УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.185-200

д. т. н., професор **Пустюльга С. І.,**
mbf.declutsk@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7623-7803,
к. т. н., доцент **Самчук В. П.,**
volodsam@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9045-9525,
к. т. н., доцент **Головачук І. П.,**
golovachuk.igor@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0811-6107,
к. т. н., доцент **Лелик Я. Р.,**
iaroslavlelyk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6040-3990,
ст. викладач **Клак Ю. В.,**
uklak@i.ua, ORCID: 0000-0002-7359-0756,
Луцький національний технічний університет

ДИСКРЕТНО-ВОКСЕЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТА РОЗРАХУНКУ ЇХ ФРАКТАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ

У роботі запропоновано підхід до дискретно-воксельного представлення моделей різного роду об'єктів та досліджено множину геометричних параметрів, що впливають на технічні та технологічні характеристики ефективного їх функціонування.

На основі базового елемента, яким є воксель, розглянуто взаємовідношення характеристик сусідства окремих складових моделей, що є визначальними під час дискретного представлення образів різної розмірності. У роботі наведено методику розрахунку основних геометричних параметрів воксельно представлених об'єктів, а аналіз параметрів сусідства їх елементарних складових дозволив ефективно виділяти на зображеннях граничні та внутрішні точки та об'єднувати їх у цілісні геометричні образи на просторовому зображенні.

Представлено алгоритми розрахунку характерних параметрів воксельних моделей різної розмірності. Запропоновано обчислювати площі відсіку і зовнішньої поверхні дво- та тривимірних моделей через геометричні характеристики сімейств дискретно-воксельних моделей граничних ліній каркасу в одному із напрямів.

Акцентовано на тому, що однією із базових геометричних характеристик, стосовно даної проблематики, є фрактальна розмірність дискретно-воксельних моделей досліджуваних об'єктів. Методи фрактальної теорії є достатньо добре розробленими, проте їх реалізація є трудомісткою і, як правило, вона не пов'язана з комплексним узагальненням та ідентифікацією базових геометричних характеристик модельованих об'єктів, тим більше у воксельному представленні. Тому, у ряді відомих нам опублікованих роботах, до стадії практичної реалізації *процесу моделювання фрактальних структур було доведено лише синтез простих, як правило, двовимірних структур.*

У роботі описано підхід до обчислення фрактальної розмірності дискретно-воксельних моделей та визначено шляхи удосконалення функціональних якостей об'єктів за рахунок ефективного управління множиною їх геометричних параметрів. Запропоновано алгоритм, який дозволяє суттєво спростити процедуру підрахунку фрактальної розмірності шляхом пониження розмірності простору для кожного шару вздовж однієї із осей системи координат.

Визначено перспективи подальших наукових досліджень як у напрямку удосконалення пропонованих програмних алгоритмів, так і в розширенні сфери їх застосування.

Ключові слова: воксель; воксельні моделі; ідентифікація об'єктів; геометричні характеристики; фрактальна розмірність.

Постановка проблеми. На сьогодні в технологіях моделювання реальних об'єктів або процесів все частіше зустрічаються геометричні образи різної розмірності із складною і нерегулярною структурою. Найбільш наочними прикладами таких об'єктів є структура земної і водної поверхонь, рослинне покриття суші, серцево-судинна система людини, схеми транспортних маршрутів міст, різновиди пористих матеріалів або шорсткість поверхонь металевих виробів і т.і. Застосування методів, алгоритмів та базових форм класичної геометрії для адекватного представлення моделей згаданих об'єктів є трудомістким, а у багатьох випадках їх просто неможливо реалізувати. Такі «хаотично-різані» структури ідентифікуються як фрактальні, мультифрактальні або квазіфрактальні образи.

Вже достатньо добре розроблена фрактальна теорія принципово здатна впоратися із поставленою проблемою, проте методи її реалізації є трудомісткими, часто відірваними від комплексного розуміння та ідентифікації базових геометричних характеристик модельованих об'єктів і доведені до стадії практичного застосування лише для синтезу простих, як правило, двовимірних структур.

Геометричні характеристики модельованих об'єктів лежать в основі розв'язання більшості практичних задач. Якщо такі характеристики обчислюються та аналізуються на основі двовимірних зображень реальних об'єктів та множин, то вони мають, як правило, дискретно-піксельну структуру. Для узагальнення потрібної інформації про об'єкти на зображеннях і використання її для вирішення прикладних завдань необхідно мати методику та алгоритми обчислення основних характеристик об'єктів на зображеннях: параметрів їх форми, геометричну структуру, склад об'єктів, інші характеристики. На основі аналізу знайдених характеристик узагальнюються висновки про типи об'єктів, якість досліджуваного зображення з метою визначення напрямів удосконалення його технічних та технологічних властивостей [1]. При цьому зрозуміло, що основу аналізу складають саме геометричні характеристики або цілісного зображення, або його окремих фрагментів [2]. Найчастіше вимірюваними параметрами фрагменту зображення у піксельному представленні [3, 4] можуть бути: ідентифікація типу об'єкту, його топологічна або фрактальна розмірність, лінійні розміри, периметр, площа, параметри форми (опуклість, концентричність, компактність, округлість), статичні моменти замкнутих областей та інші геометричні характеристики.

Однак, сучасні технології та засоби візуалізації усе більше удосконалюються, інколи потребують наявності зображення моделей у просторах, що перевищують розмірність 2, і тому вимагають нових, а іноді і радикальних рішень. Таким чином, в практичних застосунках актуальним стає завдання пошуку і розробки альтернативних методів візуалізації для вирішення спеціалізованих задач моделювання.

