УДК 519.21
DOI: 10.32347/0131-579x.2023.104.119-126

к. ф-м. н., доцент **Наголкіна З.І.**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
к. ф-м. н., доцент **Філонов Ю.П.**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
Київський національний університет будівництва і архітектури

ЗАГАЛЬНА УМОВА ПРИЙНЯТНОГО ФУНКЦІОНУВАННЯ МАРКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ З КІЛЬКОМА РЕЖИМАМИ

Розглядається стохастична модель систем (фазова динаміка W_n n = 0,1,... – незвідний однорідний ланцюг Маркова), які накопичують ресурс, (а саме, заробляють грошовий в економічній інтерпретації), і використовують його для подальшого функціонування, резервування та інше. Істотним є повсюдна неоднорідність фазового простору. У фазовому просторі (загального типу) такої системи задані невід'ємна функція X, функція Z зі значеннями 1,2, ..., d.

Значення $X_n = X(W_n)$>0 вказують на рівень ресурсу системи в момент n, значення Z (W_n)) вказують режим, що визначається в економічній інтерпретації, наприклад, кількістю місць обслуговування, пристроїв, сервісних ліній, кількістю офісів, працівників і т.д., а також типом функціонування - ремонт, профілактика, простоювання. Нехай $a(w_i)$ – середні прирости X за одиничний період для довільного набору станів $\bar{w} = (w_1, w_2 \dots w_d)$ де $Z\ (w_i)\ =\ i$; p $(w_i,$ $j)$ – ймовірність переходу зі стану w_i в режим j , $P(\bar{w})$ – відповідна стохастична матриця, $\pi_1(\bar{w}),\ \pi_2(\bar{w}), \dots, \pi_d(\bar{w})$ – стаціонарний розподіл імовірностей для неї.

В роботі дається анонсоване раніше авторами математичне доведення того факта, що існування монотоної та інтегровної на інтервалі $[0, \infty)$ функції $\psi(x) > 0$, для якої $\sum_1^d \pi_i(\bar{w})\ (a(w_i) +\ \psi(x(w_i)) \geq 0$ *(при великих X (w_i)) є достатнім (крім деяких практично загальних умов) для прямування до одиниці майже напевно відносної долі тих n до моменту N (N → ∞) для яких X_n> C (C- довільне). З точки зору економічної інтерпретації – система*

прийнятна в тому сенсі що забезпечує прямування з часом до 100%-ї частки часу фінансового достатку та зростання самого рівня достатку, незважаючи на можливість падінь достатку до мінімального рівня (при 0-рекурентності керуючого ланцюга напевно необмежену кількість разів).

Ключові слова: накопичувальні системи; стохастична матриця; страхова фірма; середній прибуток; простий замкнутий цикл; сігма-алгебра; математичне сподівання; умовне середнє; умовна ймовірність; ергодичні характеристики; незвідний ланцюг Маркова; міра незвідності; ймовірності переходу; сполученість станів; стаціонарні ймовірності; непозитивність ланцюга Маркова; мінорантна множина.

Постановка проблеми.

Є багато імовірнісних моделей систем, які повинні передбачати необмежений розвиток, якщо (поки) не з'являться якісь обмежувальні фактори. Для систем обслуговування, систем надійності,економічних моделей (робота фірми тощо), часто використовуються дискретні та загальні марківські ланцюги (див.[1], [2]). Тут продовжується математичне дослідження систем с кількома режимами та необмеженим розвитком почате в роботі [3]. Опишемо предмет вивчення. Нехай система управляється однорідним незвідним марковським ланцюгом $\mathrm{W_n}$ із загальним простором станів (стани є станами системи). Основними параметрами будуть режим $Z \in D = \{1,2, \dots, \mathrm{d}\}$ роботи та рівень (об'єм) $\mathrm{X} \in [0, \infty)$основного ресурсу системи (це функції стану w). В економічній інтерпретації прототипом може бути система, яка виробляє ресурс (заробляє гроші) для власного функціонування (включаючи обслуговування, зарплати, тощо), для резервування та накопичення, стан якої змінюється марковським чином (однорідно у часі).

Режим визначається, наприклад, за кількістю місць обслуговування, пристроїв, сервісних ліній, кількістю офісів, працівників тощо, а також типом функціонування, як то - ремонт, профілактика, простоювання. Основний ресурс (нехай в грошах), наприклад, це стан поточного рахунку фірми. *Прийнятний* розвиток (*прийнятна* система) це, якщо при усіх C, – є майже напевне прямування до 1 (одиниці) відносної долі тих n до моменту N ($N \to \infty$) для яких $X_n = X(W_n) > C$. З погляду економіки прийнятна система забезпечує прямування з часом до 100%-ої частки часу достатку та зростання самого рівня достатку, а також спроможність переживати можливі кризи.

