* –  $v_2(t)$

На рис. 9–12 зображені графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, перших похідних цих функцій, а також графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції.

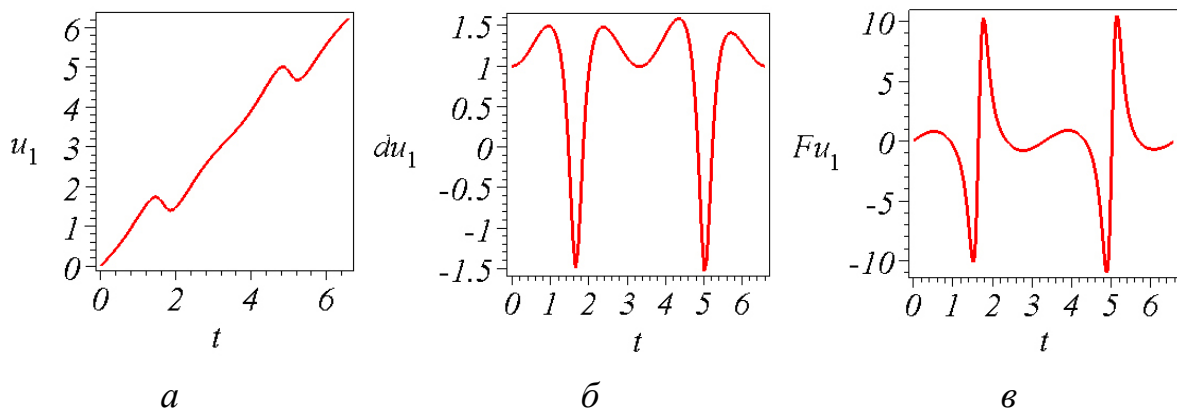


Рис. 9. Графіки узагальненої координати  $u_1(t)$  першої ланки:  
*a* –  $u_1(t)$ ; *б* –  $du_1(t)/dt$ ; *в* –  $Fu_1$

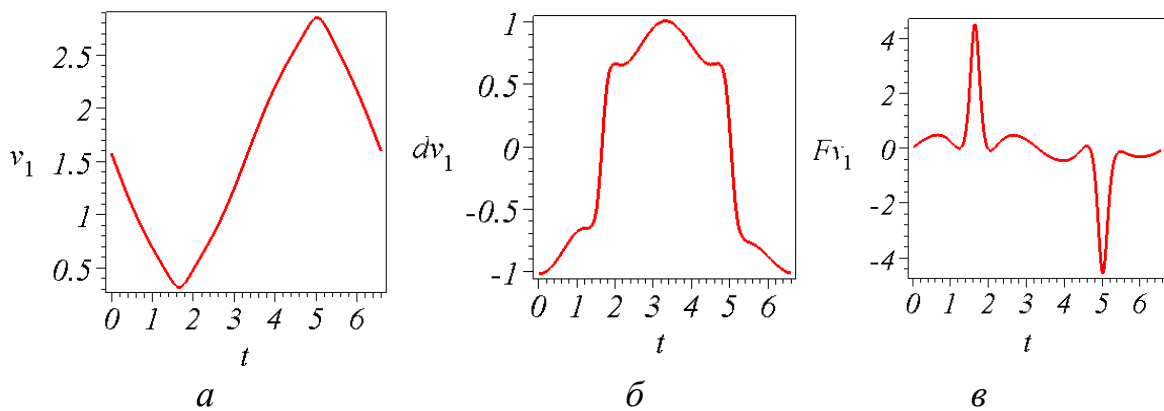


Рис. 10. Графіки узагальненої координати  $v_1(t)$  першої ланки:  
*a* –  $v_1(t)$ ; *б* –  $dv_1(t)/dt$ ; *в* –  $Fv_1$



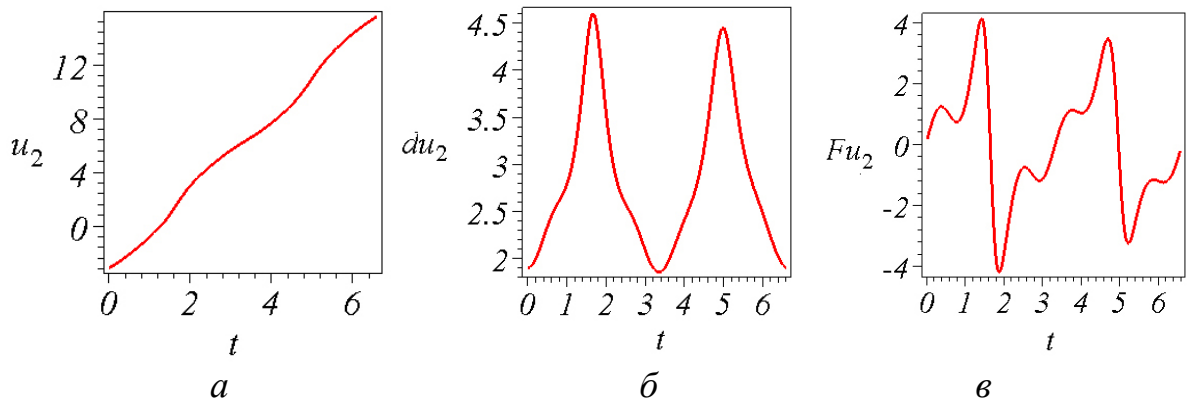


Рис. 11. Графіки узагальненої координати  $u_2(t)$  другої ланки:  
 $a - u_2(t)$ ;  $б - du_2(t)/dt$ ;  $в - Fu_2$

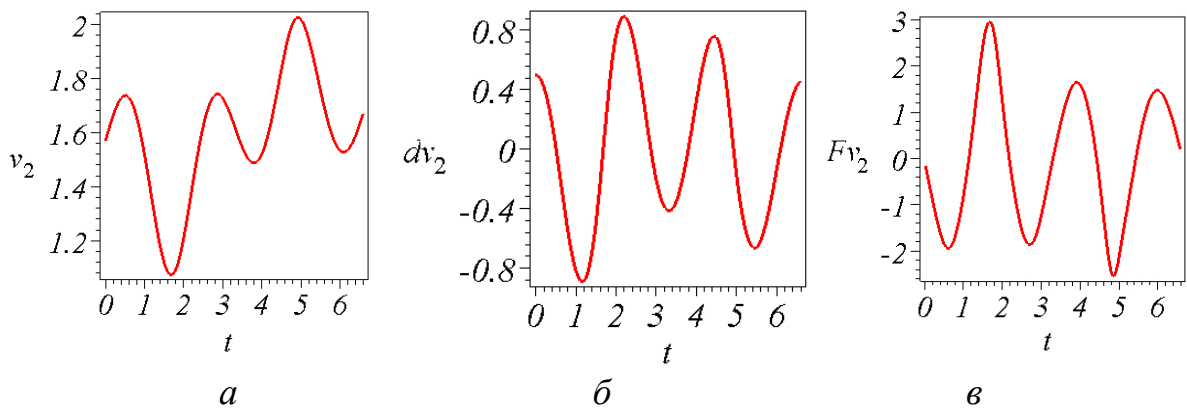


Рис. 12. Графіки узагальненої координати  $v_2(t)$  другої ланки:  
 $a - v_2(t)$ ;  $б - dv_2(t)/dt$ ;  $в - Fv_2$

На рис. 13 наведено варіанти залежно від часу розкриття шести двохланкових стержневих механізмів зі спільною нерухомою точкою для прикладу 1.

