УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.142-150
к. пед. н., доцент **Муртазієв Е.Г.**,
ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523
д. т. н., професор **Верещага В.М.**,
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ КРИВИХ З ВИКОРИСТАННЯМ ЇХНІХ ПОХІДНИХ

Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

Здійснено аналіз існуючих методів дослідження функції із застосуванням її похідних. Зокрема розглянуто теореми Ролля, Лагранжа, Ферма щодо їхнього геометричного сенсу і графічної інтерпретації. Показано графічно зв'язок функції та її похідної в екстремальних точках для опуклого та увігнутого варіантів.

Розглянуто дослідження функції однієї змінної з використанням її другої похідної, надано у проекційному зв'язку графіки функції та її першої і другої похідних для опуклого та увігнутого варіантів.

З урахуванням проведених візуалізацій, надано узагальнені графіки для елементу кривої, коли він складається із опуклої і увігнутої частин. При цьому, ці графіки надано без обчислень, а виходячи із розрізнених теоретичних положень щодо цього питання.

Узагальнені графіки кривої та її першої і другої похідних подані у проекційному зв'язку для двох варіантів, коли опукла частина кривої змінюється на увігнуту і навпаки, коли увігнута її частина змінюється на опуклу.

Розглянуті у цій статті питання самі по собі є елементарними, давно відомими і не мають наукової новизни однак, їх систематизація і узагальнене графічне подання відіграватимуть важливу роль у подальших наукових дослідженнях щодо аналізу композиційних геометричних об'єктів.

Ключові слова: геометричне диференціювання; графіки функції та її похідних; особливі точки.

Постановка проблеми. Композиційні геометричні об'єкти, у тому числі і композиційні криві, не є функціями від аргументу у вибраній системі координат. Тобто, рівняння композиційної кривої утворене не відносно системи координат, а відносно базисних точок, які початково цю криву дискретно подають чи то визначають. Тому питання диференціювання композиційних кривих із застосуванням теорії нескінченних малих потребують певних досліджень, а геометричні методи диференціювання є однаковими і для функціональних і для композиційних кривих. Виходячи з цього створення узагальнених схем для геометричного диференціювання функціональних кривих з метою застосування цих схем, у подальшому, для аналізу композиційних кривих, є задачею актуальною. Крім того, аналітичні визначення похідних традиційного математичного аналізу не є однаковим для різних функцій, через це погано піддаються алгоритмізації і через це є занадто ресурсовитратними під час створення програмної реалізації їхнього диференціювання. І навпаки, геометричні способи диференціювання є однаковими для різних кривих ліній, через це їх достатньо легко програмно реалізувати з мінімальними витратами машинних ресурсів. Це є друга причина актуальності розробки геометричного диференціювання з метою аналізу композиційних кривих ліній.

Формулювання цілей статті. Поєднати розрізненні знання традиційного диференціального числення щодо геометричного утворення похідних, розробити для двох варіантів сегментів кривих ліній узагальнені схеми графіків її першої та другої похідних за ознаками на яких можна визначати особливі точки на двох сегментів вихідної кривої.

Аналіз останніх досліджень. Є загальновідомими методи аналізу кривих ліній як графіків функцій однієї змінної [1]. Методи графічного диференціювання докладно подані у [2]. У роботі [3] було надано практичне застосування графічного диференціювання щодо побудови смуги дифпроекцій. На нашу думку, з погляду на перспективність і можливість застосування геометричного диференціювання для програмних реалізацій у системах автоматизованого проектування, є сенс і актуальність його досліджувати і розробляти. При цьому, якщо до геометричних методів диференціювання застосувати точкове числення Балюби – Найдиша [4], [5] то усі графічні побудови у ньому можна буде замінити на обчислювальні алгоритми, що будуть застосовувати елементарні алгебраїчні операції.

А таке ще більшою мірою сприяє застосуванню геометричного диференціювання в аналізі композиційних геометричних об’єктів.

Основна частина. З математичного аналізу відомо, що похідною функції $y = f(x)$ є відношення приросту функції до приросту аргументу, за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Геометричним сенсом похідної є дотична до кривої, що є графіком функції $y = f(x)$.

Нехай маємо неперервну функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на рис.1 визначимо геометрично похідну в точці М.