Альтернативою представлення об'єктів, утому числі і фрактальних є певний об'єм, у якому вся сцена є набором вокселей – елементарних об'ємів. Вони є свого роду аналогами пікселів у двовимірній графіці. Кожен воксель зазвичай має форму куба. Головним недоліком такого представлення образів із різною топологічною або фрактальною розмірністю є їх фізичний розмір. Наприклад, об'єм із середньою роздільною здатністю 256^3 вимагає зберігання близько 16 мільйонів вокселей. Щоб згенерувати зображення тривимірного об'єкту на екрані, вони усі повинні бути оброблені відповідним чином.

Проте об'єм має і ряд важливих переваг: він може надати інформацію про геометричні характеристики внутрішніх елементів моделі, а не тільки зовнішнього шару. Окрім цього, воксельні моделі дозволяють візуалізувати високо деталізовані об'єкти без використання додаткових програмних ресурсів, а кожен воксель – нести інформацію про тип матеріалу, щільність, пружність та інші характеристики.

Для таких моделей можна розробити алгоритм визначення їх фрактальної розмірності, а можливість візуалізації об'єктів абсолютно різної природи і легкість їх динамічних перетворень роблять воксельне представлення вигідною альтернативою «поверхневих моделей» у багатьох практичних задачах. Ще одна перевага воксельних моделей полягає в одноманітності обчислювального процесу для просторів будь-якої розмірності. Насправді, $2=2^1$, $4=2^2$, $8=2^3$ і так далі, де 2 – основа двійкової системи числення, що використовується в обчислювальних машинах, а показник степеня – розмірність простору чи об'єкту моделювання.

Аналіз основних досліджень і публікацій. У роботах [1, 2] були розглянуті алгоритми знаходження різних геометричних характеристик множин пікселів у двовимірному просторі. Ці алгоритми передбачали сегментацію бінарних зображень конкретних об'єктів за рядом геометричних ознак, можливість топологічної ідентифікації кожної характерної області, процедуру визначення фрактальної розмірності як окремих сегментів, так і зображення вцілому, аналіз інтенсивності впливу обчислюваних параметрів на покращення функціональної якості моделей, і на їх основі, – побудову рекомендацій щодо оптимізації технічних і технологічних характеристик фізичних об’єктів, що розглядаються. Однак усі вони стосуються тільки двовимірного (піксельного) представлення об’єктів різної розмірності, та їх аналізу стосовно впливу геометричних характеристик на удосконалення досліджуваних об’єктів та процесів.

Роботи [5, 6] присвячені розробці функціонально-воксельного методу, який базується на застосуванні диференціалів. Його розрахункові конструкції орієнтовані на моделювання алгебраїчних функцій та не пов’язані з вирішенням задач ідентифікації геометричних образів.

Підходи на основі воксельного представлення моделей широко використовуються для інтерпретації даних представлених множинами точок [7], зокрема під час вирішення задач тривимірної картографії, реконструкції, виявлення та розпізнавання 3D-об’єктів, підготовки моделей для 3D-друку [8], в медичних дослідженнях [9] тощо.

Однак, у вище перерахованих роботах відсутній комплексний аналіз геометричних характеристик досліджуваних об’єктів, а параметри фрактальності та їх вплив на шляхи удосконалення моделей для різних практичних застосунків взагалі не розглядалися.

Формулювання цілей та завдання статті. Порівняно з іншими способами представлення геометричних моделей, зокрема полігональними сітками, вокселі мають регулярну та просту структуру, завдяки якій можна сформувати ефективний математичний апарат для обробки, аналізу та управління воксельними моделями 3D-даних.

Тому, метою даної роботи є дослідження геометричних характеристик воксельно представлених моделей, визначення та формалізація взаємовідносин між їх елементами для вирішення задач ідентифікації воксельно представлених образів.

Основна частина. Тривимірний варіант представлення моделей у вигляді вокселей, розміщених у певних об’ємах передбачає, що замість окремих квадратиків (пікселів) для зображення сцен використовуються кубики, положення яких задається трьома цілочисельними координатами (x, y, z). Нерідко, у практичних завданнях, наприклад аналізі даних томографії, координата z використовується як номер певного зрізу на зображеннях.

Моделлю дискретного зображення тривимірного простору, заданого множиною вокселів, можуть бути кубічні решітки (рис. 2), які утворюються точками перетину трьох взаємно перпендикулярних сімейств паралельних прямих із відстанню між ними, рівною масштабній одиниці – *unit*. У якості одиниці може вибиратися величина, рівна, наприклад, розміру пікселя проекції воксельного зображення геометричного об'єкту на одній із координатних площин.

Назвемо об'єктом функцію *f*, визначену на множині регулярно розташованих точок (вокселей), яка набуває значень 0 або 1. Кожному вокселю ставиться у відповідність значення 0, якщо воксель не належить досліджуваному або модельованому матеріальному об'єкту, або 1 – якщо належить. Простим прикладом створення воксельної моделі є відображення тривимірного зображення, наприклад, фрагменту кровоносної системи живого організму за допомогою множини просторових кривих у тривимірному просторі.

Якщо при неперервному представленні геометричних образів розмірності 1, 2 та 3 у тривимірному просторі немає особливих проблем із зв'язністю множин точок, оскільки існує аналітичне їх подання (наприклад, у параметричному вигляді), то у дискретних моделях тих же образів на воксельній решітці питання зв'язності потребує додаткових визначень.

За аналогією формування растрових бінарних решіток на площині, у воксельних дискретних моделях слід визначитися із структурою сусідства окремих незайнятих і зайнятих елементів шестигранної гратки.