Ціль статті. Довести достатні умови для прийнятного розвитку в термінах очікуваних середніх приростів основного ресурсу в станах та ймовірностей пов'язаних зі зміною режимів.

Аналіз основних досліджень і публікацій.

Вивчення так званих growth models (є в роботах [4-7]) і наша праця відносяться до одного кола досліджень але прямого перетину немає. Результати безпосередньо пов'язані з цією роботою є (для окремих випадків ланцюга) у статтях [8-9]. Ряд менш загальних моделей тезисно розглядався в роботі [3].

Основна частина. Відповідно до роботи [3] дамо позначення як загальні так і для нашої моделі: M_w (...) та P_w (...) $-$ умовне середнє та умовна ймовірність при умові $\mathrm{W_0 = w}; \delta = \mathrm{X_{n+1} - X_n}$- приріст ресурсу (прибуток); $a = a(w)$ = $\mathrm{M_w}$ δ- середній прибуток;

$p(w, j) = P_w(Z_1 = j)$ ймовірність зі стану w перейти до роботи в режимі j в наступному періоді; $E_i = \{w|Z(w) = i\}, (i \in D)$ -множина станів, коли система працює в i-му режимі. Нехай виконуються формальні припущення (див. [2]): сігма-алгебра фазового простору сепарабельна, ланцюг незвідний, X суттєво необмежена, множина $\{\mathrm{w}|\mathrm{X} < \mathrm{C}\}$ є скінченною сумою мінорантних (small) множин при усіх достатньо великих C. Також припускаємо обмеженість моментів $M_{\mathrm{w}}|\delta| < \mathrm{C}$ та достатню сполученність станів: існують стала *e>0*, простий замкнутий цикл режимів $\mathrm{k_1 \to k_2 \to \cdots \to k_{d+1} = k_1}$, для будь якого числа C число $\mathrm{C'}$ такі, що при $X(w) > \mathrm{C'}$ буде: $\mathrm{P_w}(\delta < -e, \mathrm{Z_1 = Z_0})$ $>e$, $P_w(Z_1 = k_{i+1}, X_1 > C) > 0$ (якщо *Z(w)=*k_i), досяжність усіх суттєвих (не нульової міри незвідності) підмножин в $\{\mathrm{w}|\mathrm{X} > \mathrm{C'}\}$ (при забороненій множині $\{\mathrm{w}|\mathrm{X} < \mathrm{C}\}$).

Конкретно для нашої *загальної* моделі позначимо: $\overline{w}$ =$(w_1, w_2, \dots, w_d)$ набір станів $(w_1, w_2, \dots, w_d)$ з умовою $Z(w_i) =i$, i*=1,2,…,d*, перехідні ймовірності $p(w_i, j)$ режимів вважаємо елементами матриці $P(\overline{w})$, вектор

$$\pi(\overline{w}) = \left(\pi_1(\overline{w}), \pi_2(\overline{w}), \dots, \pi_d(\overline{w})\right) -$$

– це розподіл стаціонарних ймовірностей для неї. Вектор $a(\overline{w}) = \left(a(w_1), \dots, a(w_d)\right)$ це набір середніх прибутків в станах з набору $\overline{\mathrm{w}}$. Збільшимо значення функції $a(w)$ на значення довільної спадної додатньої функціяї $\psi(\mathrm{x})$, яка інтегровна на $[0, \infty)$ ($\int_0^\infty \psi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} < \infty$): $a'(w) = a(w) + \psi(x)$ (де $x = X(w)$). Наша робота присвячена доведенню наступного результату (оголошеного в [3]).

*Теорема 1***.** Ланцюг $\mathrm{W_n}$ неергодичний а відповідна система прийнятна, якщо для усіх $\overline{\mathrm{w}}$ з достатньо великими $\mathrm{X(w_i)}$ вірна нерівність $\pi\ (\overline{\mathrm{w}}) a'(\overline{\mathrm{w}}) \geq 0$. Щоб довести теорему 1 знадобиться ще дві теореми. Не будемо торкатися режимів, а розглянемо тільки ланцюг W_n та деяку функцію Y на просторі станів (тест–функція), які в парі мають ті ж загальні властивості що мали W_n та X у вступі. Для Y введемо схожі позначення: $\delta' = Y_{n+1} - Y_n$, $b = M_w \delta'$.