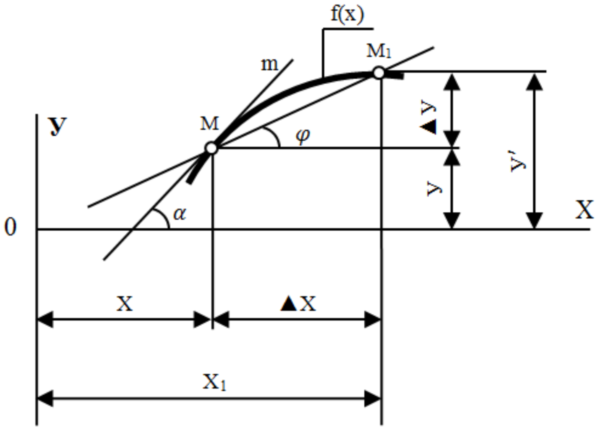

Рис.1. Обґрунтування геометричного сенсу дотичної

Якщо точка M_1, рухаючись по кривій, необмежено близько наближається до фіксованої точки M, то граничним положенням січної MM_1 буде дотична лінія m у точці M. Отже, значення похідної за певного значення аргументу X, що визначає точку $M(x, y)$, дорівнює тангенсу **кута *α*, утвореного між додатними напрямом осі *Ox*** і дотичною m до графіку функцій $f(x_1)$ у точці M.

Запропоноване нами у цій статті застосування похідних щодо графічного аналізу кривих однієї змінної ґрунтується на теоремі Ролля, в якій йдеться що якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку (залишковому інтервалі) $[a,\ b]$ та диференційованою в усіх внутрішніх точках цього відрізку, а на його кінцях приймає нульові значення тобто $f(a) = f(b) = 0$, то існує всередені відрізка $[a,\ b]$, принаймні одна точка $x = c$, коли $a<c<b$, у якої похідна $f'(C) = 0$.

Також для графічного аналізу кривих застосовуємо і теорему Лагранжа про скінчені прирости, у якій йдеться, якщо функція є неперервною на відрізку $[a,\ b]$ і диференційованою в усіх його внутрішніх точках, то всередині цього відрізку $[a,\ b]$ знайдеться, принаймні, одна точка $x = c$ для $a<c<b$, така що $f(b) - f(a) = f'(C)(a - b)$.

Виходячи з усього сказаного, головною ознакою зростання є знак першої похідної якщо перша похідна функції $f(x)$ є додатною, $f'(x) < 0$ для $a<x<b$, то ця функція спадає на відрізку $[a, b]$.

Надамо графічну інтерпретацію цього.

Зростаюча функція (рис. 2) має додатну похідну $f'(x) > 0$

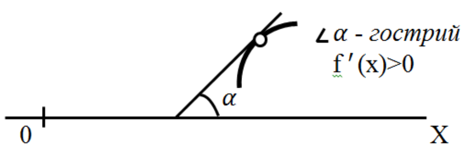

Рис. 2 Зростаюча функція

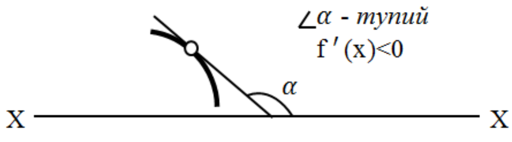

Рис.3 Спадна функція

Спадна функція (рис. 3) має від'ємну похідну $f'(x) < 0$.

На підставі усього сказаного представимо графічно зв'язок функції та її похідної відносно екстремальних точок кривої на рис. 4 і рис. 5.

Згідно із теоремою Ферма, якщо диференційована функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_1$ максимум або мінімум, то її похідна обертаєтсься в нуль у цій точці, тобто з геометричної точки зору, дотична m, за значення аргументу $x = x_1$, буде *паралельною осі Ох.*

