УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.134-141

асистент **Мостовенко Олексій В.**,
mostovenko.ov2@knuba.edu.ua, ORCID:0000-0003-1844-1843
д. т. н., професор **Ковальов С. М.**,
kovalov.sm@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7713-1768
д. т. н., доцент **Мостовенко Олександр В.**,
a.mostovenko25@gmail.com, ORCID:0000-0002-3423-4126
Київський національний університет будівництва і архітектури

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ КРИВИЗНИ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ КРИВОЇ

При геометричному моделюванні об’єктів, процесів або явищ часто багато залежностей між параметрами представляються у вигляді графіків. Графіки, що мають в основі експериментальні дані, часто представляються у вигляді дискретно представлених кривих (ДПК). Вивчення процесу, що моделюється, передбачає аналіз отриманого графіка, в тому числі визначення диференціальних характеристик кривої. Для дискретно представленої кривої ці характеристики можна визначити тільки наближено, звідки виникає задача оцінки точності їх визначення. Диференціальні характеристики кривої лінії такі, як дотична, нормаль, кривизна тощо однозначно і точно визначаються методами диференціальної геометрії. Якщо криву подано у вигляді дискретного ряду точок, такі характеристики визначаються наближено і неоднозначно, причому на точність визначення цих характеристик впливає крок дискретизації.

У роботі [1] показано, що кривизна плоскої кривої, з одного боку, може визначатись як відношення кута суміжності (у радіанній мірі) дотичних у двох нескінченно близьких точках до відстані між цими точками, а з іншого боку кривизна визначається як величина, обернена до радіуса стичного кола. Обидва підходи дають однаковий результат. Кривизну дискретно поданої кривої (ДПК) можна визначити лише наближено і в існуючих публікаціях вона визначається як величина, обернена до радіуса кола, яке проходить через три суміжні точки ДПК. Кривизна кривої щільно пов’язана з поняттям дотичної і нормалі до кривої. Такі поняття для ДПК детально розглянуто у [6].

Ціллю статті є аналіз точності визначення кривизни дискретно представленої кривої в залежності від способу її визначення і кроку дискретизації.

Ключові слова: кривизна; дискретизація; крок дискретизації; аналіз точності; крива; графік; диференціальні характеристики кривої.

Постановка проблеми. Диференціальні характеристики кривої лінії такі, як дотична, нормаль, кривизна тощо однозначно і точно визначаються методами диференціальної геометрії. Якщо криву подано у вигляді дискретного ряду точок, такі характеристики визначаються наближено і неоднозначно, причому на точність визначення цих характеристик впливає крок дискретизації.

Ціллю статті є аналіз точності визначення кривизни дискретно представленої кривої (ДПК) в залежності від способу її визначення і кроку дискретизації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] показано, що кривизна плоскої кривої, з одного боку, може визначатись як відношення кута суміжності у радіанній мірі дотичних у двох нескінченно близьких точках до відстані між цими точками, а з іншого боку кривизна визначається як величина, обернена до радіуса стичного кола. Обидва підходи дають однаковий результат. Загально відомо, що серед недоліків дискретного представлення кривих ліній є саме неможливість точного визначення кривини таких кривих [2]. Частіше за все різні дослідження у цьому напрямку пов'язані з наближеним визначенням диференціальних характеристик дискретно представлених кривих. Кривизна дискретно поданої кривої (ДПК), в існуючих публікаціях, визначається як величина, обернена до радіуса кола, яке проходить через три суміжні точки дискретно представленої кривої [3 – 6]. Кривизна кривої щільно пов'язана з поняттям дотичної і нормалі до кривої. Такі поняття для ДПК детально розглянуто у [6].

Основна частина. Відомі дві трактовки кривизни плоскої кривої. З одного боку кривизна визначається як відношення кута суміжності дотичних до кривої у двох нескінченно близьких точках до довжини дуги між цими точками. З іншого боку кривизна визначається як величина зворотна до радіуса стичного кола, яке проходить через три нескінченно близькі точки кривої. В [1, с. 178] показано, що в обох випадках отримується той самий результат.