Ще будуть використані такі величини:

$b_k^- = max\{b^-(w) \,|k \leq Y(w) < k+1\}$, де $b^- = max(0, -b)$

(максимум модулів середніх приростів величини Y в станах з рівнем Y, який належить конкретному одиничному інтервалу, і в яких цей середній приріст від'ємний). Пишемо теорему 2 як теорему 1 з [9] беручи там $f(x) = \varphi(x) = x$ та замінюючи позначення там x, F, a, δ на наші w, Y, b, δ' :

Теорема 2**.** Якщо абсолютні моменти стрибків $\mathrm{M_w}|\,\delta'|$ обмежені в сукупності на просторі станів , ймовірність $\mathrm{P_w}(\,\delta' < -\varepsilon) > \varepsilon$ при $Y > C$ для деяких сталих $\mathrm{C}\,, \varepsilon > 0$, та від'ємні середні стрибки мають в сукупності обмеження $\sum b_{\mathrm{k}}^- < \infty$, , то м.л. неергодичний.

Для нашої моделі прямо при Y=X теорема 2 не працює, тому що сума $\sum a_k^-$ часто буде нескінченою в практичних застосуваннях нашої моделі (наприклад, режими ремонта та простої роблять $a(w)$ суттєво від'ємними). Тому далі знадобиться варіант теореми 2 з роботи [8]. Зробимо підготовку для формулювання цього варіанту.

Тепер у нас нема ні марківського ланцюга W_n ні X , а є тільки якісь такі функції довільного аргумента w : $Z\ (w)$ зі значеннями в D, $q(w)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ та $p(w\ )$ зі значеннями в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ ($p(w\ )$ - вектори (рядки з елементами $p(w\ ,j\ )$ – якимись ймовірносними розподілами на D які поки що не пов'язані з введенними раніше елементами $p(w\ ,j\ )$). Зробимо позначення по аналогії з тим що було : набір станів $(w_1, w_2, \dots, w_d)$ з умовою $Z(w_i) = i$, позначимо $\overline{w}$, рядкі $p(w_i)$ вважаємо елементами матриці $P(\overline{w})$, вектор $\pi(\overline{w}) = (\pi_1(\overline{w}), \pi_2(\overline{w}), \dots, \pi_d(\overline{w})\ )$ - це розподіл стаціонарних ймовірностей для неї, також вводимо вектор $\mathrm{q}(\overline{\mathrm{w}}) = \big(\mathrm{q}(\mathrm{w}_1), \dots, \mathrm{q}(\mathrm{w_d})\big)$. Запишемо теорему 3 як теорему 2 з роботи [8] (тільки еквівалентність б) ⟺ а) з неї) , замінюючи f, a, x *на* -f, $-q$, w і матричний запис на векторний.

Теорема 3. Якщо для якогось $\overline{w}_0$ матриця $P(\overline{w}_0)$ відповідає одному класу режимів, які сполучаються то для будь-якого $\overline{w}$ виконується нерівність $\pi(\overline{w})q(\overline{w}) \geq 0$ тоді і тільки тоді, коли існує вектор-стовпець (функція на D) f такий ,що для будь- якого w виконується нерівність

$p(w\ ) f$ - $f(\mathrm{Z(w)}) \geq -q(w)$.

Зауваження 1. Як наслідок можна писати матричну нерівність

$P(\overline{w})\ f - f \geq -q(\overline{w})$. Якщо останню нерівність помножити на $\pi(\overline{w})$ зліва то побачимо, що в один бік твердження більш-менш очевидне.

Зауваження 2. В доведенні роботи теореми 2 з [8] множина аргументів w злічення. Там використовується теорема віддільності для конусів з функціонального аналізу та використовується факт непустого перетину компактних множин лінійних функціоналів які відділяють опуклі конуси які породжені скінченними наборами рядків (векторів в в $\mathbb{R}^{d+1}$) (з їх загальної зліченної кількості) від конкретної точки для яких (компактних множин) скінченні перетини не пусті. Як відомо з топології , при замінні зліченності множини параметрів на незліченність, сам факт непустого перетину залишається.

Зауваження 3 . Функція f визначається з точністю до постійної величини тому далі вважаємо що $f \geq 0$.