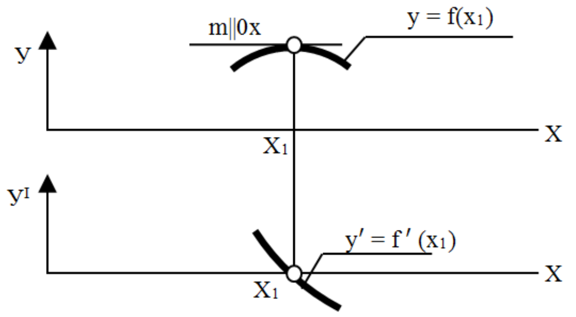

Рис. 4 Зв'язок функції і похідної для максимуму

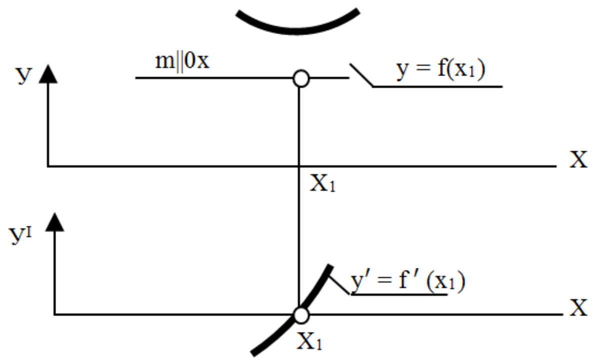

Рис. 5 Зв'язок функції і похідної для мінімуму

Якщо ліворуч від точки x_1 похідна $f'(x - \Delta \times) > 0$, а праворуч $f'_{(x+\Delta x)} < 0$, то функція $f(x_1) = max$ (рис. 4).

Якщо ліворуч від точки x_1похідна $f'(x - \Delta \times) < 0$, а праворуч $f'(x + \Delta \times) > 0$, то функція $f(x_1) = min$ (рис. 5).

Не менш важливим є дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум з використанням її другої похідної $y'' = f''(x)$.

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$ і диференційованою у проміжку (a, b), при цьому, її перша похідна обертається в нуль $f'(x_1) = 0$ і також є неперервною та існує в деякій околі точки x_1 друга похідна $f''(x)$, тоді функція $y = f(x)$, за значення x=x_1, $y' = f'(x_1) = 0$ а друга похідна $y'' = f''(x_1) < 0$ і буде увігнутою та матиме мінімум, коли $f'(x_1) = 0$, а друга похідна $f(x_1) > 0$, (рис.6 та рис. 7).

Як бачимо (рис. 6), перша похідна $f'(x_1 - \Delta x) > 0$ тобто ліворуч від $x = x_1$, а праворуч, тобто $f(x_1 + \Delta x)$<0. Отже перша похідна є спадною функцією тобто ці дотичні в околі точки x_1 мають від'ємний кут нахилу і цьому відповідає графік другої похідної $y'' = f''(x)$.

Як бачимо (рис. 7), перша похідна $f'(x_1 - \Delta x)$<*0*, тобто ліворуч x=x_1, праворуч тобто $f'(x + \Delta x) > 0$. Отже, перша похідна є зростаючою функцією тобто усі дотичні в околі точки x_1 з дотичним кутом нахилом цьому відповідає графік другої похідної $y'' = f''(x)$.

З урахуванням усього попередньо викладеного надамо узагальнені графіки для сегменту кривої та її похідних коли елемент складається з опуклої та увігнутої частини (рис.8), (рис.9).

Вважається що крива $y=f(x)$ обернена увігнутістю догори, тобто є опуклою на інтервалі $(a,\ b)$, якщо усі її точки на цьому інтервалі знаходяться нижче будь-якої дотичної до цієї кривої.

