УДК 517.929
DOI: 10.32347/0131-579х.2023.104.16-29
к. ф.-м.н., доцент **Бондаренко Н.В.**
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
к. ф.-м.н., доцент **Соколова Л.В.**
sokolova.lv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1596-4932
к. ф.-м.н., доцент **Отрашевська В.В.**
otrashevska.vv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9879-1442
Київський національний університет будівництва і архітектури
(м. Київ, Україна)

ГЕОМЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЮВАННЯМ У ЧАСІ

У роботі розглядаються лінійні системи диференціальних рівнянь із запізнюванням у часі, які є математичними моделями динамічних систем, що виникають в різних областях механіки. Затримки можуть бути у системах зі змінною жорсткістю або з деформацією, у системах із складними динамічними взаємодіями, наприклад, в гідродинаміці або в рухомих механізмах. Наявність затримок у часі в динамічних системах зумовлює досить складну поведінку розв'язку і впливає на стійкість таких систем. Розглянуто геометричний підхід до вивчення стійкості лінійних систем диференціальних рівнянь з двома параметрами затримки, який називається методом τ*-розкладу Lee та Hsu. Цей метод дозволяє вивчати вплив відхилень затримок часу на стійкість динамічних систем із запізнюванням. Ідея цього методу полягає в побудові кривої стійкості в просторі параметрів затримок, яка розбиває простір параметрів на області стійкості. Нетривіальним є випадок, коли характеристичний квазіполіном лінійної системи із запізнюванням має комплексний корінь* s_0 *на уявній осі кратності два. Корені характеристичного квазіполінома, як неявна функція* s *двох змінних – параметрів* τ_1 *та* τ_2*, не є диференційовною в точці* s_0*. В цьому випадку крива стійкості має загострення в точці, що відповідає комплексному кореню на уявній осі кратності два та розбиває простір параметрів на G-сектор та S-сектор. Відомо, що є взаємно однозначна відповідність між околами точки загострення в просторі параметрів та околом комплексного кореня кратності два характеристичного квазіполінома, що лежить на уявній осі. Це дозволяє вивчати поведінку переміщення комплексних коренів на комплексній площині при відхиленні параметрів затримок, а отже, аналізувати зміну стійкості системи із запізнюванням.*

Геометричний підхід до дослідження переміщення комплексних коренів на комплексній площині характеристичного квазіполінома системи із запізнюванням при відхиленні параметрів запізнювання, застосований для системи двох диференціальних рівнянь з двома затримками у часі. Характеристичний квазіполіном розглянутої системи має комплексний корінь $s_0 = \pm i$ на уявній осі кратності два при певних значеннях параметрів. Побудована локальна крива стійкості такої системи, визначені S-сектор та G-сектор в просторі параметрів. Показано, що при переміщенні значень параметрів затримок в S-сектор, корені в околі точки s_0 переміщуються в ліву півплощину комплексної площини. Таким чином, встановлено, при яких відхиленнях параметрів затримок від точки, що відповідає кореню s_0, задана система буде стійкою.

Ключові слова: *лінійна система диференціальних рівнянь із запізнюванням; стійкість систем диференціальних рівнянь; крива стійкості; характеристичний квазіполіном; метод τ - розкладу.*