Тепер безпосередньо доводимо теорему 1. Виберемо функцію $f > 0$ на D виходячи з теореми 3. Множину параметрів w для теореми 3 виберемо як множину станів нашого марковського ланцюга за умови $X(w)>C$ де C виберемо пізніше. Беремо вектор (рядок) $p(w\ )$ з елементами $p(w,\ j\ ) = P\{Z_1 = j|W_0 = w\}$ (нехай це буде рядок матриці $P(\overline{w})$ (з номером $Z(w\ )$ і з теореми 1 і з теореми 3). Існування набору $\overline{w}_0$ для теореми 3 випливає з умов достатньої сполученості станів. Покладемо $q(w)= a'(w)$, тоді виконується нерівність $\pi(\overline{w})q(\overline{w}) \geq 0$ як умова теореми 1 якщо C достатньо велике. Таким чином умови теореми 3 виконані і ми маємо функцію f для якої виконується нерівність $p(w\ ) f$ - $f(\mathrm{Z}(\mathrm{w})) \ \geq -a'(w)$ якщо $X(w\ )$ достатньо велике.

Далі функцію X змінимо на функцію $Y = X + f(Z)$ (про f в попередньому реченні) для якої перевіремо умови теореми 2. Обмеженість абсолютних моментів стрибків $M_w|\ \delta'|$ випливає з аналогічної умови для нашої моделі і обмеженості f. Умова $P_w(\delta' < -\varepsilon\ ) > \varepsilon$ при $Y > C$ випливає з умов достатньої сполученості станів (при $Z_1 = Z_0$ буде $f(Z_1) = f(Z_0)$ і $\delta' = \delta$), треба може змінити C через наявність f. Оцінюємо для $Y = X + f(Z)$ середній приріст b :

$b = M_w\,\delta' \ = a(w) + p(w\ ) f$ - $f(\mathrm{Z}(\mathrm{w}))$

$\geq a(w) - a'(w) =$ - $\psi(X(w)$.Тоді (тут $K\ = max\ f$) :

$b_k^- \leq max\left\{\ \psi\big(X(w)\big)\middle|k \leq Y(w) < k + 1\right\}\ \leq$

$max\left\{\ \psi\big(X(w)\big)\middle|k - K \leq X(w) < k + 1\right\} \leq \psi(k - K)$ і ряд $\sum b_k^-$ збігається за інтегральною ознакою по вибору функції ψ **.** Таким чином за теоремою 2 м. л. непозитивний.

Доведемо прийнятність за властивостями загальних марковских ланцюгів **(**див. [2]). Ланцюг при непозитивності або незворотній або зворотній нульовий. Множина $A = \{w|X < C\}$ є скінченною сумою мінорантних множин для будь-якого С як сказано у вступі. У випадку незворотності скінченним є загальний час проведений у мінорантній множині, і тут прийнятність зрозуміла. Для зворотнього нульового ланцюга треба розглянути нескінченний процес відновлення пов'язаний з деяким атомом ланцюга. Для нульових зворотніх ланцюгів середній час відновлення дорівнює нескінченності, але середній час проведений у мінорантній множині за період відновлення є скінченним. Звідси за посиленим законом великих чисел відношення часу який проводиться у мінорантній множині до часу який проводиться не у цій множині прямує до 0 з загальним плином часу, а звідси і випливає прийнятність. Теорема 1 доведена.

Висновки та перспективи. Розглянуто систему яка описується однорідним марковським ланцюгом у загальному фазовому просторі ($w -$ фазовий стан) розбитим на частини відповідно до режим $i = 1,2,\ldots,d$ роботи , яка ще характеризуються невід'ємним параметром $x\ (w)$ (основний ресурс , в економічному сенсі - капітал). В статті доведено анонсований в іншій роботі авторів загальний результат про умови що дозволяють системі з плином часу в часовому відношенні, яке прямує до 1 функціонувати при дедалі більших значеннях основного параметра майже напевно. Не виключається, і навіть буде, необмежена кількість розорень (малих значень ресурсу) – це при при 0-рекурентності марковського ланцюга. В останньому випадку частота розорень необхідно буде падати з часом – із-за неергодичністі марківського ланцюга (така ситуація, наприклад, описує взаємовигідну співпрацю зі страховою фірмою) .Основна умова полягає у існуванні величин $a'(w_i)$ (w_i стан з режиму d) для яких зваженість по стаціонарним імовірностям режимів невід'ємна ($\sum_1^d \pi_i(\overline{w})\ a'(w_i) \geq 0$) і перевищення $\psi(x)$ яких над середніми прибутками в станах w цих режимів ($0 \leq \ a'(w) - a(w) \leq \psi(x\ (w))$ інтегрально обмежене ($\int_0^\infty \psi(x)\,\mathrm{d}x < \infty$). Прибуток $a(w)$ в стані w тут це очікуваний середній приріст основного ресурсу (капіталу) і може бути від'ємним) .