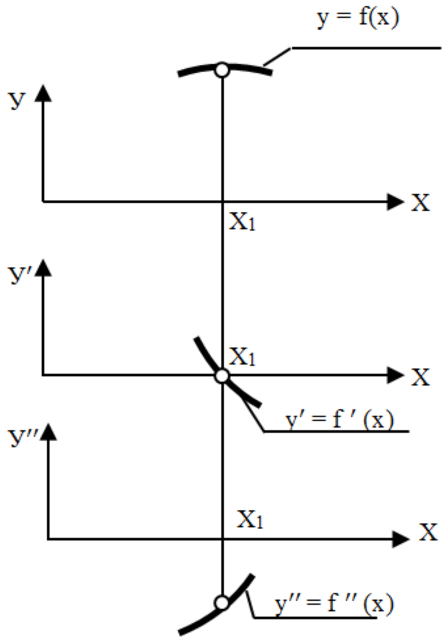

Рис. 6 Зв'язок функції та її похідних при максимумі

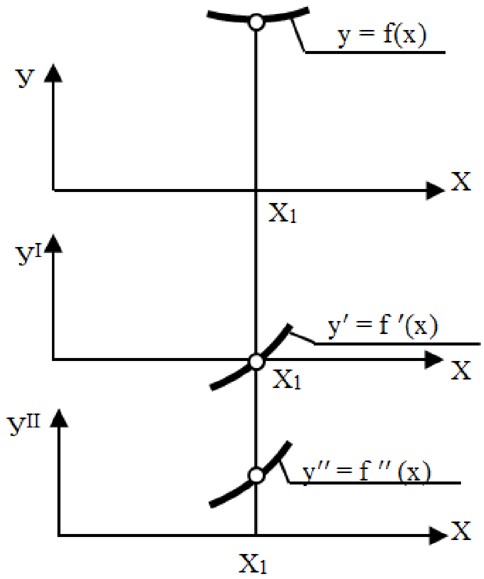

Рис.7 Зв'язок функції та її похідних при мінімумі

Увігнутою вважається крива $y=f(x)$ обернена увігнутістю донизу на інтервалі $(a,\ b)$, якщо усі її точки на цьому інтервалі знаходяться вище будь-якої дотичної до цієї кривої.

Виходячи із досвіду аналізу графіків кривих і графіків її похідних, не здійснюючи розрахунки, надамо узагальнену візуалізацію графіків у двох варіантах, коли опукла частина кривої змінюється на увігнуту і другий варіант, коли увігнута частина змінюється на опуклу.

На рис.8 наведено варіант, коли опукла частина кривої змінюється увігнутою.

Критичні точки кривої – A, B, C, M, N.

Як бачимо ,кути нахилу φ_A та φ_C дотичних t_A та t_C є додатними, відповідні цим кутам точки A' та C', на графіку похідної також є додатними. Дотичні $t_M \parallel t_N \parallel o_x$, на графіку першої похідної відповідні значення точок $M'=N'=0$ – дорівнюють нулю. Кут φ_B дотичної t_B у точці перегину B є від'ємними, відповідна цьому куту вершина B' на першій похідній також має від'ємне значення.

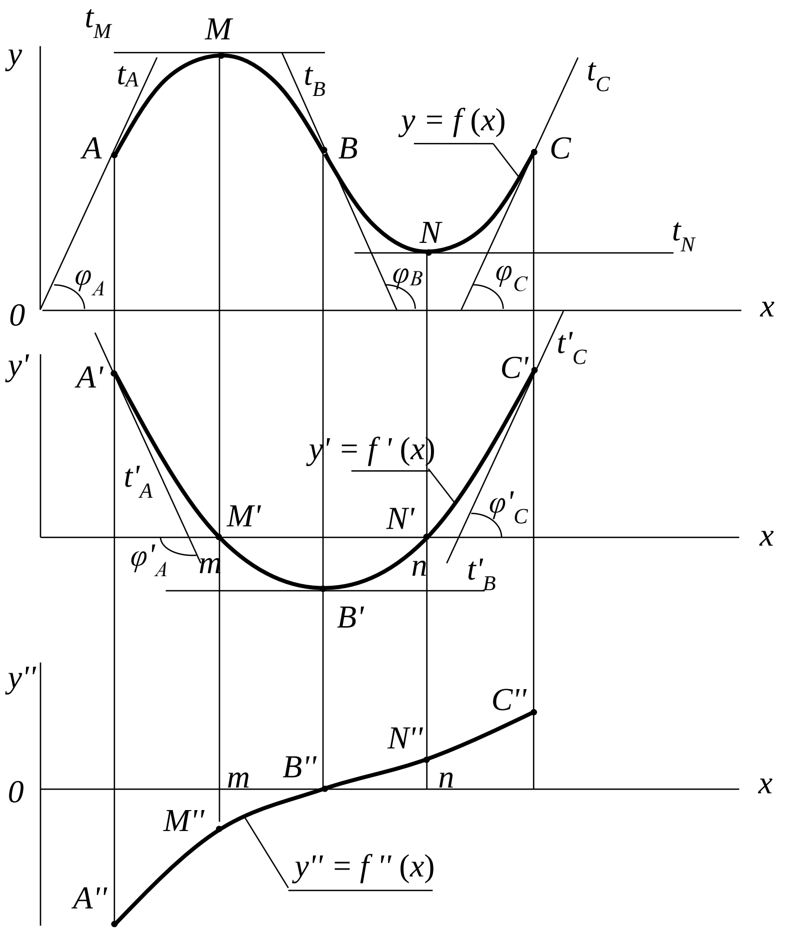

Рис. 8. Узагальнений графік зв’язку функції та її похідних для випадку, коли опукла частина кривої змінюється на увігнуту

Дотична t_A' утворює з віссю O_x від’ємний кут φ_A' якому відповідає від’ємне значення A'' на графіку другої похідної.