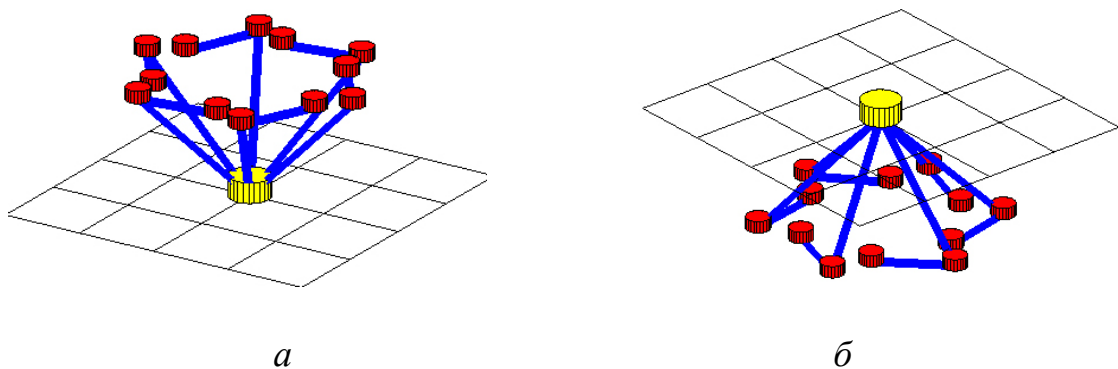


Рис. 13. Деякі просторові конструкції залежно від часу розкриття:  
 $a - t=2,4$ ;  $б - t=4,1$

Приклад 2.  $r_1=1$ ;  $r_2 =2$ ;  $U_0'=\{3, 3, -0.5, 0.5\}$ . Час інтегрування  $T=2.95$ . На рис. 14 наведено циклічну траєкторію руху кінцевої точки  $C$ , а також положення подвійної конструкції в деякі моменти часу, а на рис. 15 зображено фазові траєкторії функцій узагальнених координат.

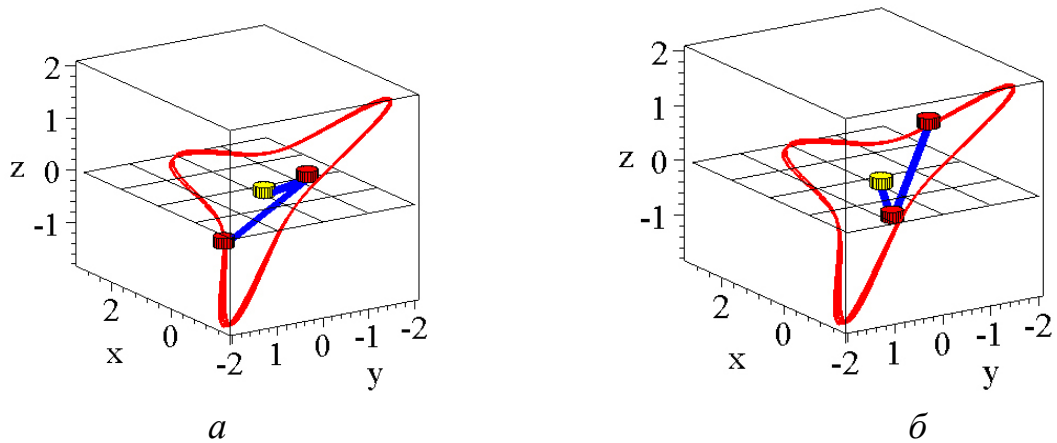


Рис. 14. Циклічна траєкторія руху точки  $C$  для прикладу 2:  
 $a - t=0.9$ ;  $b - t=2.44$

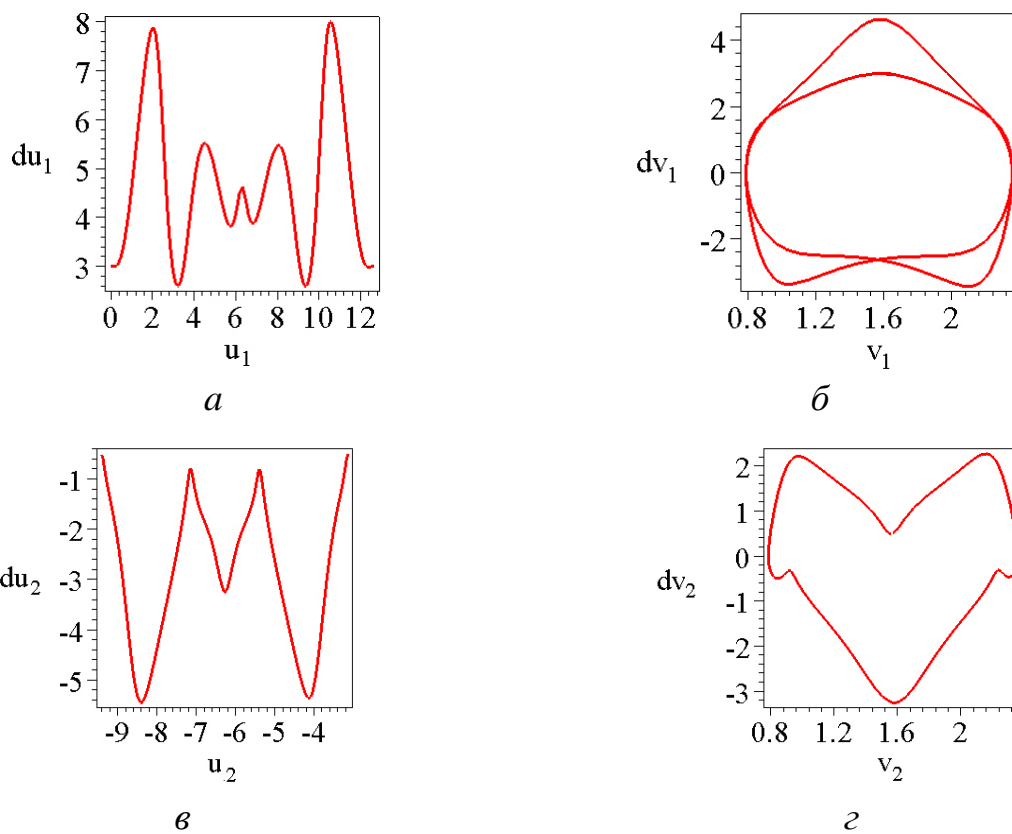


Рис. 15. Фазові траєкторії узагальнених координат для прикладу 2:  
 $a - u_1(t)$ ;  $b - v_1(t)$ ;  $v - u_2(t)$ ;  $z - v_2(t)$

На рис. 16–19 зображені графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, перших похідних цих функцій, а також графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції.