В подальшому є такі напрями роботи:

1. Розгляд практично важливих випадків 2 та 3 режимів, тоді умови прийнятності можливо формулювати не в стаціонарних ймовірностях, а в перехідних.
2. Дослідження випадків більшої кількості режимів , але коли вони змінюються більш впорядковано.
3. Вивчення умов прийнятності для асимптотично однорідних в фазовому просторі систем як у випадку 2, 3 так і більшої кількості режимів.

З теоретичної точки зору є цікавим межевий випадок прийнятності.

Література

1. *Yuri SUHO*V and *Mark KELBERT*.Probability and Statistics by Example: Volume 2, Markov Chains, Cambridge University Press, 2008, ISBN: 978-0-521-84767-4

2. *E. Nummelin*, General irreducible Markov chains and nonnegative operators, Cambridge University Press, London, 1984

3. *Філонов Ю.П., Наголкіна З.І.* Розвиток багаторежимної накопичувальної марковської системи / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, № 99. 2020. С. 200-207.

4. Kersting G.(1986). On recurrence and transience of growth models, I. Appl. Probab, 23, 614-625

5. Філонов Ю.П, Шутовський О.М. Посилена ознака неергодичності критичноїі моделі зростання / *Матеріали 17-ї міжн.н. конф. ім. М.Кравчука* (3), НПУУ. Київ ,2016. С. 163-166.

6. Філонов Ю.П., Ісакова Т.І. Інтегральні умови зворотності марківських ланцюгів із загальною мірою незвідності / *Укр. мат. журн*. 2004, т.56., № 5 С. 852-861.

7. *S.Meyn* and *R.L.Tweedie*. Markov chains and stochastic stability / Springer-Verlag, New York, 1993.

8. *FilonovYu*. Markov chains with finite -component state space / Theory Probab. and Math. stat. No 40., 1990. p.110-115.

9. Mikhaylenko V., Filonov Yu. (2015).Unlimiteness by the probability system that are guided by common homogeneous Markov chain, Management of Development of Complex systems, 22 (1), 107-115

Ph. D., assoc. prof **Zoya Nagolkina**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
Ph. D., assoc. prof **Yuri Filonov**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
Kyiv National University of Construction and Architecture» (KNUCA)

GENERAL CONDITION FOR ACCEPTABLE OPERATION OF A MARKOV SYSTEM WITH MULTIPLE MODES

In this paper we consider a stochastic model of systems (phase dynamics $W_n, n = 0,1,\ldots$. -irreducible homogeneous Markov chain) that accumulate a resource (earn money in economic interpretation) and use it for functioning, reservation, etc. The essentially ubiquitous inhomogeneity of the phase space. In the phase space (general type) of such a system, a non-negative function X, a function Z with values 1,2, ..., d are given. The values $X_n = X(W_n)$>0 indicate the resource level of the system at time n, the values $Z(W_n)$ indicate the mode

determined in the economic interpretation, for example, the number of service points, devices, service lines, the number of offices, workers, etc. .d., as well as the type of operation - repair, preventive maintenance, downtime. Let $a(w_i)$ *be the average increments X for a unit period for an arbitrary set of states* $\overline{w} = (w_1, w_2 \ldots w_d)$ *where где* $Z\,(w_i) = i$; $p\,(w_i,$ *j) is the probability of transition from state* w_i *to mode j, P* $(\overline{w})$ *is the corresponding stochastic matrixand* $\pi_1(\overline{w}), \pi_2(\overline{w}), \ldots, \pi_d(\overline{w})$ *is the stationary probability distribution for it. The paper gives a mathematical proof , announced earlier by the authors: The existence of a monotone ,integrable on the interval [0,∞) function ψ(x)≥0 for which* $\sum_1^d \pi_i(\overline{w})\,(a(w_i) + \psi(x(w_i))) \geq 0$ *(for large X* $(w_i$ *)) is sufficient fact (if some practically general conditions) for tending to 1 almost surely the relative fraction of those n up to the moment N (N → ∞) for which* X_n*> C (C - arbitrary). From the point of view of economic interpretation, the system is acceptable in the sense that it ensures the movement over time to 100% of the time of financial wealth and the growth of the level of wealth itself, despite the possibility of wealth falling to a minimum level (with 0-recurrence of the Markov chain, for sure an unlimited number of times).*

Keywords. Accumulation systems, stochastic matrix, insurance firm, average profit, simple closed cycle, sigma algebra, mathematical expectation, conditional mean, conditional probability, ergodic characteristics, irreducible Markov chain, measure of irreducibility, transition probabilities, small set.