Нехай в певному об'ємі задано *W* і *U* – дві множини: кубічні дискретні елементи точки (зайняті вокселі) об'єкту і порожні елементи гратки. Кожен елемент (воксель) *i, j, k* зображення має сусідів, які визначаються відповідно до схеми (рис. 1, а).

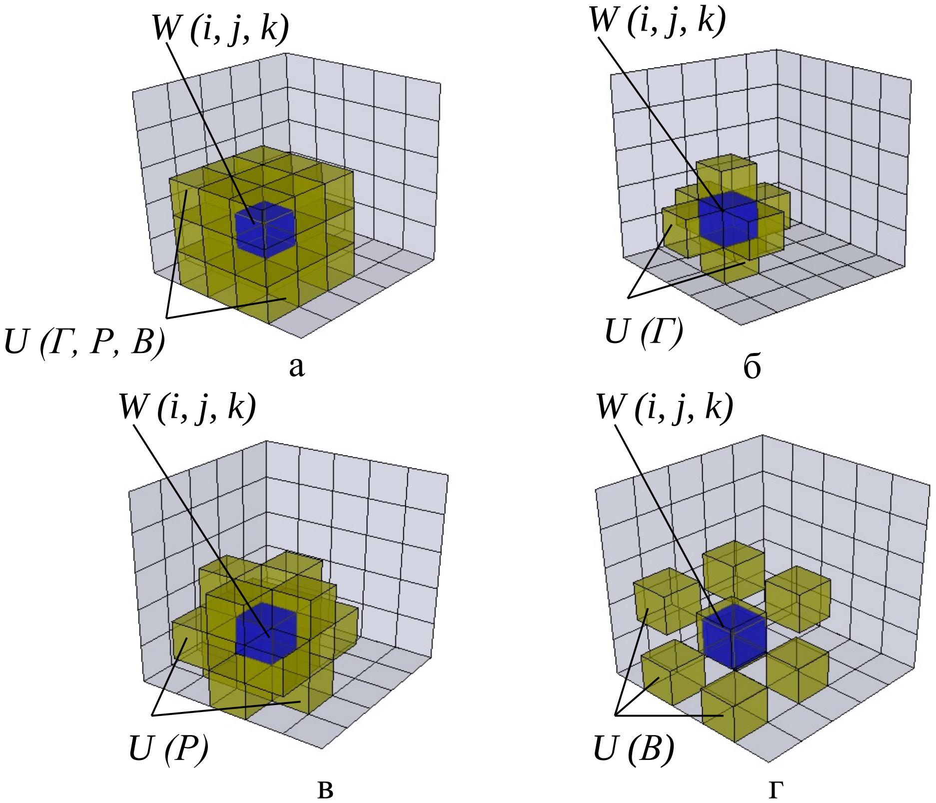


Рис. 1. Схема сусідства зайнятих та вільних вокселей: Г – грань, Р – ребро, В – вершина

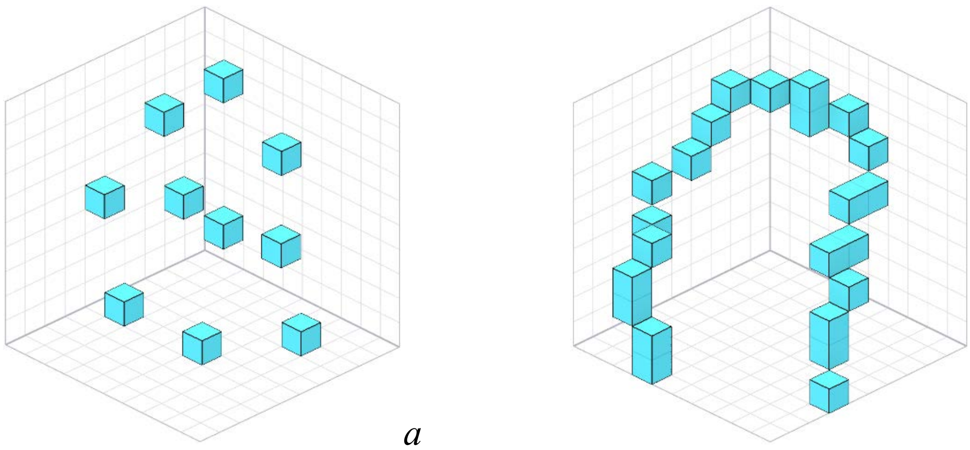
Множину усіх сусідів (*Г, Р, В*) елементу *i, j, k* будемо називати 26-сусідами. Сусіди зі спільними гранями (*Г*) (рис. 1, б) – назвемо прямими сусідами, їх максимальна кількість – 6. Сусіди зі спільними ребрами (*Р*) (рис. 1, в), максимальна кількість – 12 та спільними вершинами (*В*) (рис. 1, г), максимальна кількість – 8, назвемо непрямими сусідами. У загальному випадку, під поняттям сусідства будемо розуміти об'єднання всіх 26 сусідів одного зайнятого вокселя.

Одним із найважливіших параметрів дискретного кубічного представлення точок геометричного образу у тривимірному просторі є відстань між вокселями. Відстань між двома вокселями – це довжина найкоротшого відрізка, що сполучає центри двох сусідніх елементів. В шестигранних просторових гратках дві точки є прямими сусідами, якщо відстань між ними дорівнює *unit*. Дві точки називаються непрямими сусідами, якщо відстань між ними рівна $\sqrt{2} \cdot unit \cdot$– за 12-сусідством і $\sqrt{3} \cdot unit$ – за 8-сусідством.

Із структурою сусідства дискретних точок просторової моделі об'єкта тісно повязане поняття зв'язності. Множина точок на кубічній гратці вважається зв'язною, якщо кожна із точок множини (зайнятий воксель) має хоча б один із варіантів сусідства. Дві і більше множин точок у заданому об'ємі називаються розділеними, якщо їх об'єднання не є зв'язним.