Дотична $t_B'||0x$, на графіку другої похідної дотчній t_B' відповідає точка B'', значення якої дорівнює нулю. Дотична t_C' утворює з віссю O_x додатний кут φ_c', якому відповідає додатне значення C'' на графіку другої похідної.

Застосовані позначення на рис. 9: *A, M, B, N, C* – критичні точки кривої *y =f(x).* $t_A, t_M t_B, t_N, t_C$ – позначення дотичних у відповідних точках. *y=f(x),* y'= f'*(x),* y''= f''*(x)* графіки функції та її першої та другої похідних. $\mathrm{A}', \mathrm{M}', \mathrm{B}', \mathrm{N}', \mathrm{C}'$ – значення першої похідної $\varphi_A', \varphi\,'_B, \varphi_c{}'$ – кути нахилу дотичних до кривої. $t_A', t_B',\ t'_C$ – дотичні до похідної у відповідних точках. $\varphi_A', \varphi_c{}'$ – кути нахилу відповідних дотичних. $\mathrm{A}'', \mathrm{M}'', \mathrm{B}'', N'', \mathrm{C}''$ – значення другої похідної.

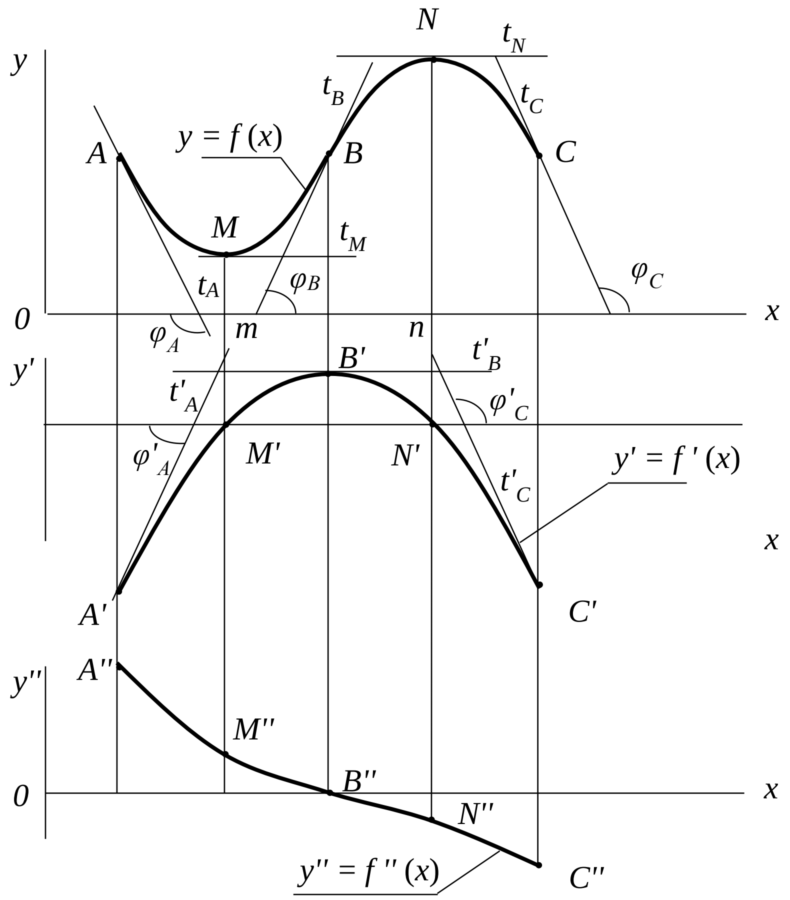

Рис. 9. Узагальнений графік зв’язку функції та її похідних для випадку, коли увігнута частина кривої змінюється опуклу

На рис. 9 наведено варіант, коли увігнута частина кривої змінюється опуклою, як бачимо, кути нахилу φ_A'та $\varphi_c{}'$ дотичних t_A', та t'_C є від’ємними відповідні цим кутам точки A' та C$'$ на графіку першої похідної мають від’ємні значення. Дотичні $t_m||t_n||O_x$, на графіку першої похідної відповідні значення M'=N'=O. Кут φ_B' дотичної t_B у точці перетину B є дотичним, відповідна цьому куту вершина B$^{'}$ має достатнє значення.