У дискретному уявленні кривої нескінченно близькі відстані між точками кривої замінюються скінченними відстанями, які відповідають кроку дискретизації кривої і у першому випадку наближене значення кривизни визначається як відношення кута γ суміжності (у радіанній мірі) між двома суміжними дотичними до відстані h між точками дотику дотичних (рис. 1):

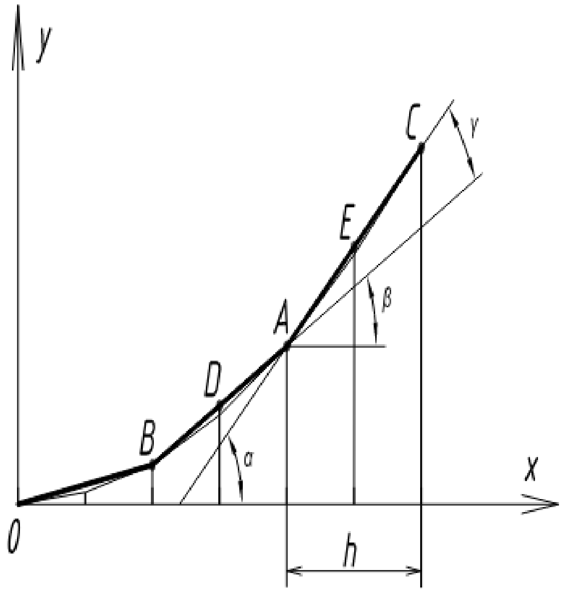

Рис. 1 Схема визначення наближеного значення кривизни ДПК

За другою трактовкою стичне коло проходить через три суміжні точки ДПК.

Оскільки величина радіанної міри малих кутів $(>5^0)$ майже не відрізняється від величини тангенса такого кута $(>0{,}2\%)$, то мірою кривизни можна вважати відношення тангенса кута суміжності до довжини дуги між точками дотику.

Відстань *DE* між точками дотику суміжних дотичних у дискретному уявленні можна прийняти як довжину відрізка між серединами суміжних ланок ДПК:

$$DE = \frac{\sqrt{4h^2 + (y_C - y_B)^2}}{2}. \tag{1}$$

Тоді:

$$k = \frac{tg\gamma}{DE}, \tag{2}$$

де γ – кут суміжності між суміжними ланками ДПК;
DE – відстань між точками *D* і *E*;
h – крок дискретизації вздовж осі *Ox*.

Дискретний аналог кривизни кривої у довільній точці *A* ДПК дорівнює:

$$k = \frac{2h(y_C - 2y_A + y_B)}{\left[h^2 + (y_C - y_A)(y_A - y_B)\right]\sqrt{4h^2(y_C - y_B)^2}}. \tag{3}$$

Точність визначення кривизни залежить від кроку *h* ДПК зі сталим кроком вузлів уздовж осі *Ox*. Наочно уявити зміну точності визначення кривизни в залежності від кроку *h* можна на прикладі будь-якої плоскої кривої, де кривизну можна визначити точно (наприклад, для квадратної параболи).

Наприклад, задамо параболу (рис. 2):

$$y = 0.083333x^2 \tag{4}$$

і точку A на параболі (x_A=6).

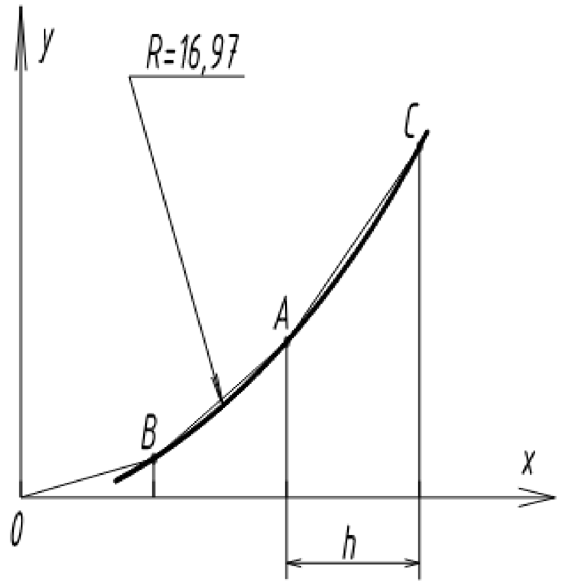

Рис. 2 Схема розрахунку кривини для параболи

Кривизна параболи (4) точно визначається за формулою:

$$k = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{-\frac{3}{2}}}{p}, \tag{5}$$

де p=6 – параметр параболи.

Або:

$$k = \frac{2a}{\sqrt{\left(1 + 4a^2x^2\right)^3}}, \tag{6}$$

якщо рівняння параболи записано у вигляді $y=ax^2$.