Постановка проблеми. Динамічна система із запізнюванням у часі – це система, в якій вихід залежить від попередніх вхідних значень, і від поточного вхідного значення. Наприклад, динамічна система, що описує рух тіла з дією сил опору середовища. У цьому випадку зміна швидкості тіла залежить не тільки від поточного стану системи, але також і від швидкості в попередні моменти часу. Динамічні системи із запізнюванням у часі зустрічаються в багатьох областях механіки, електродинаміці, в дослідженнях, пов’язаних з дифузією, теплопередачею, коливаннями та іншими фізичними процесами, які можуть бути описані диференціальними рівняннями чи системами диференціальних рівнянь із запізнюванням у часі. Наявність затримок у часі в системах диференціальних рівнянь зумовлює досить складну поведінку розв’язку і впливає на стійкість таких систем. Ефективним підходом до вивчення стійкості систем диференціальних рівнянь, особливо систем із запізнюванням у часі, є метод D-розбиття [1], [2]. Ідея цього методу полягає в тому, щоб визначити множину переходів стійкості, яка розділяє простір параметрів – коефіцієнтів системи (при сталому запізнюванні), на області, кожна з яких має однакову кількість комплексних коренів (враховуючи кратності коренів) характеристичного квазіполінома системи з додатною дійсною частиною. Серед областей розбиття простору параметрів знаходять області стійкості, яким відповідають квазіполіноми, всі корені яких мають від’ємну дійсну частину. Такі області є областями асимптотичної стійкості для розв’язків відповідних квазіполіномам систем диференціальних рівнянь. Такий геометричний підхід до визначення областей стійкості системи із запізнюванням, коли параметри є затримками часу, називається методом τ-розкладу Lee та Hsu [3], [4]. Цей метод дозволяє вивчати вплив відхилень затримок часу на стійкість динамічних систем із запізнюванням за допомогою розбиття простору параметрів затримок на області стійкості аналогічно методу D-розбиття.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для систем з однією затримкою у часі, як параметром, методи визначення областей стійкості наведені в роботах [3] та [5]. Що стосується систем із двома затримками, як параметрами, велика кількість діаграм стійкості (області параметрів коефіцієнтів, де система стійка) представлені в роботі [6]. В цих роботах розглядаються невироджені випадки. Якщо існують кратні комплексні корені характеристичного квазіполінома для деяких значень параметрів, то такий випадок є нетривіальним. Геометричний підхід до вивчення суто уявних характеристичних коренів кратності два у системах із двома затримками часу, представлений в роботах [7], [8], [9]. Він передбачає аналіз геометричного розташування параметрів затримок в околі деякої точки, що відповідає комплексному суто уявному характеристичному кореню кратності два динамічної системи. Від геометричного розташування параметрів затримок залежить розташування коренів характеристичного квазіполінома в комплексній площині, і, зокрема, шлях, яким корені наближаються до уявної осі.

Для чисельного розв'язку систем диференціальних рівнянь із запізнюванням у часі побудований явний гібридний метод Рунге-Кутти в роботах [10], [11], [12].

Ціль статті. Відомо, що стійкість лінійної системи диференціальних рівнянь із запізнюванням у часі залежить від того, де будуть розміщені комплексні корені характеристичного квазіполінома такої системи на комплексній площині. Якщо всі корені характеристичного полінома мають від’ємні дійсні частини (розташовані в лівій комплексній півплощині, ліворуч від уявної осі), то така система асимптотично стійка. Якщо хоча б один корінь характеристичного квазіполінома системи має додатну дійсну частину, то система нестійка. Якщо характеристичний квазіполіном має прості суто уявні корені на уявній осі, а інші корені мають від’ємні дійсні частини, то система стійка. Якщо серед суто уявних коренів є кратні, то система нестійка.

Ціль цієї статті – дослідити вплив відхилень запізнювань часу на стійкість лінійних систем диференціальних рівнянь з двома параметрами запізнювань у часі та геометрично визначити границі областей стійкості в параметричному просторі параметрів затримок у випадку системи, що має суто уявні корені характеристичного квазіполінома кратності два. Відомо, що корені характеристичного квазіполінома є неперервною функцією коефіцієнтів, якщо старший коефіцієнт не дорівнює нулю [2]. Така функція є диференційовною у випадку простих характеристичних коренів. У випадку кратних коренів втрачається диференційовність. Зазвичай для аналізу стійкості системи у випадку кратних суто уявних коренів характеристичного квазіполінома застосовують ряди Пюїзо. Ми розглядаємо геометричний підхід до дослідження комплексних коренів кратності два характеристичного квазіполінома лінійної системи диференціальних рівнянь з двома затримками часу, коли параметри затримки зазнають малих відхилень. Дослідження поведінки коренів поблизу уявної осі використовують для визначення стійкості та коливальних властивостей системи диференціальних рівнянь із запізнюванням. Такий геометричний підхід дослідження стійкості системи при відхиленні параметрів затримок застосуємо для системи двох диференціальних рівнянь з двома параметрами затримок, яка має характеристичний корінь кратності два.