Використовуючи поняття зв'язності окремих дискретних елементів моделі об'єкту, наведемо визначення дискретно представленої фігури у воксельній інтерпретації. Дискретною фігурою називається «максимально зв'язна» множина зайнятих вокселей на просторовій гратці. Термін «максимально зв'язна» буде означати, що дискретна фігура не міститься ні в якій іншій зв'язній множині окремих точок вокселей, що не співпадають із цією фігурою. Таких «максимально зв'язних» множин в об'ємній просторовій моделі може бути декілька. Цим і будемо ідентифікувати наявність різної кількості геометричних фігур на заданому тривимірному зображенні.

Окремий зайнятий воксель є дискретною моделлю точки, він не має сусідів, не належить жодній із зв'язних множин і тому вважатимемо його 0-вимірним елементом простору. Відповідно, нескінченну множину таких дискретних елементів у заданому об'ємі будемо називати фрактальною множиною точок (вокселей) із розмірністю більше 0, і менше 1 (рис. 2, *а*).



а *б*

Рис. 2. Фрактальна множина вокселей із розмірністю: *а* – [0; 1); *б* – [1; 2)

Дискретна воксельна модель одновимірного образу (прямої чи кривої лінії) у просторовому об'ємі з тривимірною граткою представляється зв'язною множиною кубиків із розмірами масштабу елемента гратки (вокселя). При цьому ширина образу визначається виходячи із структури сусідства окремих його елементів. Це означає, що для кожної дискретно представленої точки (чорного вокселя) лінії серед усіх 26 сусідніх вокселей мають бути, як мінімум, ще один, а як максимум чотири зайняті вокселі як із прямим, так і непрямим сусідством. У випадку наявності одного або ж двох сусідів (із яких обов'язковим є непрямий сусід) – точка дискретної моделі лінії є кінцевою (граничною) (рис. 2, *б*). У випадку, коли чорний воксель має від 2 до 4 чорних сусідів – вона є внутрішньою точкою дискретно представленої незамкнутої кривої лінії. Такий тип зв'язності, де враховується пряме та непряме сусідство вокселей назвемо змішаним або комбінованим типом зв'язності.

Для дискретної воксельної моделі одновимірного образу важливими геометричними характеристиками є: топологічна (фрактальна) розмірність, степінь криволінійності (прямолінійності) та довжина визначених ділянок. Топологічна розмірність визначається за граничними (кінцевими) точками дискретної моделі. Границями моделі (рис. 2, *б*) є 0-вимірні точки (вокселі), тобто – об'єкт є одновимірним.

Відповідно запропонованому комбінованому представленню одновимірних образів модель може включати множини вокселей із трьома типами сусідства, а саме: $N_Г$ – вокселі із прямими сусідами (сусідство – грань), N_P– вокселі із непрямими сусідами (сусідство – ребро вокселя), N_B – вокселі із непрямими сусідами (сусідство – вершина гратки). При наявності для сусідніх вокселей одночасно декількох зв'язків, для визначення довжини моделі – вибирається коротший (діагональний) шлях (рис. 3).

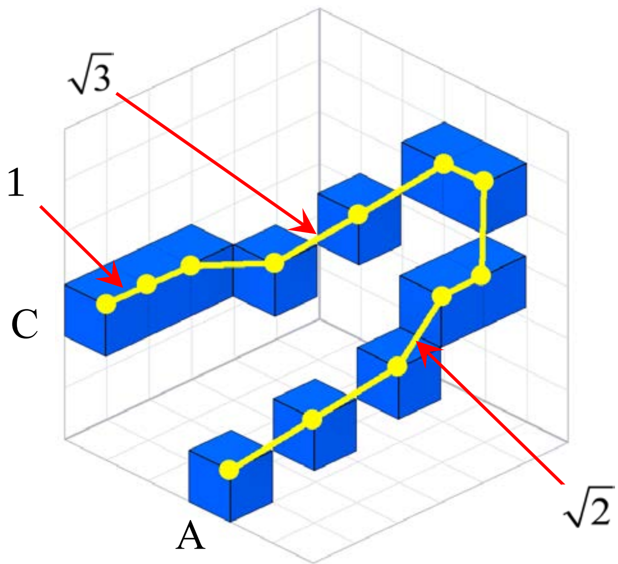


Рис. 3. Визначення довжини воксельної моделі одновимірного образу

Довжина воксельної моделі одновимірного образу визначається за формулою:

$$L_{A-C} = unit(N_{Г} + \sqrt{2}N_{P} + \sqrt{3}N_{B}), \tag{1}$$

де $L_{A\text{-}C}$ – довжина моделі («скелету»); $N_{Г}$ – кількість зв'язків по гранях вокселей моделі одновимірного образу; N_{P} – кількість зв'язків по ребрах вокселей моделі; N_{B} – кількість зв'язків по вершинах вокселей моделі; *unit* – масштабний параметр елементів дискретної просторової гратки.

Степінь криволінійності (прямолінійності) дискретної воксельної моделі одновимірного образу – $W_{кр}$ визначається через відношення обчисленого параметра довжини «скелетним» методом до відстані між граничними точками даного об'єкту:

$$W_{кр} = \frac{L_{A-C}}{L_{GO}}, \tag{2}$$

де L_{GO} – відстані між граничними точками об'єкту.

У замкнутої, воксельно представленої, просторової лінії на об'ємних просторових гратках не існує кінцевих точок, тому у її дискретній воксельній моделі кожна точка повинна мати від 2 до 4 чорних сусідів.