Дотична t_A', утворює з віссю O_x додатній кут φ_A', якому відповідає додатне значення A$''$ на графіку другої похідної. Дотична $t_B''||o_x$, якій на графіку другої похідної відповідає точка B$''$= O.

Дотична t_c' утворює з віссю O_x від’ємний кут φ_C' якому відповідає від’ємне значення C$''$ на графіку другої похідної.

Висновки. На основі проведеного аналізу геометричних методів диференціювання графіків кривих зроблено узагальнення для двох випадків сегментів кривих ліній, які утримують найбільшу кількість варіантів критичних і особливих точок. Графічно встановлено зв’язок між формою кривої та її першою і другою похідними. Тобто, для кожної особливої точки кривої лінії обґрунтовано значення першої та другої її похідних. Вказується на перспективність розробки графічних методів диференціювання кривих ліній через можливість створення на їх основі із застосуванням точкового БН-числення, обчислювальних алгоритмів, які дозволять у подальшому автоматизувати процес аналізу кривих ліній. Хоча сам матеріал, викладений у статті не являє собою наукової новизни, однак його систематизація вартує уваги через перспективність його застосування щодо аналізу композиційних геометричних об'єктів.

Література

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.
2. Бронштейн І.Н , Семеняев К.А. Довідник по математиці для інженерів та учнів вузів інд. перераб. Москва : Наука, 1980, 996с.
3. Верещага В.М. О полі дифрекцій ємпіричної кривої / Нарисна геометрія та креслення (міжвузівський збірник). Алма-Ата, 1979 . С. 63-66.
4. Балюба І.Г Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении / дис. доктора техн. наук. Макіївка : МНСН, 1995. 227 с.
5. Балюба І.Г., Найдиш В.М. Точечное исчисление (навчальний посібник під ред. Верещаги В.М.). Мелітополь : видавництво МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2015. 234 с.

References

1. *Dorogovcev A. Ja.* Matematychnyj analiz: Pidruchnyk: U dvoh chastynah. Chastyna 1. Kyi'v : Lybid', 1993. 320 s.
2. *Bronshtejn I. N. , Semenjaev K. A.* Dovidnyk po matematyci dlja inzheneriv ta uchniv vuziv ind. pererab. Moskva : Nauka, 1980, 996s. {in Russian}
3. *Vereshhaga V. M.* O poli dyfrekcij jempirychnoi' kryvoi' / Narysna geometrija ta kreslennja (mizhvuzivs'kyj zbirnyk). Alma-Ata, 1979 . S. 63-66. {in Russian}
4. *Baljuba I.G.* Konstruktyvnaja geometryja mnogoobrazyj v tochechnom yschyslenyy / dys. doktora tehn. nauk. Makii'vka : MNSN, 1995. 227 s. {in Ukrainian}
5. *Baljuba I.G., Najdysh V.M.* Tochechnoe yschyslenye (navchal'nyj posibnyk pid red. Vereshhagy V.M.). Melitopol' : vydavnyctvo MDPU im. B.Hmel'nyc'kogo, 2015. 234 s.

UDC 514.18

PhD, associate prof. **Ernest Murtaziiev,**
ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523
PhD, prof. **Viktor Vereshchaga**,
vervik1949@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0038-8300
Bogdan Khmelnitsky Melitopol State Pedagogical University

GENERALIZED GRAPHICAL ANALYSIS OF CURVES USING THEIR DERIVATIVES

An analysis of the existing methods of research of the function using its derivatives was carried out. In particular, the theorems of Rolle, Lagrange, and Fermat are considered in relation to their geometric meaning and graphic interpretation. The relationship between the function and its derivative at extreme points for the convex and concave variants is shown graphically.

The study of the function of one variable using its second derivative is considered, provided in the projection relationship of the graph of the function and its first and second derivatives for convex and concave variants.

Taking into account the performed visualizations, generalized graphs are provided for the curve element when it consists of convex and concave parts. At the same time, these graphs are provided without calculations, but based on various theoretical positions on this issue.

The generalized graphs of the curve and its first and second derivatives are presented in the projection relationship for two options, when the convex part of the curve changes to concave and vice versa, when its concave part changes to convex.

The questions considered in this article are elementary in themselves, known for a long time and do not have scientific novelty, however, their systematization and generalized graphic presentation will play an important role in further scientific research on the analysis of composite geometric objects.

Keywords: geometric differentiation; graphs of a function and its derivatives; special points.