Основна частина

1. Вступ

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з двома параметрами запізнювання часу

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau_1) + A_2 x(t-\tau_2), \qquad (1)$$

де $x \in \mathbf{R}^n$ – вектор стану, параметри запізнювання τ_1 і τ_2 є додатними, дійсними числами, $A_0,\, A_1,\, A_2 \in Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$.

Характеристична матриця системи (1) задається рівністю

$$M(s,\tau_1,\tau_2) = sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau_1} - A_2 e^{-s\tau_2}, \qquad (2)$$

де I – одинична матриця порядку $n \times n$ і s – змінна Лапласа.

Характеристичне рівняння системи (1) задається рівністю

$$\det(M(s,\tau_1,\tau_2)) = 0. \qquad (3)$$

Ми припускаємо, що матриці A_0, A_1, A_2 є такими, що характеристичний квазіполіном $p(s,\tau_1,\tau_2) := \det M(s,\tau_1,\tau_2)$ системи (1) має вигляд

$$p(s,\tau_1,\tau_2) = p_0(s) + p_1(s)e^{-s\tau_1} + p_2(s)e^{-s\tau_2}, \qquad (4)$$

де $p_k(s)$, $k = 0, 1, 2$ – поліноми від s з дійсними коефіцієнтами.

Деякі приклади матриць A_0, A_1, A_2 другого порядку, для яких характеристичний квазіполіном має вигляд (4), наведені в роботі [8].

Дослідження стійкості системи (1) для заданого набору параметрів запізнювань може бути досить складним, оскільки характеристичний квазіполіном має нескінченно багато комплексних характеристичних коренів. Нетривіальним є випадок, коли характеристичний поліном має кратні суто уявні комплексні корені для деяких значень параметрів τ_1 і τ_2.

2. Геометричний підхід до дослідження стійкості лінійних систем диференціальних рівнянь із запізнюванням при відхиленні параметрів затримок у разі існування суто уявного кореня характеристичного квазіполіному кратності два

Оскільки знаходження всіх коренів характеристичного квазіполінома (4) є досить складною задачею, то при дослідженні на стійкість системи (1) застосовують геометричний підхід до визначення, при яких параметрах затримок комплексні корені квазіполінома мають від'ємну дійсну частину. Щоб застосувати геометричний підхід, описаний в [7], до вивчення суто уявних комплексних характеристичних коренів (комплексних коренів, що знаходяться на уявній осі) кратності два, зробимо деякі припущення.

Нехай для значень параметрів $\tau_1 = \tau_{10}$, $\tau_2 = \tau_{20}$ квазіполіном $p(s, \tau_1, \tau_2)$ має комплексний характеристичний корінь кратності два на уявній осі $s = s_0 = \pm i\omega_0$.

Також припустимо, що

$$p(s_0, \tau_{10}, \tau_{20}) = 0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{\substack{s=s_0\\ \tau_1=\tau_{10}\\ \tau_2=\tau_{20}}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}\right|_{\substack{s=s_0\\ \tau_1=\tau_{10}\\ \tau_2=\tau_{20}}} \neq 0, \tag{6}$$

$$D = \det\left.\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_1}\right) & \mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_2}\right) \\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_1}\right) & \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_2}\right) \end{pmatrix}\right|_{\substack{s=s_0\\ \tau_1=\tau_{10}\\ \tau_2=\tau_{20}}} \neq 0. \tag{7}$$

Зазначимо, що система (1), яка задовольняє умови (5)-(7), називається найменш виродженою.