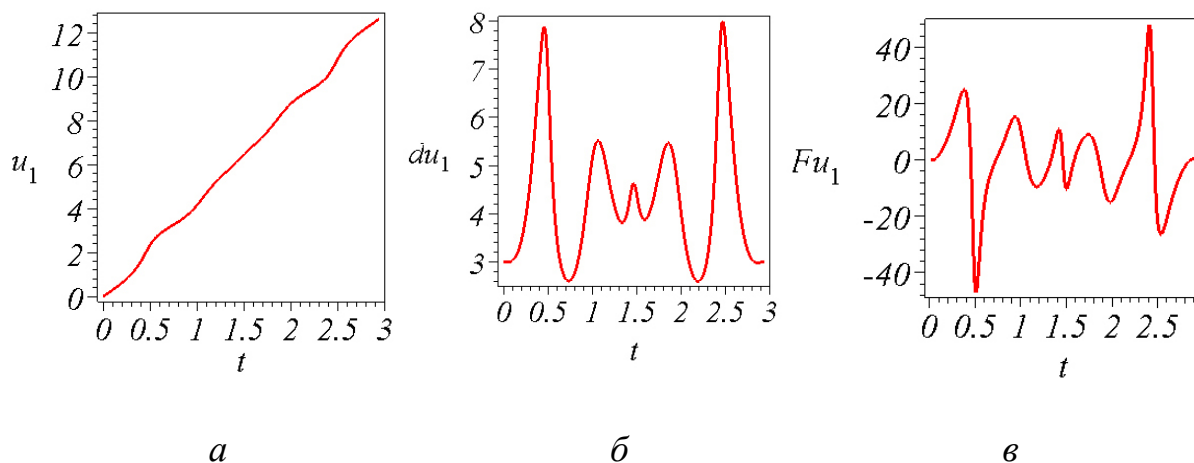


Рис. 16. Графіки узагальненої координати  $u_1(t)$  першої ланки:  
*a* –  $u_1(t)$ ; *б* –  $du_1(t)/dt$ ; *в* –  $Fu_1$

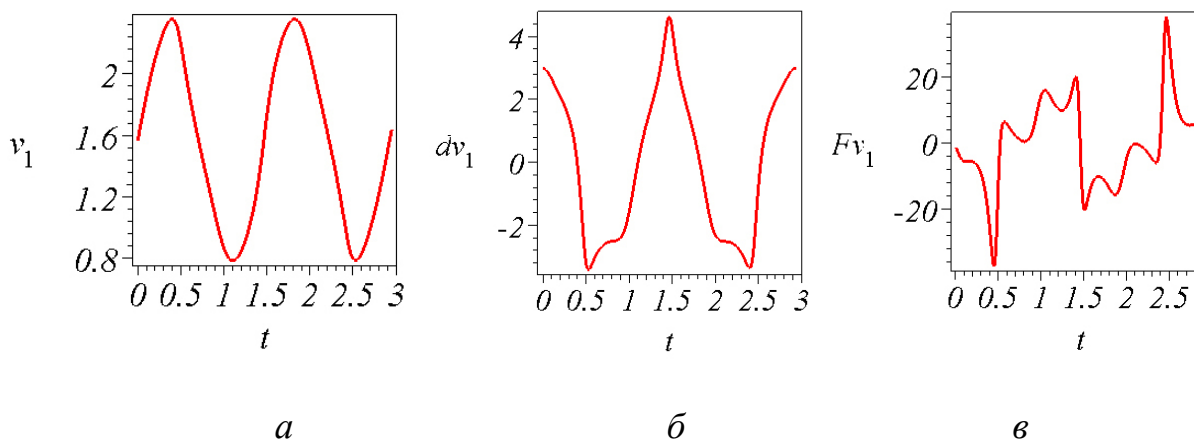


Рис. 17. Графіки узагальненої координати  $v_1(t)$  першої ланки:  
*a* –  $v_1(t)$ ; *б* –  $dv_1(t)/dt$ ; *в* –  $Fv_1$

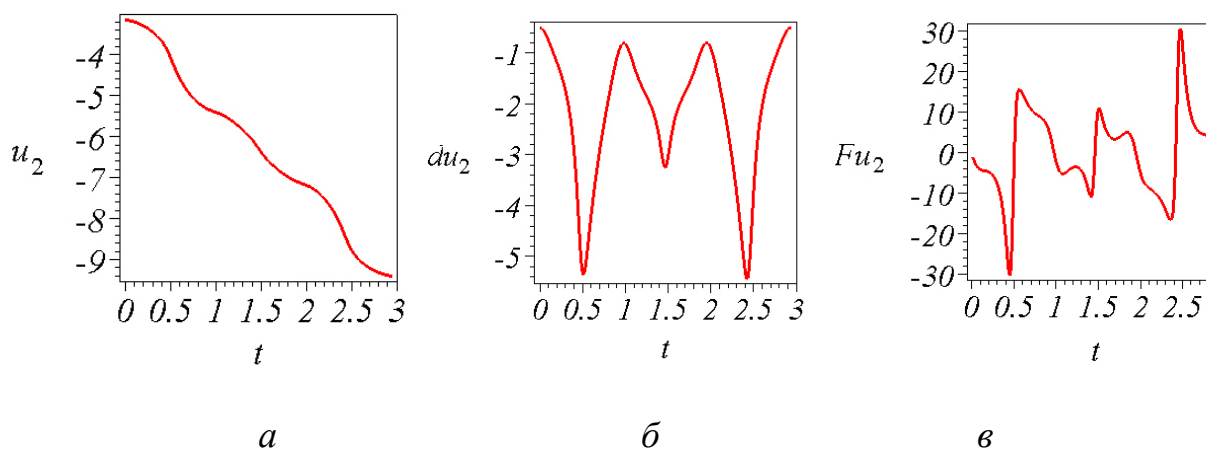


Рис. 18. Графіки узагальненої координати  $u_2(t)$  першої ланки:  
*a* –  $u_2(t)$ ; *б* –  $du_2(t)/dt$ ; *в* –  $Fu_2$

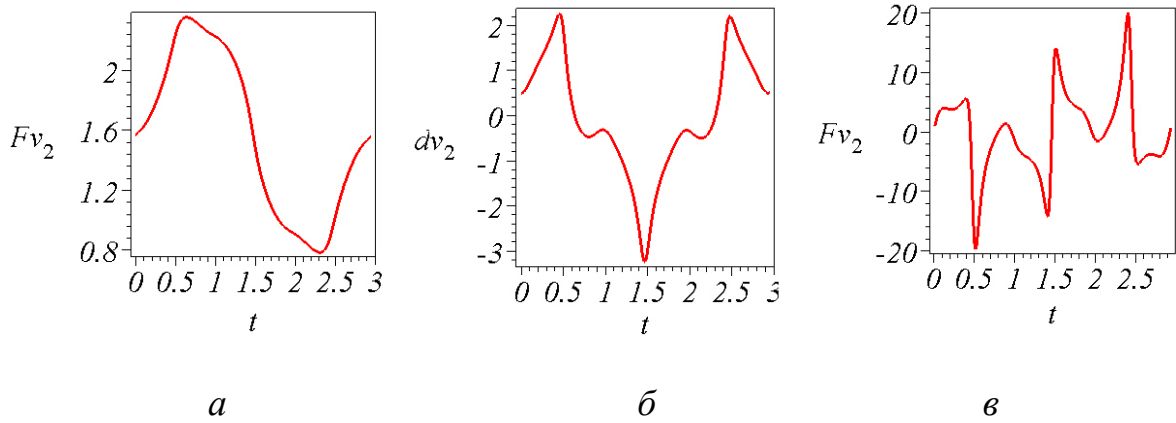


Рис. 19. Графіки узагальненої координати  $v_1(t)$  першої ланки:  
*a* –  $v_2(t)$ ; *б* –  $dv_2(t)/dt$ ; *в* –  $Fv_2$

На рис. 20 наведено варіанти залежно від часу розкриття шести двохланкових стержневих механізмів зі спільною нерухомою точкою для прикладу 2.