Запропоновані визначення у багатьох випадках дозволяють легко виділити на зображенні граничні та внутрішні точки (чорні вокселі) і об'єднати їх у лінію. Це надає можливість алгоритмічного визначення границь одновимірного образу на просторовому зображенні.

При наявності у воксельній моделі одновимірного образу, за комбінованим типом зв'язності, більше 4 чорних сусідів для одного елементу гратки, таке утворення може ідентифікуватися як місце перетину декількох воксельних моделей кривих чи прямих (А), або як ущільнення (потовщення) одновимірних образів на певних ділянках (рис. 4).

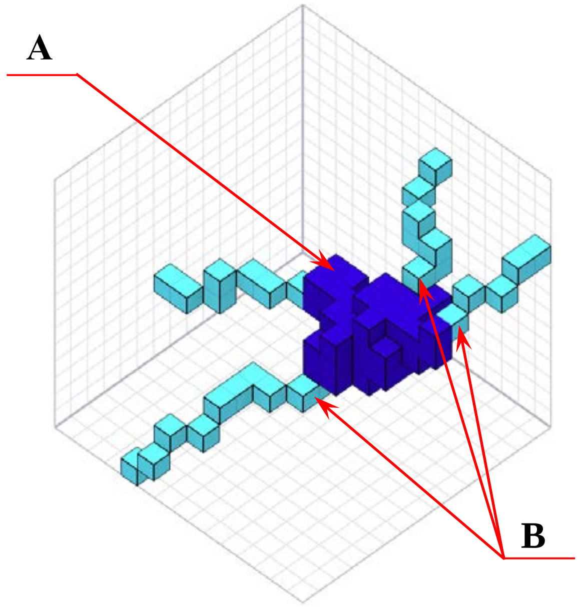


Рис. 4. Перетин (А) декількох одновимірних образів або ущільнення (потовщення) (В) воксельних моделей

Для таких типів моделей (рис. 4), окрім вже означених для дискретних одновимірних образів геометричних характеристик, можна визначити площу зовнішньої поверхні ущільнення (А) або у ряді випадків - об’єм ущільнення. Ці геометричні характеристики можуть стати базовими для розрахунку, наприклад, центру ваги або статичних моментів даного утворення. Границею таких утворень є вокселі (В) (рис. 4), які за комбінованим типом зв’язності мають більше 4 сусідів.

Дискретні моделі двовимірних образів будемо ідентифікувати відповідно визначень класичної геометрії: будь-яку поверхню можна представити сіткою одновимірних образів, тобто лінійним каркасом. Звідси, якщо дискретна воксельна модель містить в усіх своїх перерізах (рівнях) у двох напрямках тільки воксельні моделі одновимірних образів, з характеристиками сусідства, наведеними вище стосовно ліній, такий воксельно представлений об’єкт є дискретною моделлю двовимірного образу (рис. 5). У разі наявності іншої структури сусідства чорних і білих вокселей для будь-якої лінії каркасу об’єкта, він може бути охарактеризований як дискретна модель двовимірного образу із локальними включеннями або ущільненнями.

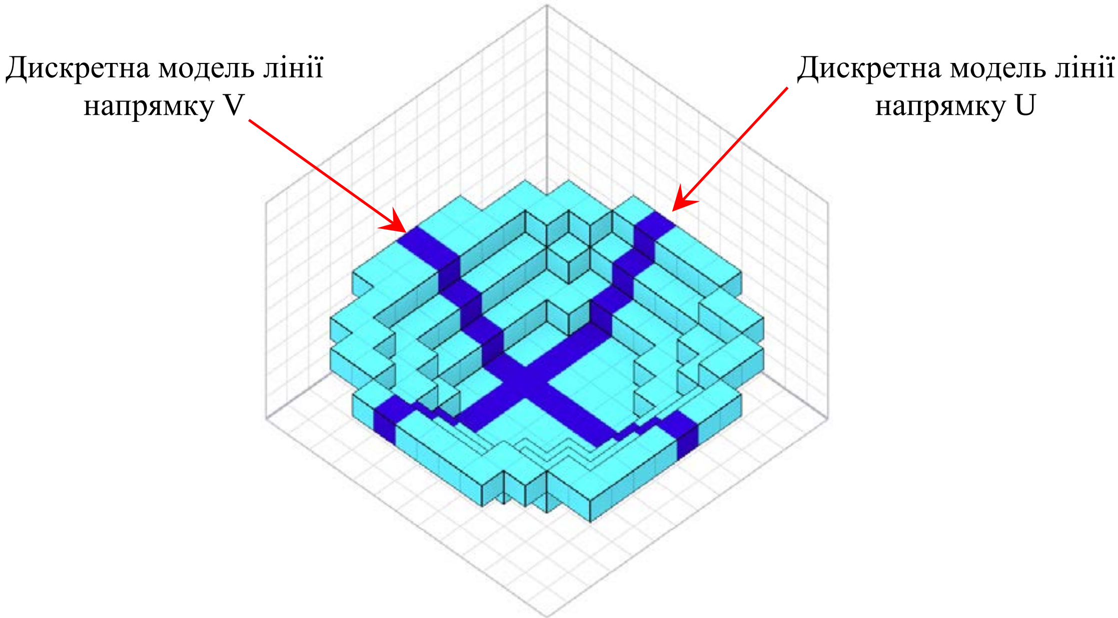


Рис. 5. Воксельно представлений об'єкт – дискретна модель двовимірного образу

Для, дискретно представлених вокселями, двовимірних образів характерною геометричною характеристикою є площа $S_{вп}$ відсіку поверхні. Пропонується площу відсіку поверхні визначати через геометричні характеристики сімейства дискретних моделей ліній каркасу в одному із напрямків:

$$S_{вп} = n \times k \times (unit)^2 ,$$

де k – число видимих граней n-ої смуги лінії каркасу дискретної моделі поверхні; n – число смуг сімейства лінійного каркасу, що покривають відсік дискретної моделі поверхні в одному із напрямків; $unit$ – масштабний параметр сторони елемента дискретної просторової гратки.