Було показано [9], що існує взаємно однозначна відповідність між комплексною площиною, де лежать комплексні корені квазіполінома (4) , та параметричним простором $\tau_1 - \tau_2$. При цьому параметричний простір $\tau_1 - \tau_2$ ділиться кривою стійкості T на області стійкості. Точкам кривої стійкості T відповідають суто уявні комплексні корені характеристичного квазіполінома при деяких значеннях параметрів τ_1, τ_2. Якщо квазіполіном $p(s, \tau_{10}, \tau_{20})$ має комплексний корінь кратності два $s_0 = \pm i\omega_0$ на уявній осі, то крива стійкості T має загострення в точці (τ_{10}, τ_{20}). Така негладкість означає, що звичайний аналіз, заснований на використанні похідної першого порядку, не застосовний. Дійсно, s, як неявна неперервна функція параметрів τ_1 і τ_2, визначена (4), не диференційовна при $s = s_0 = \pm i\omega_0$ і багатозначна в околі точки s_0. На рис. 1 крива стійкості T зображена кривою $A'C'B'$, яка є кривою розбиття, що ділить в параметричному просторі $\tau_1 - \tau_2$ достатньо малий окіл (τ_{10}, τ_{20}) на області – на G-сектор (great sector) та S-сектор (small sector).

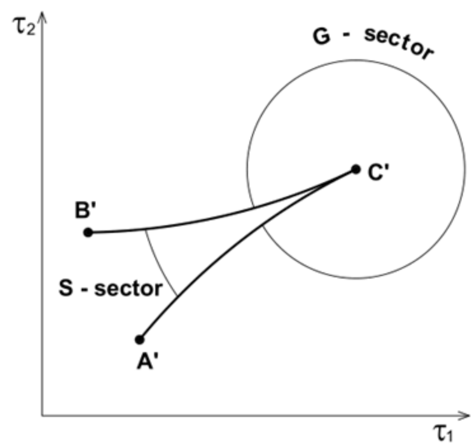

Рис. 1

Точка C' з координатами (τ_{10}, τ_{20}) на рис. 1 в просторі параметрів $\tau_1 - \tau_2$ відповідає характеристичному кореню $s_0 = \pm i\omega_0$ кратності два квазіполінома (4) на комплексній площині. Якщо значення параметрів τ_1 і τ_2 відповідають точці на локальній кривій стійкості $A'C'B'$, то квазіполіном (4) має хоча б один простий характеристичний корінь $s = \pm i\omega$ на уявній осі. Зазначимо також, що крива стійкості T має додатну і від’ємну локальні криві стійкості $A'C'$ та $B'C'$. Якщо $A'C'$ додатна (від’ємна) локальна крива стійкості, то характеристичний квазіполіном (4) з параметрами, що визначають точку (τ_1, τ_2) на цій кривій $A'C'$, має щонайменше один суто уявний характеристичний корінь $s = i\omega$, з $\omega > \omega_0$ $(\omega < \omega_0)$.

Твердження ([7]). Для всіх точок (τ_1, τ_2) з достатньо малого ε-околу $B_\varepsilon(\tau_{10}, \tau_{20})$ точки (τ_{10}, τ_{20}), характеристичний квазіполіном (4) має точно два прості характеристичні корені в достатньо малому околі $s_0 = \omega_0 i$.

З роботи [7] випливає, що у разі збурення за параметрами τ_1 і τ_2, характеристичні корені квазіполінома (4) рухаються за певною схемою.

Теорема. Якщо точка (τ_1, τ_2) знаходиться в G-секторі в достатньо малому околі точки (τ_{10}, τ_{20}), то один комплексний корінь системи (1) в околі точки $s_0 = \omega_0 i$ знаходиться в правій частині комплексної площини, а інший в лівій частині площини.

Якщо точка (τ_1, τ_2) знаходиться в S-секторі, то обидва комплексні корені знаходяться або в лівій половині комплексної площини або обидва в правій половині комплексної площини.

Для того, щоб визначити, до якої півплощини два попарно спряжені характеристичні корені переміщуються, коли (τ_1, τ_2) знаходиться в S-секторі, потрібно знати знак параметра k, який визначається таким чином

$$k = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}\left(-\frac{\partial^3 p}{\partial s^3} + 3\frac{\partial^2 p}{\partial \tau_1 \partial s}\cdot\frac{\partial^2 \partial \tau_1}{\partial u^2} + 3\frac{\partial^2 p}{\partial \tau_2 \partial s}\cdot\frac{\partial^2 \tau_2}{\partial u^2}\right)\right]_{s=s_0,\, \tau_1=\tau_{10}, \tau_2=\tau_{20}, \gamma=i}, \quad (8)$$

де u є збуренням на $s = s_0 + ue^{i\theta}$, $\gamma = e^{i\theta} = \dfrac{\partial s}{\partial u}$.

Похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 \tau_1}{\partial u^2}$ і $\dfrac{\partial^2 \tau_2}{\partial u^2}$ обчислюються таким чином

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \tau_1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 \tau_2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_1}\right) & \mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_2}\right) \\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_1}\right) & \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_2}\right) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial s^2}\gamma^2\right) \\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial s^2}\gamma^2\right) \end{pmatrix}\right]_{s=s_0,\, \tau_1=\tau_{10}, \tau_2=\tau_{20}} \quad (9)$$

де $\gamma = \pm i$.

Зауважимо, що обернена матриця в рівнянні (9) існує завдяки припущенню (7).

Отже, випадок, коли пара (τ_1, τ_2) рухається до S-сектору, можна підсумувати таким чином.

Наслідок (Критерій S-сектору). Якщо (τ_1, τ_2) знаходиться в S-секторі в достатньому малому околі (τ_{10}, τ_{20}), то обидва характеристичні корені в околі $s_0 = \omega_0 i$ знаходяться у лівій (правій) комплексній півплощині, якщо $k < 0$ $(k > 0)$.

Зауважимо, що характеристичні корені, які розглядаються в теоремі та наслідку, знаходяться в околі числа $s_0 = \omega_0 i$. Оскільки комплексні характеристичні корені розподілені симетрично відносно дійсної осі, існує також подвійний корінь в $\overline{s}_0 = -\omega_0 i$ при $\tau_1 = \tau_{10}$, $\tau_2 = \tau_{20}$. Коли пара (τ_1, τ_2) відхиляється від (τ_{10}, τ_{20}), розміщення двох коренів в околі $\overline{s}_0$ відбувається за тією ж схемою, що й в околі точки s_0. Також можуть бути корені на уявній осі поза околами s_0 та $\overline{s}_0$. Розміщення таких уявних коренів при зміні параметрів затримок аналізують окремо.

3. Приклад вивчення

Будемо розглядати випадок системи із запізнюванням (1), коли її характеристична матриця має вигляд

$$M(s, \tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} e^{-s\tau_1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-s\tau_2} = \\ = \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -a - ce^{-s\tau_1} & s - b - de^{-s\tau_1} - e^{-s\tau_2} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

де

$$a = 2 - 2\cos 2 + 4\sin 2 - \frac{1}{4}\sin 4,$$
$$b = 2 - 2\sin^2 1 \cdot \cos 2 - 4\cos 2 - 2\sin 2,$$
$$c = 2\sin 1\cos 2 - \cos 1 - 4\sin 1 - 2\sin 2 + \cos 2 + \frac{1}{\cos 1} - 1,$$
$$d = 2\sin 1 - \sin 1 \cdot \cos 2.$$

Характеристичний квазіполіном, що відповідає характеристичній матриці (10), має вигляд

$$p(s,\tau_1,\tau_2)=s^2+s(3-\sin^2 1\cos 2-4\cos 2-2\sin 2)+$$
$$+(4-6\cos 2+2\sin 2-\frac{1}{4}\sin 4-\sin^2 1\cos 2)+$$
$$[(\sin 1\cos 2-2\sin 1)s-2\sin 1+\sin 1\cos 2-\cos 1-\qquad(11)$$
$$-2\sin 2+\cos 2-1+\frac{1}{\cos 1}]e^{-\tau_1 s}+(s-1)e^{-\tau_2 s}.$$

Для $\tau_{10}=1, \tau_{20}=2$ характеристичний квазіполіном (11) має уявний корінь кратності два $s=s_0=\pm i\omega_0$, де $\omega_0=1$.