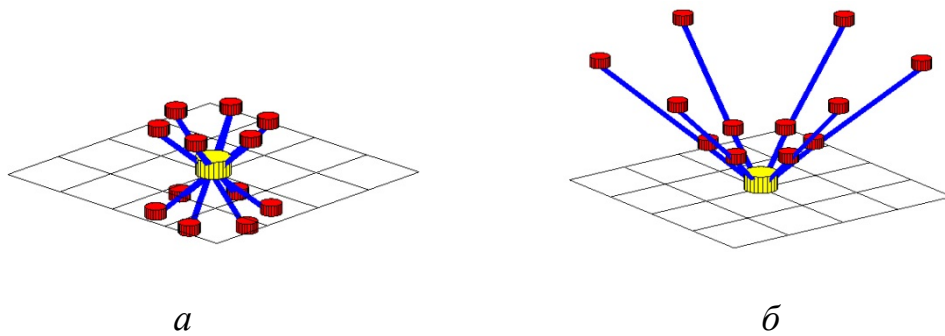


Рис. 20. Конструкції залежно від часу розкриття: *a* –  $t=2$ ; *б* –  $t=2,45$

*Приклад 3.* Наведемо геометричну модель секцій ферм, що розкриваються [1,2] Оберемо  $r_1=1$ ;  $r_2=2$ ;  $U_0'=\{1, -4.9, -1, 3\}$ . Час інтегрування  $T=6.2$ . На рис. 21 наведено циклічну траєкторію руху кінцевої точки  $C$  в деякі моменти часу, а на рис. 22 зображено фазові траєкторії функцій узагальнених координат.

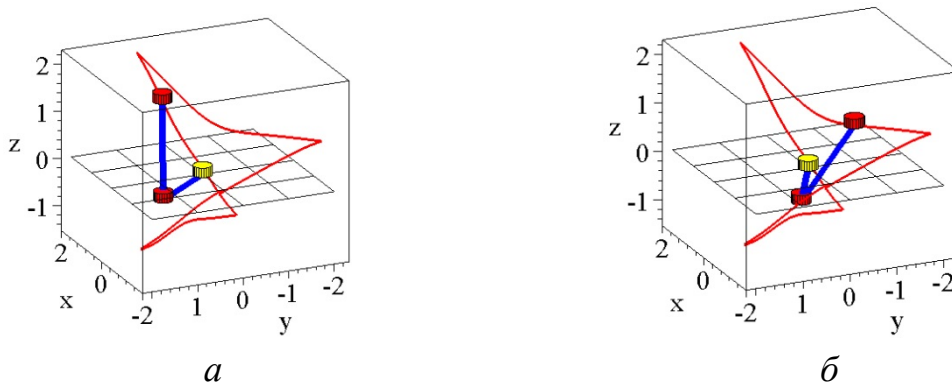


Рис. 21. Циклічна траєкторія точки  $C$  для прикладу 2: *a* –  $t= 3.5$ ; *б* –  $t=4.8$

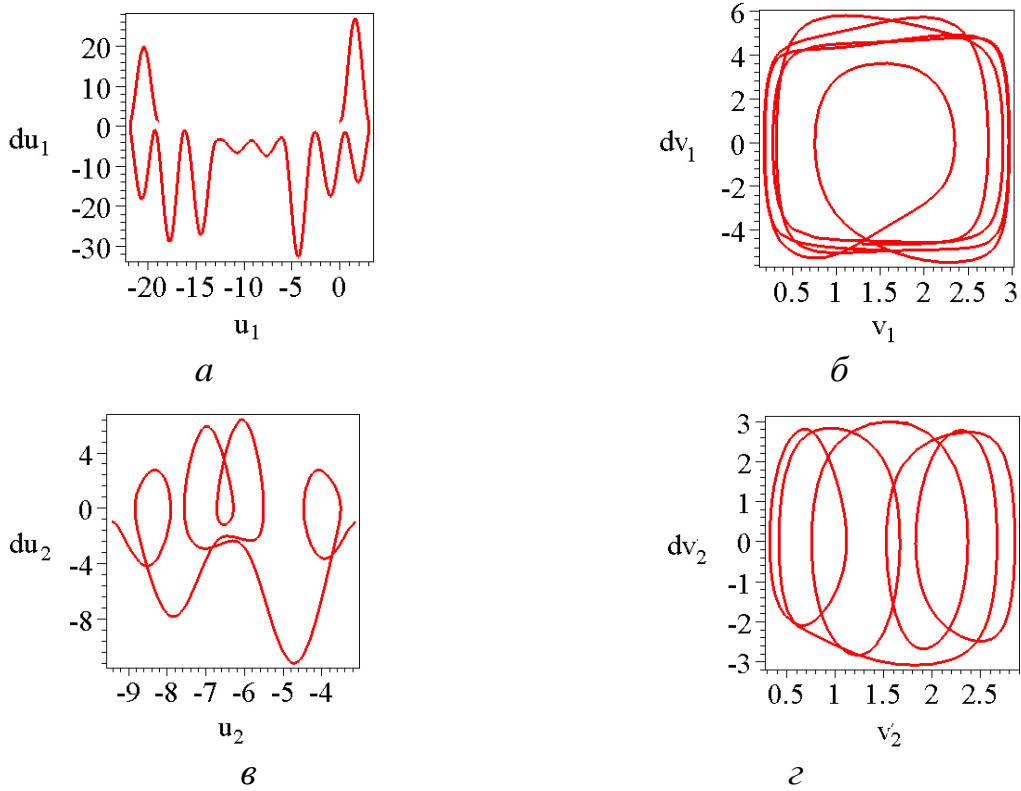


Рис. 22. Фазові траєкторії узагальнених координат для прикладу  
 2:  $a - u_1(t)$ ;  $б - v_1(t)$ ;  $в - u_2(t)$ ;  $г - v_2(t)$

На рис. 23–26 зображені графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, перших похідних цих функцій, а також графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції.

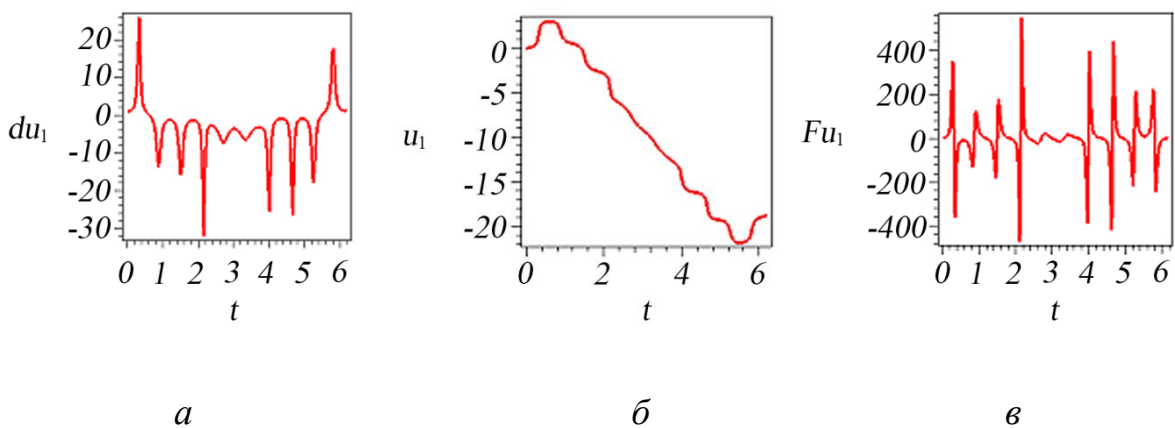


Рис. 23. Графіки узагальненої координати  $u_1(t)$  першої ланки:  
 $a - u_1(t)$ ;  $б - du_1(t)/dt$ ;  $в - Fu_1$