Дискретні воксельні моделі тіл, тобто тривимірні об'єкти, ідентифікуються через сімейство двовимірних замкнутих образів. Кожна дискретна модель окремої смуги об'єкту представляє собою множину із внутрішніми і граничними вокселями (рис. 6). Всі внутрішні елементи просторової гратки кожної смуги мають по вісім сусідів за комбінованим типом зв'язності. Граничні вокселі смуги сформовані відповідно до геометричних властивостей дискретних моделей одновимірних образів, де кожний із елементів має від 2 до 4 сусідів.

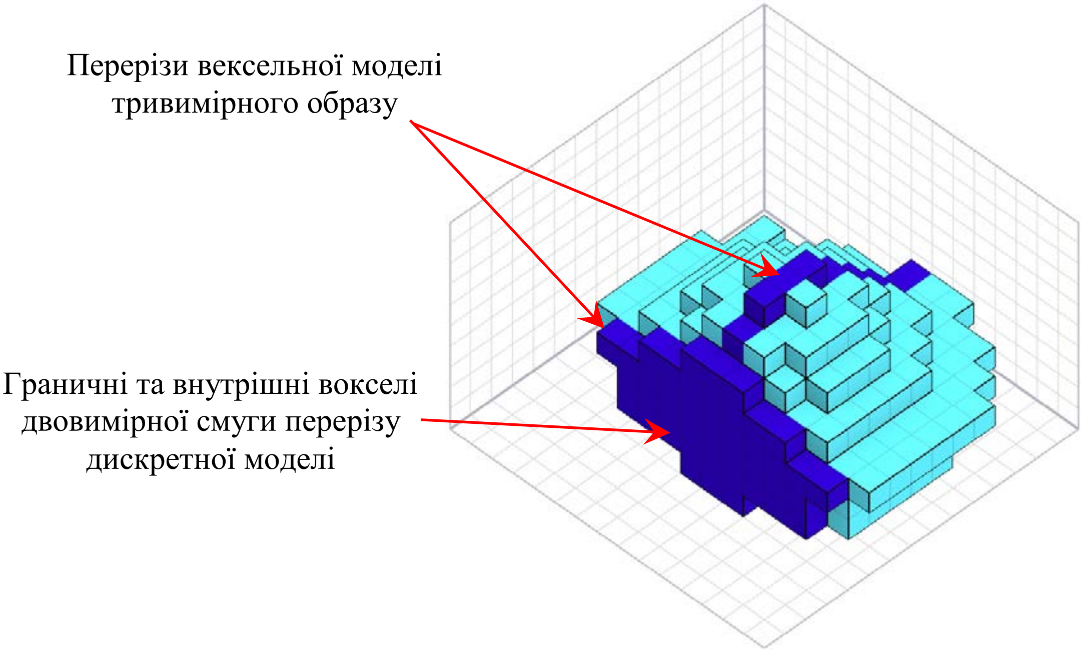


Рис. 6. Ідентифікація дискретної воксельної моделі тіла через сімейство двовимірних замкнутих образів

Дискретні моделі окремих перерізів тривимірного об’єкту, можуть містити в середині і не зайняті елементи просторової гратки. Тоді воксельна модель тривимірного об’єкту ідентифікується як тіло із отворами, кількість яких суттєво впливає на його фрактальну розмірність.

Однією із основних геометричних характеристик дискретної моделі тривимірного об’єкту, при розв’язанні практичних задач, є його об’єм. Об’єм моделі легко визначити через загальну кількість зайнятих (чорних) вокселей із визначеними масштабними параметрами елементів гратки:

$$V_з = n \times unit^3,$$

де n – число чорних вокселей моделі тривимірного образу.

Однак на практиці визначити повну кількість чорних вокселей в моделі без спеціальних геометричних операцій неможливо. Тому, пропонується визначати об’єм моделі тривимірного дискретно представленого об’єкта через сімейство двовимірних образів, тобто геометричні параметри його окремих смуг. Якщо $S_{см}$ представити у вигляді:

$$S_{см} = k \times unit^2,$$

тоді об’єм смуги обчислюється за формулою:

$$V_{см} = S_{см} \times unit = k \times unit^3,$$

а загальний об’єм дискретної моделі тіла визначається з виразу:

$$V_з = m \times k \times unit^3,$$

де k – число чорних вокселей n-ої смуги перерізу тривимірного дискретно представленого образу; n – число сімейства смуг двовимірних дискретних перерізів, що покривають задане тіло в напрямку однієї з осей.

Ще однією важливою геометричною характеристикою воксельних моделей тривимірних образів, при реалізації практичних задач, є площа їх зовнішньої поверхні $S_{ЗП}$. Її можна визначити через геометричні характеристики сімейства дискретних моделей замкнутих граничних ліній каркасу в одному із напрямків, тобто параметри одновимірних образів:

$$S_{ЗП} = n \times k \times (unit)^2 ,$$

де k – число видимих граней n-ої смуги замкнутої лінії каркасу дискретної моделі тривимірного образу; n – число сімейства смуг лінійного каркасу, що покривають дискретну вексельну модель тіла в одному із напрямків.