Перевіримо, чи виконується припущення (7), тобто обчислимо визначник

$$D=\det\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_1}\right) & \mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_2}\right) \\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_1}\right) & \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \tau_2}\right) \end{pmatrix}_{\substack{s=i\\ \tau_1=1\\ \tau_2=2}} \approx 3{,}616082\neq 0.$$

Параметричний простір та локальна крива стійкості зображені на рис. 2.

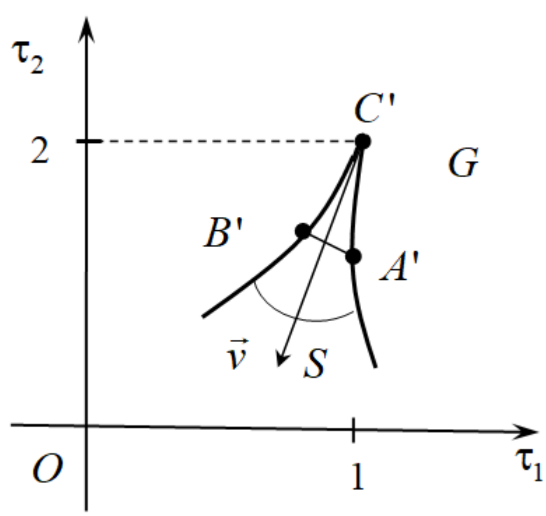

Рис. 2

Напрямок $\vec{v}$ на рис. 2 визначається за формулою (9)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \tau_1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 \tau_2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \approx -\begin{pmatrix} 0,366 & 0,136 \\ -1,064 & 0,359 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,770 \\ 9,031 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,242 \\ -6,189 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що окіл точки $(\tau_{10}; \tau_{20}) = (1; 2)$ розбитий локальною кривою стійкості T на S-сектор і G-сектор. Вершина $(1; 2)$ відповідає кореню $s_0 = \pm i\omega_0 = \pm i$.

За умови, що $D > 0$, обчислимо за формулою (8) коефіцієнт k:

$$k \approx \mathrm{Re}((-2,770 - 9,031i) \cdot (-11,204 - 21,670i + 3(3,328 - 4,982i) \cdot (-2,242) + \\ + 3(1,248 + 2,728i) \cdot (-6,189))) = -196,385.$$

Оскільки $k < 0$, то згідно з критерієм S-сектору обидва уявні корені квазіполінома (11) переміщуються до лівої півплощини, коли точка (τ_1, τ_2) переміщується до S-сектору. Тобто при таких значеннях параметрів затримок система з характеристичною матрицею (10) є асимптотично стійкою. Згідно зі сформульованою вище теоремою, якщо точка (τ_1, τ_2) переміщується в G-сектор, один із двох комплексних коренів переміщується в праву комплексну півплощину, інший переміщується в ліву комплексну півплощину. Система при таких значеннях параметрів нестійка. Іншими словами, якщо (τ_1, τ_2) рухається від S-сектора до G-сектора в околі точки (1, 2), один корінь рухається з лівої півплощини до правої півплощини, проходячи через точку i на уявній осі, інший корінь з лівої півплощині рухається, щоб торкнутися уявної осі в точці i, а потім повертається назад до лівої півплощини.

Висновки та перспективи. Розглянутий геометричний підхід до дослідження зміни стійкості лінійної системи диференціальних рівнянь із затримкою у часі, що має комплексний суто уявний корінь кратності два, при досить малих відхиленнях параметрів затримок не вимагає використання рядів Пюїзо, які значно ускладнюють дослідження. При цьому будується локальна крива стійкості, яка має загострення в критичній точці і розбиває окіл критичної точки простору параметрів затримок на G-сектор та S-сектор. При цьому, якщо пара параметрів переміщується до G-сектору, один корінь характеристичного квазіполінома переміщується в ліву півплощину комплексної площини, а інший в праву півплощину. Тобто в цьому випадку система не є стійкою. Якщо пара параметрів переміщується до S-сектору, то за допомогою критерію можна визначити коли, або обидва комплексні корені переміщуються в ліву півплощину, або обидва в праву півплощину. Такий геометричний підхід до дослідження стійкості системи при відхиленні параметрів затримки проілюстрований на прикладі лінійної системи диференціальних рівнянь із затримкою у часі, характеристичний квазіполіном якої при фіксованих значеннях параметрів має комплексний суто уявний корінь кратності два. Визначено область S-сектору, при переміщенні параметрів затримок до якого, система є стійкою.