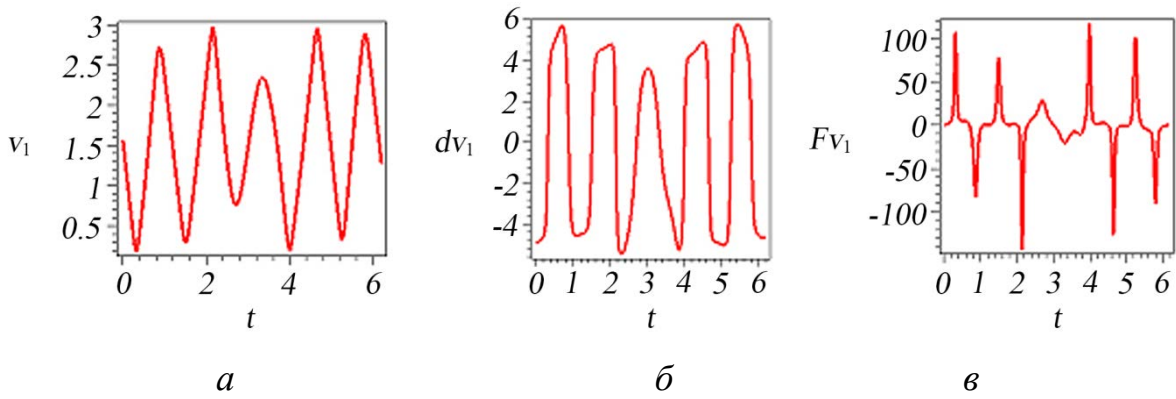


Рис. 24. Графіки узагальненої координати  $v_1(t)$  першої ланки:  
 $a - v_1(t)$ ;  $б - dv_1(t)/dt$ ;  $в - Fv_1$

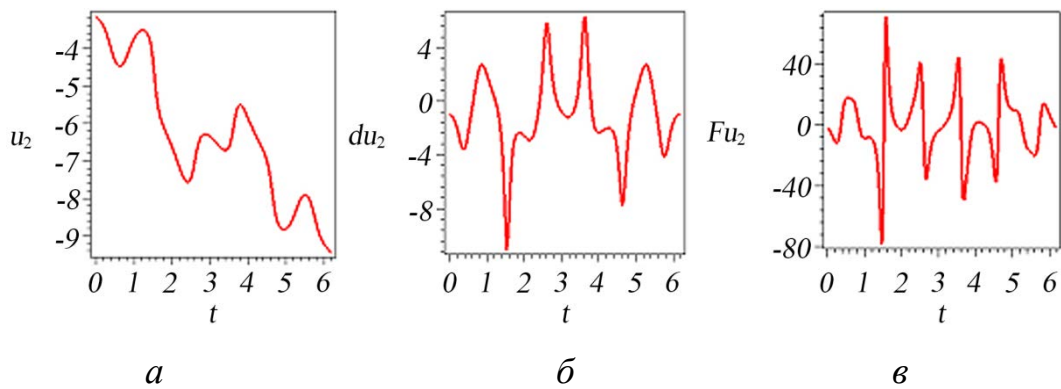


Рис. 25. Графіки узагальненої координати  $u_1(t)$  першої ланки:  
 $a - u_1(t)$ ;  $б - du_1(t)/dt$ ;  $в - Fu_1$

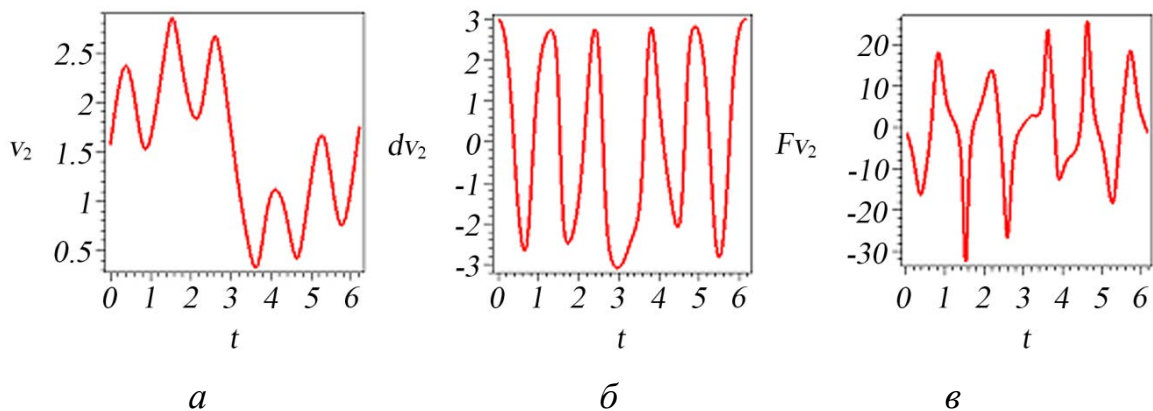


Рис. 26. Графіки узагальненої координати  $v_2(t)$  другої ланки:  
 $a - v_2(t)$ ;  $б - dv_2(t)/dt$ ;  $в - Fv_2$

На рис. 27 наведено варіанти залежно від часу розкриття шести двохланкових стержневих механізмів зі спільною нерухомою точкою для прикладу 3. Одержані конструкції за формою подібні моделям секцій ферм, що розкриваються [1, 2]

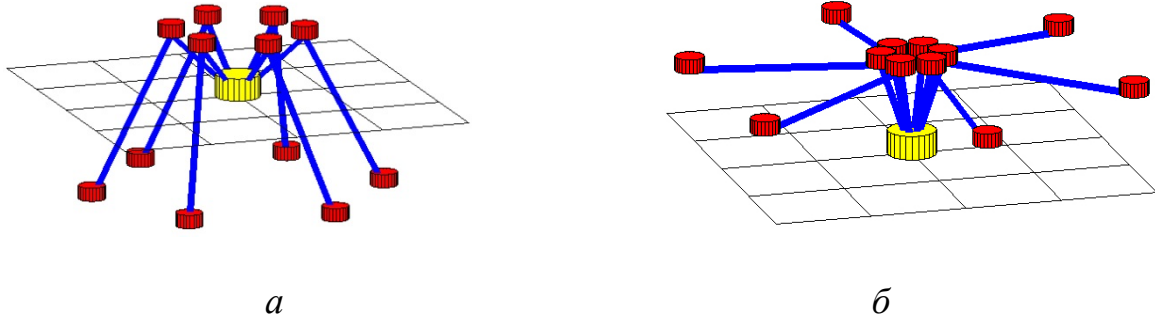


Рис. 27. Деякі просторові конструкції залежно від часу розкриття:  
*a* –  $t=2,6$ ; *б* –  $t=5,2$

На рисунках, де зображені графіки функцій узагальнених координат, звертаємо увагу на графіки силових характеристик, які виникають у момент стопоріння розкриття конструкції. Для цього слід проаналізувати значення графіків функцій:

$$Fu_1=m_1d^2u_1(t)dt^2; Fv_1=m_1d^2v_1(t)dt^2; Fu_2=m_2d^2u_2(t)dt^2; Fv_2=m_2d^2v_2(t)dt^2$$

у кінцевій точці інтервалу інтегрування  $t=6,2$ . Після обчислень одержано значення:

$$Fu_1(6,2)=2,63; Fv_1(6,2)=-1,54; Fu_2(6,2)=0,63; Fv_2(6,2)=-1,24.$$

Значення цих функцій у кінцевій точці інтервалу інтегрування визначатиме силу, яка діятиме на вузловий елемент стержневої конструкції в момент стопоріння її розкриття. Достовірність результатів підтверджує перегляд комп'ютерних анімаційних зображень на сайті [36].

Перевага розглянутого інерційного способу розкриття у невагомості стержневої конструкції, подібної подвійному сферичному маятнику, полягає у наступному:

- технологія інерційного способу розкриття стержневих конструкцій принципово не є критичною до розмірів ланок конструкції;
- на базі схеми розкриття однієї стержневої конструкції можна утворювати багатопроменеві схеми з багатьма сферичними конструкціями зі спільним нерухомим вузлом кріплення;
- нема потреби створювати та синхронізувати між собою засоби керування величинами кутів в окремих вузлах багатоланкової конструкції.