За формулою (5) точне значення кривизни у точці A параболи (4) дорівнює:

$$k = 0.05893 \tag{7}$$

Задамо на параболі (4) дві точки B і C, суміжні з точкою A з сталим кроком h, якому надамо різні значення. Якщо за довжину дуги між точками дотику суміжних дотичних у дискретному уявленні прийняти відстань DE між серединами суміжних ланок ДПК, то кривизна при дискретному уявленні кривої наближено дорівнюватиме:

$$k^{/} = \frac{2a}{\left[1 + a^2\left(4x_A^2 - h^2\right)\right]\sqrt{\left(1 + 4a^2 x_A^2\right)^3}}. \tag{8}$$

Для параболи (4) вираз (8) у точці x_A=6 приймає вигляд:

$$k^{/} = \frac{0.08333}{1 + 0.00694\left(144 - h^2\right)}. \tag{9}$$

Для наочного уявлення тенденції зміни значення кривизни в залежності від кроку дискретизації за формулою (9) підраховано значення кривизни, що наведено у таблиці.

За другою трактовкою визначення кривизни через три суміжні точки A, B і C проведемо коло, яке у дискретній трактовці можна вважати стичним до кривої у точці A (рис. 2).

Координати центра цього кола обчислюються за формулами:

$$x_O = \frac{(x_B^2 - x_A^2)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(y_C - y_A)(y_C - y_B) - (x_C^2 - x_A^2)(y_B - y_A)}{2\left[x_B(y_C - y_A) - x_A(y_C - y_B) - x_C(y_B - y_A)\right]}; \tag{10}$$

$$y_O = \frac{-(y_B^2 - y_A^2)(x_C - x_A) + (x_B - x_A)(x_C - x_A)(x_C - x_B) + (y_C^2 - y_A^2)(x_B - x_A)}{2\left[x_B(y_C - y_A) - x_A(y_C - y_B) - x_C(y_B - y_A)\right]}. \tag{11}$$

Наближене значення кривизни ДПК у точці A визначається, як величина зворотна до радіуса цього кола:

$$k^{//} = \frac{1}{\sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2}}. \tag{12}$$

Якщо на параболі (4) задати три послідовні точки B, A і C з сталим кроком h уздовж осі Ox, формули (10) і (11) значно спрощуються:

$$x_O = a^2 x_A\left(h^2 - 4x_A^2\right), \tag{13}$$

$$y_O = \frac{a^2\left(6x_A^2 + h^3\right) + 1}{2a}, \tag{14}$$

де a=0.083333 – параметр параболи (4);

h – крок точок уздовж осі Ox на параболі (4).

Наближене значення $k^{//}$ кривизни, яку визначено за другою трактовкою з різним кроком h, наведено у таблиці.

Таблиця

h	x_A	x_B	x_C	$k^{/}$	$k^{//}$
0.5	6	5.5	6.5	0.05898	0.05894
1	6	5	7	0.05913	0.05893
1.5	6	4.5	7.5	0.05939	0.05881
2	6	4	8	0.05976	0.05851
2.5	6	3.5	8.5	0.06023	0.05794
3	6	3	9	0.06083	0.05704

Висновки та перспективи.

Порівнюючи результати таблиці з точним значенням (7) кривизни можна зробити наступні висновки:

1. Із зменшенням кроку дискретизації в обох випадках точність визначення радіуса кривизни підвищується.
2. Спосіб визначення кривизни ДПК практично не впливає на точність результату, але відхилення від точного результату змінює знак на протилежний.

Наближене значення кривизни у випадку, коли крок h прямує до нуля, можна отримати за допомогою гіперболічної екстраполяції з використанням п’яти значень кривизни при різному кроці h [6].

Література

1. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия / Москва : Наука, 1981. 344 С.
2. *Ботвіновська С.І.* Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об’єктів архітектури та дизайну : автореф. дис. … докт. техн. наук : 05.01.01. Прикладна геометрія, інженерна графіка. Київ : КНУБА, 2018. 44 с.
3. *Гавриленко Е.А.* Моделювання обводів у просторі можливого розташування монотонних кривих / автореф. … докт. техн. наук 05.01.01 / Київ : КНУБА, 2020. 45 с.
4. *Гавриленко Е.А.* Визначення положення центрів кривини дискретно представленої кривої / *Системні технології* : регіон. міжвуз. зб. наук. пр. Дніпропетровськ : НМетАУ, 2011. Вип. 5 (76). С. 145-151.
5. *Гавриленко Е.А.* Умови розташування стичних кіл при формуванні обводу з монотонною зміною кривини / *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наукове фахове видання*. Мелітополь,

ТДАТУ, 2011. Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка. Том. 50. С. 146-150.
6. *Найдиш В.М. , Верещага В.М., Найдиш А.В., Малкіна В.М.* Основи прикладної дискретної геометрії / Навчальний посібник під редакцією В.М. Найдиша. Мелітополь, 2007. 193 С. ISBN 978-966-8428-20-3.
7. *Мостовенко А.В., Ковалёв С.Н.* Гиперболическая интерполяция для оценки погрешностей дискретизации / *Управління розвитком складних систем*. Київ : КНУБА, 2020. №. 42. С. 102-106.