Ідеї розглянутого геометричного підходу до дослідження стійкості систем у випадку, коли характеристичний квазіполіном має кратні корені, при відхиленні параметрів затримок може бути застосований для дослідження лінійних систем диференціальних рівнянь з трьома параметрами затримок. Це може бути реалізовано побудовою поверхонь стійкості, що розбивають простір параметрів затримок на області стійкості.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A.* D-decomposition technique state-of-the-art, *Automation and Remote Control*, Vol. 69 (12), 2008, P. 1991–2026.
2. ***Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.*** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва : Наука, 1971. 296 с.
3. *Lee M.S., Hsu C.S.* On the τ-decomposition method of stability analysis for retarded dynamical systems, SIAM J. Control, Vol. 7 (2), 1969, P. 249-259.
4. *Michiels W., Niculescu S.-I.* Stability and stabilization of time-delay systems. *An eigenvalue based approach*, SIAM: Philadelphia, USA, Advances in design and control, Vol. 12, 2007.
5. *Walton K., Marshall J.E.* Direct method for tds stability analysis. IEE Proceedings D - Control Theory and Applications, V. 134(2), 1987, P. 101–107.
6. *St´ep´an G.* Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. *Longman Scientific &Technical*, 1989. 159 p.
7. *Gu K., Irofti D., Boussaada I., and Niculescu S.I.* Migration of double imaginary characteristic roots under small deviation of two delay parameters. In 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2015, P. 6410–6415.
8. *Irofi D., Boussaada I., Niculescu S.* Geometric vs. algebraic approach: A study of double imaginary characteristic roots in time-delay systems, IFAC (International Federation of Automatic Control), Vol. 50 (1), 2017, P. 1310-1315.
9. *Gu K., Niculescu S.-I., Chen J.* On stability of crossing curves for general systems with two delays, J. Math. Anal. Appl, Vol. 311, 2005, P. 231-253.
10. *Бондаренко Н.В., Печук В.Д.* Моделювання динамічних систем із запізнюванням за допомогою узагальнених методів Рунге-Кутти. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2019. Випуск 96. С. 3-11.
11. *Бондаренко Н.В., Печук В.Д.* Побудова явних методів Рунге-Кутти для моделювання динамічних систем з запізнюванням. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2020. Випуск 99. С. 16-23.

12. *Печук В.Д., Бондаренко Н.В*. Явні гібридні методи п'ятого порядку збіжності для динамічних систем з запізнюванням. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2021. Випуск 101. С. 168-180.