Зрозуміло, що наведена геометрична модель подвійної сферичної стержневої конструкції в невагомості потребує подальших досліджень для її наближення до реальної конструкції. Необхідно враховувати моменти інерції стержнів при обертанні елементів конструкції. Розвиток даного напрямку досліджень полягатиме у використанні інших варіантів

подвійних сферичних стержневих конструкцій. Також необхідні детальні дослідження конструкції сферичного шарніра.

Труднощі розвитку досліджень в цьому напрямку виникнуть при розв'язанні оберненої задачі компоновки. Тобто по заданому кінцевому розташуванню елементів маятника необхідно визначити раціональний набір параметрів подвійної сферичної стержневої конструкції та початкових умов її руху, які забезпечать таке розкриття. Складності додасть і врахування того, що обернена задача має декілька розв'язків.

### **Висновки**

1. Одержані розв'язки системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду дозволили наближено описати рух у невагомості стержневої конструкції, подібної подвійному сферичному маятнику. Це дало можливість реалізувати конкретні геометричні моделі розкриття двохланкових сферичних стержневих конструкцій та спостерігати за ними в режимі комп'ютерної анімації.

2. Для моделювання дії імпульсного піротехнічного реактивного двигуна розроблено схему ініціювання руху двохланкової сферичної стержневої конструкції шляхом впливу імпульсами на кінцеві точки її ланок. Імпульс дії на ланку стержневої конструкції буде чисельно пропорційний значенню першої похідної функції, яка описує зміну величини відповідного кута як узагальненої координати. Це дало можливість продемонструвати геометричні моделі дій імпульсних реактивних двигунів у якості рушіїв процесу розкриття двохланкових стержневих конструкцій.

3. За допомогою комп'ютерної анімації спрогнозовано у часі взаємне розташування ланок подвійних сферичних стержневих конструкцій, одержаних в результаті інерційного розкриття ланок за допомогою імпульсних реактивних двигунів. Це дає можливість визначати поточні значення кутів між ланками. Аналіз послідовних анімаційних кадрів дозволяє визначити момент фіксації (стопоріння) розкриття, коли ланки подвійних сферичних стержневих конструкцій займають необхідне просторове положення.

4. В результаті досліджень було побудовано графіки зміни у часі функцій узагальнених координат, а також перших та других похідних цих функцій; на базі цього з'явилася можливість оцінити силові характеристики системи в момент фіксації (стопоріння) розкриття. Одержані фазові траєкторії процесу розкриття дозволяють оцінити швидкості елементів конструкцій в момент гальмування розкриття.

### **Література**

1. Lu S., Zlatanov D., Ding X., Molfino R. A new family of deployable mechanisms based on the Hoekens linkage / *Mechanism and Machine*



*Theory*. 2014. Vol. 73. P.130–153.

doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2013.10.007>

2. *Tibert G.* Deployable tensegrity structures for space applications. Stockholm, 2002. 242 p.

3. *Szuminski W.* Dynamics of multiple pendula. University of Zielona Gora, Olsztyn, 2012. 57 p.

4. *Szuminski W.* Dynamics of multiple pendula. University of Zielona Gora, Olsztyn, 2013. 32 p.

5. *Szuminski W.* Dynamics of multiple pendula without gravity / Conference: Conference: Chaos 2013, Volume: Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM). 2014. Issue 1. P. 57–67.

URL: [https://www.researchgate.net/publication/285143816\\_Dynamics\\_of\\_multiple\\_pendula\\_without\\_gravity](https://www.researchgate.net/publication/285143816_Dynamics_of_multiple_pendula_without_gravity)

6. *Martinez-Alfaro H.* Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for N pendulums using Maple. URL: <http://www2.esm.vt.edu/~anayfeh/conf10/Abstracts/martinez-alfaro.pdf>

7. *Lopes A. M., Tenreiro Machado J. A.* Dynamics of the N-link pendulum: a fractional perspective / *International Journal of Control*. 2016. Vol. 90, Issue 6. P. 1192–1200. doi: <https://doi.org/10.1080/00207179.2015.1126677>

8. *Yan X., Fu-ling G., Yao Z., Mengliang Z.* Kinematic analysis of the deployable truss structures for space applications / *Journal of Aerospace Technology and Management*. 2012. Vol. 4, Issue 4. P. 453–462. doi: <https://doi.org/10.5028/jatm.2012.04044112>

9. Deployable Perimeter Truss with Blade Reel Deployment Mechanism. NASA's Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, 2016. URL: <https://www.techbriefs.com/component/content/article/tb/techbriefs/mechanics-and-machinery/24098>

10. *Бушуев А. Ю., Фарафонов Б. А.* Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади / *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. № 2. С. 101–114.

11. *Щесняк С., Романов А.* Проектирование и расчет крупногабаритных раскрывающихся конструкций с помощью программных комплексов *MSC.Software / CAD master*. 2009. № 2-3. С. 28–36.

12. *Бойков В. Г.* Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER / *САПР и графика*. 2009. № 9. С. 17–20.

13. *Зимин В. Н., Крылов А. В., Мешковский В. Е., Сдобников А. Н., Файзуллин Ф. Р., Чурилин С. А.* Особенности расчета раскрытия крупногабаритных трансформируемых конструкций различных конфигураций / *Наука и Образование*. МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2014. № 10. С. 179–191. doi: <https://doi.org/10.7463/1014.0728802>

14. *Зельдович Б. Я., Суало М. Дж.* Двухчастотный маятник на вращающейся платформе: моделирование оптических явлений // *Успехи*

- физических наук. 2004. Т. 174, № 12. С. 1337–1354.  
doi: <https://doi.org/10.3367/ufnr.0174.200412e.1337>
15. Петров А. Г. Асимптотическое интегрирование гамильтоновых систем / *Механика твердого тела*. 2005. Вып. 35. С. 84–91.
  16. Глухих Ю. Д. Колебания сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса / *Механика твердого тела*. 2005. Вып. 35. С. 109–114.
  17. Ловейкін В. С., Рибалко В. М., Мельніченко В. В. Дослідження коливань вантажу на гнучкому підвісі при роботі механізму повороту стрілового крану / *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2011. Вип. 166. С. 115–121.
  18. Shen J., Sanyal A. K., Chaturvedi N. A., Bernstein D., McClamroch N. Dynamics and control of a 3D pendulum / 2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601). 2004. doi: <https://doi.org/10.1109/cdc.2004.1428650>
  19. Chaturvedi N. A., McClamroch N. H. Asymptotic stabilization of the hanging equilibrium manifold of the 3D pendulum / *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2007. Vol. 17, Issue 16. P. 1435–1454. doi: <https://doi.org/10.1002/rnc.1178>
  20. Chaturvedi N. A., Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Nonlinear Dynamics of the 3D Pendulum / *Journal of Nonlinear Science*. 2010. Vol. 21, Issue 1. P. 3–32. doi: <https://doi.org/10.1007/s00332-010-9078-6>
  21. Náprstek J., Fischer C. Types and stability of quasi-periodic response of a spherical pendulum / *Computers & Structures*. 2013. Vol. 124. P. 74–87. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.11.003>
  22. Consolini L., Tosques M. On the exact tracking of the spherical inverted pendulum via an homotopy method / *Systems & Control Letters*. 2009. Vol. 58, Issue 1. P. 1–6. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2008.06.010>
  23. Anan'evskii I. M., Anokhin N. V. Control of the spatial motion of a multilink inverted pendulum using a torque applied to the first link / *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 78, Issue 6. P. 543–550. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.04.001>
  24. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Dynamics and control of a chain pendulum on a cart / 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2012. doi: <https://doi.org/10.1109/cdc.2012.6427059>
  25. Xinjilefu, Hayward V., Michalska H. Hybrid Stabilizing Control for the Spatial Double Inverted Pendulum / *Advances in Intelligent and Soft Computing*. 2010. P. 201–215. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-16259-6\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-642-16259-6_16)
  26. Egger P., Caracoglia L. Analytical and experimental investigation on a multiple-mass-element pendulum impact damper for vibration mitigation / *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 353. P. 38–57. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.003>
  27. Ludwicki M., Kudra G., Awrejcewicz J. Axially excited spatial double pendulum nonlinear dynamics.