Ще одна визначальна, для поставлених задач, геометрична характеристика – фрактальна розмірність образів потребує особливої уваги, адже у кожному Евклідовому просторі певної розмірності можуть розміщуватися і множини фрактальних об’єктів певної розмірності.

Як було визначено вище – один елемент фрагментації, будь-то піксель чи воксель, чи гіпервоксель є моделлю точки із визначеною класично розмірністю 0. Нескінченна множина таких окремих, незалежних елементів фрагментації із 0-вимірною розмірністю кожного із елементів може представляти фрактальну множину із дробовою розмірністю D_0. Так при розміщенні нескінченної множини у двовимірному просторі (піксельна модель) значення D_0 знаходиться у межах – $0 < D_0 < 2$. При розміщенні у E^3 (воксельна модель) – $0 < D_0 < 3$. Узагальнюючи для простору E^n, можна констатувати, що вона знаходиться у межах – $0 < D_0 < E^n$.

Аналогічним чином можна визначити межі фрактальної розмірності дискретних моделей ліній – D_1. Такі геометричні об’єкти із певними властивостями можуть мати фрактальну розмірність у межах: $1 < D_1 < E^n$.

Фрактальні поверхні D_2 у Евклідових просторах різної розмірності мають відповідно розмірність – $2 < D_2 < E^n$.

Слід зазначити, що у даній роботі розглядаються тільки модифікації класичних геометричних об’єктів із властивістю «сильної ламності чи різаності». Бо якщо уявити тривимірний об’єкт, тобто тіло у тривимірному просторі, яке пронизане безліччю отворів, то воно може і не представляти жодного із характерних геометричних об’єктів, а його фрактальна розмірність може прямувати навіть до 0, тобто: $0 < D_3 < 3$.

Розглядаючи фрактальні об’єкти, представлених множиною вокселай у тривимірному просторі, необхідно оперувати такою характеристикою, як об’єм покриття заданого простору елементарними кубиками зі стороною Δ=*unit*. Тоді фрактальну розмірність можна звязати із кількістю кубиків покриття залежністю:

$$N = C \times \Delta^{-D} ,$$

де D – фрактальна розмірність воксельної моделі.

Однак, порахувати кількість елементарних кубиків у цілій низці масштабних ітерацій знаходження фрактальної розмірності воксельної моделі достатньо складно.

Тому, авторами запропоновано алгоритми, які дозволяють суттєво спростити процедуру підрахунку фрактальної розмірності шляхом пониження розмірності простору для кожного шару вздовж однієї із осей системи координат. Кожен шар буде мати свої фрактальні характеристики, а результуюче значення фрактальної розмірності можна у загальному вигляді представити:

$$D_3 = 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\left(N^1_{(\Delta)} + N^2_{(\Delta)} + N^3_{(\Delta)} + \ldots + N^{\alpha}_{(\Delta)}\right)\right)}{\ln(\alpha)},$$

де $N^1_{(\Delta)}, N^2_{(\Delta)}, N^3_{(\Delta)}, \ldots N^{\alpha}_{(\Delta)}$ – кількість зайнятих клітин (пікселів) у кожному із шарів.

Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі запропоновано підхід до дискретно-воксельного представлення моделей різного роду об’єктів та досліджено множину геометричних параметрів, що впливають на технічні та технологічні характеристики ефективного їх функціонування.

На основі базового елемента– вокселя визначені взаємовідношення характеристик сусідства, що є визначальними під час формування моделей образів різної розмірності.

Запропоновано підхід до підрахунку фрактальної розмірності дискретно-воксельних моделей та визначено шляхи удосконалення функціональних якостей об’єктів за рахунок ефективного управління множиною їх геометричних параметрів.

Подальші дослідження плануються проводитись як у напрямку удосконалення пропонованих програмних алгоритмів, так і в розширенні сфер їх застосування.

Література

1. *Пустюльга С.І., Самчук В.П., Самостян В.Р., Головачук І.П.* Кількісний аналіз нуль-вимірних (точкових) множин методами фрактальної геометрії. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2019. Вип. 96. С. 64-72.
2. *Пустюльга С.І., Самчук В.П., Придюк В.М., Самостян В.Р.* Дискретне (піксельне) представлення транспортної мережі міста для топологічної ідентифікації та фрактального аналізу її геометричних складових. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2021. Вип. 1 (16). С. 137-149.

3. *Пустюльга С.І., Самостян В.Р., Головачук І.П., Придюк В.М., Оксенюк В.А.* Методика ідентифікації зображень п’ятен розпилу палива форсунками. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2018. Вип. 2(11). С. 100-116.
4. *Пустюльга С.І., Придюк В.М., Головачук І.П.* Метод фрактальної оцінки показника накладання маршрутних схем для оптимізації міських пасажирських перевезень. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2020. Вип. 1(14). С. 124-135.
5. *Толок А.В., Толок Н.Б.* Решение задач математического программирования функционально-воксельным методом, Пробл. управл., 2017, № 3, с. 37–42.
6. *Толок А.В.* Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. Физматлит. 2016. 112 с.
7. *Pearse G.D., Watt M.S., Dash J.P., Stone C., Caccamo G.* Comparison of models describing forest inventory attributes using standard and voxel-based lidar predictors across a range of pulse densities. *Int. J. Appl. Earth Obs.* Geoinf., 78 (2019), pp. 341-351.
8. *Ghadai S., Jignasu A., Krishnamurthy A.* Direct 3D printing of multi-level voxel models. *Addit. Manuf.*, 40 (2021), Article 101929.
9. *Martins D., Rademacher L., Gabay A.S., Taylor R., Richey J.A., Smith D.V., Goerlich K.S., Nawijn L., Cremers H.R., Wilson R., Bhattacharyya S., Paloyelis Y.* Mapping social reward and punishment processing in the human brain: a voxel-based meta-analysis of neuroimaging findings using the social incentive delay task. *Neurosci*. Biobehav. Rev., 122 (2021), pp. 1-17.