Reference

1. *Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A.* D-decomposition technique state-of-the-art, *Automation and Remote Control*, Vol. 69 (12), 2008, P. 1991–2026. {in English}
2. *El'sgol'c L.E., Norkin S.B.* Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom. Moskow : Nauka, 1971. 296s. {in Russian}
3. *Lee M.S., Hsu C.S.* On the τ-decomposition method of stability analysis for retarded dynamical systems, *SIAM J. Control*, Vol. 7 (2), 1969, P. 249-259.
4. *Michiels W., Niculescu S.-I.* Stability and stabilization of time-delay systems. An eigenvalue based approach, *SIAM: Philadelphia, USA, Advances in design and control*, Vol. 12, 2007. {in English}
5. *Walton K., Marshall J.E.* Direct method for tds stability analysis. *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications*, V. 134(2), 1987, P. 101–107.
6. *St´ep´an G.* Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. *Longman Scientific &Technical*, 1989. 159 p. {in English}
7. *Gu K., Irofti D., Boussaada I., and Niculescu S.I*. Migration of double imaginary characteristic roots under small deviation of two delay parameters. *In 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2015, P. 6410–6415. {in English}
8. *Irofi D., Boussaada I., Niculescu S.* Geometric vs. algebraic approach: A study of double imaginary characteristic roots in time-delay systems, *IFAC (International Federation of Automatic Control)*, Vol. 50 (1), 2017, P. 1310-1315. {in English}
9. *Gu K., Niculescu S.-I., Chen J.* On stability of crossing curves for general systems with two delays, *J. Math. Anal. Appl,* Vol. 311, 2005. P. 231-253. {in English}
10. *Bondarenko N.V., Pechuk V.D.* Modeliuvannia dynamichnykh system z zapizniuvanniam za dopomohoiu uzahalnenykh metodiv Runhe-Kutty. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika,* 2019. Vypusk 96. S. 3-11. {in Ukranian}
11. *Bondarenko N.V., Pechuk V.D.* (2020). Pobudova yavnykh metodiv Runhe-Kutty dlia modeliuvannia dynamichnykh system z zapizniuvanniam. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Kyiv: KNUCA, № 99, S. 16-23. {in Ukranian}
12. *Pechuk V.D., Bondarenko N.V.* (2021).Yavni hibrydni metody piatoho poriadku zbizhnosti dlia dynamichnykh system z zapizniuvanniam. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Kyiv: KNUCA, № 101. S. 168-180. {in Ukranian}

Ph.D., assoc. prof. Nataliya Bondarenko,
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Ph.D., assoc. prof. Ludmyla Sokolova,
sokolova.lv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1596-4932
Ph.D., assoc. prof. Valentyna Otrashevska
otrashevska.vv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9879-1442
Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA)

GEOMETRIC APPROACH TO STABILITY ANALYSIS OF DYNAMIC SYSTEMS WITH TIME DELAY

In the paper we consider the linear systems of differential equations with a time delay, which are mathematical models of dynamic systems arising in various fields of mechanics. Delays can occur in systems with variable stiffness or deformation, in systems with complex dynamic interactions, for example, in hydrodynamics or in moving mechanisms. The presence of time delays in dynamic systems is responsible for the rather complex solution behavior and affects the stability of such systems. A geometric approach to studying the stability of linear systems of differential equations with two delay parameters, which is called the τ*-decomposition method of Lee and Hsu, is considered. This method allows studying the influence of time delay deviations on the stability of dynamic systems with a delay. The idea of this method is to construct a stability curve in the space of delay parameters, which divides the parameter space into regions of stability. A non-trivial case is when the characteristic quasipolynomial of a linear system with a delay has a complex root* s_0 *on the imaginary axis of multiplicity two. The roots of the characteristic quasi-polynomial, as an implicit function of two variable parameters* τ_1 *and* τ_2 *are not differentiable at a point* s_0*. In this case, the stability curve has a cuspt at the point corresponding to the complex root on the imaginary axis of multiple of two and divides the parameter space into the G-sector and the S-sector. It is known that there is a mutually unequivocal correspondence between the neighborhood of the point of cusp in the space of parameters and the neighborhood of the complex root of the multiplicity of two of the characteristic quasipolynomial lying on the imaginary axis. This makes it possible to study the behavior of the movement of complex roots on the complex plane when delay parameters are deviated, and therefore to analyze the change in stability of the system with a delay.*

A geometric approach to the study of the displacement of complex roots on the complex plane of the characteristic quasi-polynomial of the system with a delay when the parameters of the delay are deviated is applied to a system of two differential equations with two time delays. The characteristic quasipolynomial of *the considered system has a complex root* $s_0 = \pm i$ *on the imaginary axis of multiplicity two at certain parameter values. The local stability curve of such a system is constructed, the S-sector and G-sector in the parameter space are determined. It is shown that when the values of the delay parameters are moved to the S-sector, the roots around the point* s_0 *are moved to the left half-plane of the complex plane. Thus, it is established at what deviations of the delay parameters from the point* s_0 *corresponding to the root, the given system will be stable.*

Key words: Linear time-delay systems of differential equations; stability analysis of systems of differential equations; stability curve; characteristic quasi-polynomial; τ*-decomposition method.*