References

1. *Hylbert D., Kon-Fossen S.* Nahliadnaia heometryia / Moscow : Nauka, 1981. 344 S.
2. *Botvinovska S.I.* Teoretychni osnovy formoutvorennja v dyskretnomu modeljuvanni ob'jektiv arhitektury ta dyzajnu : avtoref. … dokt. tekhn. nauk 05.01.01: Prykladna geometrija, inzhenerna grafika. Kyi'v : KNUBA, 2018. 42 s. {in Ukrainian}
3. *Havrylenko E.A.* Modeliuvannia obvodiv u prostori mozhlyvoho roztashuvannia monotonnykh kryvykh / avtoref. … dokt. tekhn. nauk. 05.01.01 Kyi'v : KNUBA, 2020. 45 s. {in Ukrainian}
4. *Havrylenko E.A.* Vyznachennia polozhennia tsentriv kryvyny dyskretno predstavlenoi kryvoi / Systemni tekhnolohii: rehion. mezhvuz. zb. nauk. pr. Dnipropetrovsk : NMetU, 2011. Vyp. 5 (76). S. 145-151. {in Ukrainian}
5. *Havrylenko E.A.* Umovy roztashuvannia stychnykh kil pry formuvanni obvodu z monotonnoiu zminoiu kryvyny / pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: naukove fakhove vydannia *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Melitopol : TDATU, 2011. Vyp. 4. Tom. 50. S. 146-150. {in Ukrainian}
6. *V.M. Naidysh, V.M. Vereshchaha, A.V. Naidysh, V.M. Malkina.* Osnovy prykladnoi dyskretnoi heometrii / Navchalnyi posibnyk pid redaktsiieiu V.M. Naidysha. Melitopol, 2007. 193 S. {in Ukrainian}
7. *Mostovenko A.V., Kovalëv S.N.* Hyperbolycheskaia ynterpoliatsyia dlia otsenky pohreshnostei dyskretyzatsyy / *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*, 2020. №. 42. S. 102-106. {in Ukrainian}

UDC 514.18

Assistant **Alexei Mostovenko**
mostovenko.ov2@knuba.edu.ua, ORCID:0000-0003-1844-1843
Ph. D., prof., **Sergii Kovalov**,
kovalov.sm@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7713-1768
Ph. D., assoc. prof. **Oleksandr Mostovenko**,
a.mostovenko25@gmail.com, ORCID:0000-0002-3423-4126
Kyiv National University of Construction and Architecture

ANALYSIS OF THE ACCURACY OF CURVATURE DETERMINATION OF A DISCRETELY PRESENTED CURVE

When geometric modeling of objects, processes or phenomena, many dependencies between parameters are often presented in the form of graphs. Graphs based on experimental data are often presented in the form of discrete representation curves (DRC). The study of the simulated process involves the analysis of the resulting graph, including the determination of the differential characteristics of the curve. For a discretely presented curve, these characteristics can be determined only approximately, which is where the task of assessing the accuracy of their determination arises. The differential characteristics of a curved line, such as tangent, normal, curvature, etc., are unambiguously and accurately determined by the methods of differential geometry. If the curve is presented in the form of a discrete series of points, such characteristics are determined approximately and ambiguously, and the accuracy of determining these characteristics is affected by the discretization step.

In [1] it is shown that the curvature of a plane curve, on the one hand, can be defined as the ratio of the angle of adjacency (in radian measure) of tangents at two infinitely close points to the distance between these points, and on the other hand, the curvature is defined as the inverse of the radius contact circle Both approaches give the same result. The curvature of a discrete curve can be determined only approximately and in existing publications it is defined as the inverse of the radius of a circle that passes through three adjacent points of the DRC. The curvature of a curve is closely related to the concept of tangent and normal to a curve. Such concepts for DRC are discussed in detail in [6].

The purpose of the article is to analyze the accuracy of determining the curvature of a discretely represented curve depending on the method of its determination and the discretization step.

Keywords: curvature; discretization; discretization step; accuracy analysis; curve; graph; differential characteristics of the curve.