References

1. *Pustiulha S.I., Samchuk V.P., Samostian V.R., Holovachuk I.P.* Kilkisnyi analiz nul-vymirnykh (tochkovykh) mnozhyn metodamy fraktalnoi heometrii. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. 2019. Vyp. 96. S. 64-72. {in Ukranian}
2. *Pustiulha S.I., Samchuk V.P., Prydiuk V.M., Samostian V.R.* Dyskretne (pikselne) predstavlennia transportnoi merezhi mista dlia topolohichnoi identyfikatsii ta fraktalnoho analizu yii heometrychnykh skladovykh. *Suchasni tekhnolohii v mashynobuduvanni ta transporti*. 2021. Vyp. 1 (16). S. 137-149. {in Ukranian}
3. *Pustiulha S.I., Samostian V.R., Holovachuk I.P., Prydiuk V.M., Okseniuk V.A.* Metodyka identyfikatsii zobrazhen p’iaten rozpylu palyva forsunkamy. *Suchasni tekhnolohii v mashynobuduvanni ta transporti*. 2018. Vyp. 2(11). S. 100-116. {in Ukranian}
4. *Pustiulha S.I., Prydiuk V.M., Holovachuk I.P.* Metod fraktalnoi otsinky pokaznyka nakladannia marshrutnykh skhem dlia optymizatsii miskykh pasazhyrskykh perevezen. *Suchasni tekhnolohii v mashynobuduvanni ta transporti*. 2020. Vyp. 1(14). S. 124-135. {in Ukranian}

5. *Tolok A.V., Tolok N.B.* Reshenye zadach matematycheskoho prohrammyrovanyia funktsyonalno-vokselnым metodom, Probl. upravl., 2017, № 3, 37–42. {in Russian}
6. *Tolok A.V.* Funktsyonalno-vokselnыi metod v kompiuternom modelyrovanyy. *Fyzmatlyt*. 2016. 112 s. {in Russian}
7. *Pearse G.D., Watt M.S., Dash J.P., Stone C., Caccamo G.* Comparison of models describing forest inventory attributes using standard and voxel-based lidar predictors across a range of pulse densities. *Int. J. Appl. Earth Obs.* Geoinf., 78 (2019), pp. 341-351. {in English}
8. *Ghadai S., Jignasu A., Krishnamurthy A.* Direct 3D printing of multi-level voxel models. *Addit. Manuf.*, 40 (2021), Article 101929. {in English}
9. *Martins D., Rademacher L., Gabay A.S., Taylor R., Richey J.A., Smith D.V., Goerlich K.S., Nawijn L., Cremers H.R., Wilson R., Bhattacharyya S., Paloyelis Y.* Mapping social reward and punishment processing in the human brain: a voxel-based meta-analysis of neuroimaging findings using the social incentive delay task. *Neurosci*. Biobehav. Rev., 122 (2021), pp. 1-17. {in English}

D. Sc., prof. **Serhii Pustiulha,**
mbf.declutsk@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7623-7803
Ph. D., assoc. prof. **Volodymyr Samchuk,**
volodsam@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9045-9525,
Ph. D., assoc. prof. **Ihor Holovachuk,**
golovachuk.igor@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0811-6107,
Ph. D., assoc. prof. **Iaroslav Lelyk,**
iaroslavlelyk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6040-3990,
Senior Lecturer **Yuriy Klak,**
uklak@i.ua, ORCID: 0000-0002-7359-0756,
Lutsk National Technical University (LNTU)

DISCRETE-VOXEL REPRESENTATION OF OBJECT MODELS FOR THE IDENTIFICATION AND CALCULATION OF THEIR FRACTAL PARAMETERS

The paper proposes an approach to the discrete-voxel representation of models of various types of objects and investigates a set of geometric parameters that influence the technical and technological characteristics of their effective functioning.

On the basis of the basic element, which is a voxel, the relationship between the neighborhood characteristics of individual component models, which are decisive during the discrete presentation of images of different dimensions, is considered. The work provides a methodology for calculating the main geometric parameters of objects represented by voxels, and the analysis of the neighborhood parameters of their elementary components made it possible *to effectively distinguish the boundary and internal points on the images and combine them into integral geometric images on the spatial image.*

Algorithms for calculating characteristic parameters of voxel models of different dimensions are presented. It is proposed to calculate the areas of the compartment and the outer surface of two- and three-dimensional models through the geometric characteristics of families of discrete-voxel models of the border lines of the frame in one of the directions.

Emphasis is placed on the fact that one of the basic geometric characteristics in relation to this issue is the fractal dimension of discrete-voxel models of the studied objects. Fractal theory methods are quite well developed, but their implementation is time-consuming and, as a rule, it is not related to complex generalization and identification of basic geometric characteristics of modeled objects, especially in voxel representation. Therefore, in a number of published works known to us, only the synthesis of simple, as a rule, two-dimensional structures was brought to the stage of practical implementation of the process of modeling fractal structures.

The paper describes an approach to calculating the fractal dimension of discrete-voxel models and identifies ways to improve the functional qualities of objects due to effective management of a set of their geometric parameters. An algorithm is proposed that allows you to significantly simplify the procedure for calculating the fractal dimension by reducing the dimension of the space for each layer along one of the axes of the coordinate system.

Prospects for further scientific research both in the direction of improving the proposed software algorithms and in expanding the scope of their application are determined.

Keywords: voxel; voxel models; object identification; geometric characteristics; fractal dimension.