- URL: [https://www.researchgate.net/profile/Jan\\_Awrejcewicz/publication/288669893\\_Axially\\_excited\\_spatial\\_double\\_pendulum\\_nonlinear\\_dynamics/links/568b788908ae051f9afb07e4/Axially-excited-spatial-double-pendulum-nonlinear-dynamics.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Jan_Awrejcewicz/publication/288669893_Axially_excited_spatial_double_pendulum_nonlinear_dynamics/links/568b788908ae051f9afb07e4/Axially-excited-spatial-double-pendulum-nonlinear-dynamics.pdf)
28. Marsden J., Scheurle J., Wendlandt J. Visualization of Orbits and Pattern Evocation for the Double Spherical Pendulum. URL: [https://authors.library.caltech.edu/20096/1/MaScWe1996\(2\).pdf](https://authors.library.caltech.edu/20096/1/MaScWe1996(2).pdf)
  29. Marsden J. E., Scheurle J. Lagrangian reduction and the double spherical pendulum / ZAMP Zeitschrift for angewandte Mathematik und Physik. 1993. Vol. 44, Issue 1. P. 17–43. doi: <https://doi.org/10.1007/bf00914351>
  30. Dehlin F., Askolsson J. Modelling and Simulation of Conservative Dynamical Systems by Computer Algebra Assisted Lagrangian Mechanics. Sweden, 2017. 80 p.
  31. Double spherical pendulum. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37363-double-spherical-pendulum>
  32. Kutsenko L., Shoman O., Semkiv O., Zapolsky L., Adashevskay I., Danylenko V. et. al. Geometrical modeling of the inertial unfolding of a multi-link pendulum in weightlessness / Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. Vol. 6, Issue 7 (90). P. 42–50. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.114269>
  33. Куценко, Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання інерційного розкриття багатоланкового стержневої конструкції у невагомості. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/4868>
  34. Kutsenko L., Semkiv O., Zapolskiy L., Shoman O., Ismailova N., Vasyliiev S. et. al. Geometrical modeling of the shape of a multilink rod structure in weightlessness under the influence of pulses on the end points of its links / Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 2, Issue 7 (92). P. 44–58. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.126693>
  35. Куценко Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання коливань багатоланкових стержневих конструкцій в невагомості під впливом імпульсів на прикінцеві точки ланок. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6335>
  36. Куценко Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання розкриття у невагомості стержневої конструкції у вигляді подвійного сферичного маятника під впливом імпульсів на кінцеві точки його ланок. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6864>
  37. Navarro Heredia A. L. Spatial Operator Algebra in Modeling and Properties of 3D Inverted Pendulae. McGill University Montreal, Canada, 2017.121 p.
  38. Ludwicki M., Awrejcewicz J., Kudra G. Spatial double physical pendulum with axial excitation: computer simulation and experimental set-up / International Journal of Dynamics and Control. 2014. Vol. 3, Issue 1. P. 1–8. doi: <https://doi.org/10.1007/s40435-014-0073-x>

39. Semkiv O., Shoman O., Sukharkova E., Zhurilo A., Fedchenko H. Development of projection technique for determining the non-chaotic oscillation trajectories in the conservative pendulum systems / *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 2, Issue 4 (86). P. 48–57. doi: [https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95764\\_](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95764_)

## References

1. Lu, S., Zlatanov, D., Ding, X., Molfino, R. (2014). A new family of deployable mechanisms based on the Hoekens linkage. *Mechanism and Machine Theory*, 73, 130–153.  
doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2013.10.007>
2. Tibert, G. (2002). Deployable tensegrity structures for space applications. Stockholm, 242.
3. Szuminski, W. (2012). Dynamics of multiple pendula. University of Zielona Gora, Olsztyn, 57.
4. Szuminski, W. (2013). Dynamics of multiple pendula. University of Zielona Gora, Olsztyn, 32.
5. Szuminski, W. (2014). Dynamics of multiple pendula without gravity // Conference: Conference: Chaos 2013, Volume: Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM), 1, 57–67. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/285143816\\_Dynamics\\_of\\_multiple\\_pendula\\_without\\_gravity](https://www.researchgate.net/publication/285143816_Dynamics_of_multiple_pendula_without_gravity)
6. Martinez-Alfaro, H. Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for N pendulums using Maple. Available at: <http://www2.esm.vt.edu/~anayfeh/conf10/Abstracts/martinez-alfaro.pdf>
7. Lopes, A. M., Tenreiro Machado, J. A. (2016). Dynamics of the N-link pendulum: a fractional perspective. *International Journal of Control*, 90 (6), 1192–1200. doi: <https://doi.org/10.1080/00207179.2015.1126677>
8. Yan, X., Fu-ling, G., Yao, Z., Mengliang, Z. (2012). Kinematic analysis of the deployable truss structures for space applications. *Journal of Aerospace Technology and Management*, 4 (4), 453–462.  
doi: <https://doi.org/10.5028/jatm.2012.04044112>
9. Deployable Perimeter Truss with Blade Reel Deployment Mechanism (2016). NASA's Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California. Available at: <https://www.techbriefs.com/component/content/article/tb/techbriefs/mechanics-and-machinery/24098>
10. Bushuyev, A., Farafonov, B. (2014). Mathematical modeling of the process of disclosure of a large-scale solar battery. *Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2, 101–114.
11. Schesnyak, S., Romanov, A. (2009). Designing and calculating large-scale unfolding structures using software packages MSC.Software. *CADmaster*, 2-3, 28–36.

12. Boykov, V. (2009). Program complex of automated dynamic analysis of EULER multicomponent mechanical systems. *CAD and graphics*, 9, 17–20.
13. Zimin, V., Krylov, A., Meshkovskii, V., Sdobnikov, A., Fayzullin, F., Churilin, S. (2014). Features of the Calculation Deployment Large Transformable Structures of Different Configurations. *Science and Education of the Bauman MSTU*, 10, 179–191. doi: <https://doi.org/10.7463/1014.0728802>
14. Zel'dovich, B. Y., Soileau, M. J. (2004). Bi-frequency pendulum on a rotary platform: modeling various optical phenomena. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 174 (12), 1337–1354.  
doi: <https://doi.org/10.3367/ufnr.0174.200412e.1337>
15. Petrov, A. (2005). Asymptotic integration of Hamiltonian systems. *Mechanics of the solid*, 35, 84–91.
16. Glukhikh, Y. (2005). Oscillations of a spherical pendulum with a vibrating suspension point. *Mechanics of a rigid body*, 35, 109–114.
17. Loveykin, V., Rybalko, V., Melnichenko, V. (2011). Investigation of the fluctuations of cargo on a flexible suspension under the operation of the mechanism of rotation of the jib crane. *Scientific Bulletin of the National University of Bioresources and Natural Resources of Ukraine*, 166, 115–121.
18. Jinglai Shen, Sanyal, A. K., Chaturvedi, N. A., Bernstein, D., McClamroch, H. (2004). Dynamics and control of a 3D pendulum. 2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601). doi: <https://doi.org/10.1109/cdc.2004.1428650>
19. Chaturvedi, N. A., McClamroch, N. H. (2007). Asymptotic stabilization of the hanging equilibrium manifold of the 3D pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17 (16), 1435–1454.  
doi: <https://doi.org/10.1002/rnc.1178>
20. Chaturvedi, N. A., Lee, T., Leok, M., McClamroch, N. H. (2010). Nonlinear Dynamics of the 3D Pendulum. *Journal of Nonlinear Science*, 21 (1), 3–32. doi: <https://doi.org/10.1007/s00332-010-9078-6>
21. Náprstek, J., Fischer, C. (2013). Types and stability of quasi-periodic response of a spherical pendulum. *Computers & Structures*, 124, 74–87.  
doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.11.003>
22. Consolini, L., Tosques, M. (2009). On the exact tracking of the spherical inverted pendulum via an homotopy method. *Systems & Control Letters*, 58 (1), 1–6. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2008.06.010>
23. Anan'evskii, I. M., Anokhin, N. V. (2014). Control of the spatial motion of a multilink inverted pendulum using a torque applied to the first link. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 78 (6), 543–550.  
doi: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.04.001>
24. Lee, T., Leok, M., McClamroch, N. H. (2012). Dynamics and control of a chain pendulum on a cart. 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). doi: <https://doi.org/10.1109/cdc.2012.6427059>

25. *Xinjilefu, Hayward, V., Michalska, H.* (2010). Hybrid Stabilizing Control for the Spatial Double Inverted Pendulum. *Brain, Body and Machine*, 201–215. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-16259-6\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-642-16259-6_16)
26. *Egger, P., Caracoglia, L.* (2015). Analytical and experimental investigation on a multiple-mass-element pendulum impact damper for vibration mitigation. *Journal of Sound and Vibration*, 353, 38–57. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.003>
27. *Ludwicki, M., Kudra, G., Awrejcewicz, J.* Axially excited spatial double pendulum nonlinear dynamics. Available at: [https://www.researchgate.net/profile/Jan\\_Awrejcewicz/publication/288669893\\_Axially\\_excited\\_spatial\\_double\\_pendulum\\_nonlinear\\_dynamics/links/568b788908ae051f9afb07e4/Axially-excited-spatial-double-pendulum-nonlinear-dynamics.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Jan_Awrejcewicz/publication/288669893_Axially_excited_spatial_double_pendulum_nonlinear_dynamics/links/568b788908ae051f9afb07e4/Axially-excited-spatial-double-pendulum-nonlinear-dynamics.pdf)
28. *Marsden, J., Scheurle, J., Wendlandt, J.* Visualization of Orbits and Pattern Evocation for the Double Spherical Pendulum. Available at: [https://authors.library.caltech.edu/20096/1/MaScWe1996\(2\).pdf](https://authors.library.caltech.edu/20096/1/MaScWe1996(2).pdf)
29. *Marsden, J. E., Scheurle, J.* (1993). Lagrangian reduction and the double spherical pendulum. *ZAMP Zeitschrift for Angewandte Mathematik Und Physik*, 44 (1), 17–43. doi: <https://doi.org/10.1007/bf00914351>
30. *Dehlin, F., Askolsson, J.* (2017). Modelling and Simulation of Conservative Dynamical Systems by Computer Algebra Assisted Lagrangian Mechanics. Sweden, 80.
31. Double spherical pendulum. Available at: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37363-double-spherical-pendulum>
32. *Kutsenko, L., Shoman, O., Semkiv, O., Zapolsky, L., Adashevskay, I., Danylenko, V. et. al.* (2017). Geometrical modeling of the inertial unfolding of a multi-link pendulum in weightlessness. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6 (7 (90)), 42–50. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.114269>
33. *Kutsenko, L. M.* Illustrations to Geometric Modeling of Inertial Disclosure of Multilayer Rod Construction in Weightlessness. Available at: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/4868>
34. *Kutsenko, L., Semkiv, O., Zapolskiy, L., Shoman, O., Ismailova, N., Vasyliiev, S. et. al.* (2018). Geometrical modeling of the shape of a multilink rod structure in weightlessness under the influence of pulses on the end points of its links. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (7 (92)), 44–58. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.126693>
35. *Kutsenko, L. M.* Illustrations to geometric modeling of oscillations of multi-faceted bar constructions in the absence of weight under the influence of pulses on the final points of the links. Available at: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6335>
36. *Kutsenko, L. M.* Illustrations to the geometric modeling of the opening of the weightlessness of a rod construction in the form of a double spherical

pendulum under the influence of pulses on the end points of its links. Available at: <http://reposit.sc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6864>

37. Navarro Heredia, A. L. (2017). Spatial Operator Algebra in Modeling and Properties of 3D Inverted Pendulae. McGill University Montreal, Canada, 121.

38. Ludwicki, M., Awrejcewicz, J., Kudra, G. (2014). Spatial double physical pendulum with axial excitation: computer simulation and experimental set-up. *International Journal of Dynamics and Control*, 3 (1), 1–8.

doi: <https://doi.org/10.1007/s40435-014-0073-x>

39. Semkiv, O., Shoman, O., Sukharkova, E., Zhurilo, A., Fedchenko, H. (2017). Development of projection technique for determining the non-chaotic oscillation trajectories in the conservative pendulum systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2 (4 (86)), 48–57.

doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95764>

Ph. D., prof. **Leonid Kutsenko**,

leokuts@i.ua, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1554-8848>

Ph. D., assoc.prof. **Andriy Kalynovskiy**,

kalinovskiy.a@nuczu.edu.ua, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1021-5799>

Ph. D., Senior Researcher. **Leonid Zapolskiy**,

z\_1\_1@i.ua, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4357-2933>

## **SIMULATION OF CHANGES IN WEIGHTLESSNESS SHAPE OF ROD STRUCTURE LIKE DOUBLE SPHERICAL PENDULUM**

*A geometric model of a new method of opening a rod structure similar to a double spherical pendulum under weightless conditions is studied. The movement of structural elements occurs due to the action of impulses of pyrotechnic jet engines on the end points of the links. The description of the movement of the resulting inertial opening of the rod structure is made using the Lagrange equation of the second kind and, taking into account the conditions of weightlessness, constructed using only the kinetic energy of the system. The relevance of the chosen topic is indicated by the need to study the process of activation of the disclosure of a spatial rod structure for performing rescue operations. As propellers, it is proposed to use pulsed pyrotechnic jet engines installed at the end points of the structure links. Lighter and cheaper than, for example, electric motors or spring devices. It is also more cost-effective when the process of opening the structure in orbit is planned to be performed only once.*

*A method is proposed for determining the parameters and initial conditions for initiating oscillations of a double rod structure in order to obtain a cyclic trajectory of the end point of the second link. This makes it possible to avoid chaotic movements of structural elements when calculating the transformation process. Graphs of the change in time of the functions of generalized coordinates, as well as the first and second derivatives of these*

*functions, are constructed. Therefore, it became possible to evaluate the power characteristics of the system at the moment of braking (stopping) of the opening process.*

*The results can be used as geometric models of deployment options for large-sized objects under weightless conditions, such as load-bearing frames of space antennas or truss structures, as well as other orbital infrastructures necessary for planning and performing rescue operations.*

*Keywords: rod structure; opening process in orbit; two-link spherical structure; Lagrange equation of the second kind.*