УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2023.104.138-148
к. т. н., доцент **Несвідомін А.В.,**
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718
д. т. н., професор **Пилипака С.Ф.,**
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615
Національний університет біоресурсів і природокористування України

КІНЕМАТИЧНИЙ ГВИНТ ТРИГРАННИКА ДАРБУ

У теорії внутрішньої геометрії поверхонь важливу роль відіграють тригранники Френе і Дарбу. Перший стосується кривої, другий – поверхні. У тригранника Дарбу один із ортів є нормаллю до поверхні, а два інші утворюють дотичну до поверхні площину. Якщо на поверхні задати криву лінію, то тригранник Дарбу може бути для неї супровідним. При русі тригранника вздовж кривої один із його ортів, які утворюють дотичну площину, буде дотичним до кривої. Положення тригранника в кожен момент часу описується однозначно і залежить від параметрів поверхні і кривої на ній. Отже його рух можна розглядати, як рух твердого тіла. Тригранник Дарбу одночасно здійснює два переміщення: поворот навколо миттєвої осі обертання, величина якого залежить від кривини кривої на поверхні, і лінійне переміщення в напрямі орта дотичної. Для відносно невеликої дуги кривої на поверхні переміщення тригранника із положення на початку дуги до положення на кінці дуги можна здійснити почергово двома рухами: поворотом навколо миттєвої осі обертання і прямолінійним ковзанням в напрямі дотичної. На невеликій ділянці кривої можна прийняти кутову швидкість обертання і лінійну швидкість ковзання сталими і знайти чисельні значення цих переміщень. Однак переміщення із початкового в кінцеве положення можна здійснити гвинтовим рухом, тобто одночасним поворотом навколо осі і ковзанням вздовж цієї осі. Ця вісь називається миттєвою віссю обертання і ковзання або кінематичним гвинтом.

Напрям кінематичного гвинта такий же, як і в миттєвої осі обертання, яка проходить через вершину тригранника, а положення в його системі інше. В окремих випадках ковзання тригранника може бути відсутнім, тоді кінематичний гвинт стає миттєвою віссю обертання. Це показано на простому прикладі, коли поверхнею є площина і тригранник рухається по кривій у цій площині. В такому випадку миттевою віссю обертання тригранника є вектор, паралельний орту нормалі і зміщений в сторону кривини кривої на величину, обернену кривині, тобто він проходить через центр кривини кривої. Якщо кривою є коло, то миттєвою віссю обертання тригранника є вектор, який займає постійне положення в центрі кола і вектор Дарбу обертається навколо цього вектора, рухаючись по колу. В статті знайдено положення кінематичного гвинта в *загальному випадку, коли крива на поверхні є просторовою. Показано, що чисто обертальний рух тригранника відбувається, коли він рухається по лінії кривини поверхні.*

Ключові слова: кінематичний гвинт; тригранник Дарбу; вектор Дарбу; геометричні методи побудови.

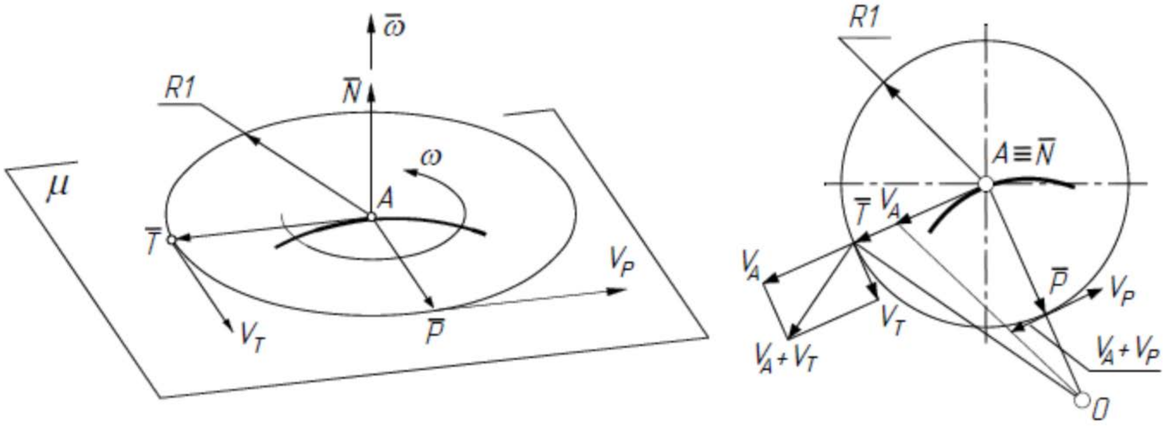
Постановка проблеми. При русі твердого тіла у просторі геометричне місце осей кінематичного гвинта утворює лінійчату поверхню. Ця поверхня може бути віднесена як до нерухомої системи координат, так і до рухомої (в нашому випадку – до системи тригранника Дарбу). В теоретичній механіці поверхню, віднесену до нерухомої системи координат, називають нерухомим аксоїдом, а ту, яка віднесена до рухомої системи – рухомим аксоїдом. Рухомий аксоїд обкочується по нерухомому із ковзанням вздовж спільної прямої дотику при гвинтовому русі тіла і без ковзання, коли кінематичний гвинт перетворюється у миттєву вісь обертання. Таким чином, поєднання геометричних методів і методів теоретичної механіки дозволяє отримати нові наукові результати.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. При русі матеріальної точки по поверхні розкладання діючих на неї сил відбувається в дотичній до поверхні площині, а також на нормаль до неї. Таке розкладання зволиться до проекціювання діючих сил на орти тригранника Дарбу [1]. Якщо поверхнею є площина, то тригранники Френе і Дарбу збігаються. Цей випадок розглянуто в праці [2], яка присвячена знаходженню траєкторії ковзання частинки по горизонтальній площині під дією прикладених до неї сил.

У загальному випадку розв'язування задач на рух частинки по поверхні зводиться до складання систем нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [3, 4]. В працях [5, 6] розглянуто знаходження абсолютної траєкторії точки при її складному русі у площині. Як зазначалося, в такому випадку тригранники Дарбу і Френе збігаються. Такий підхід дозволяє знаходити положення і швидкості ланок плоских механізмів.

Формулювання цілей та завдання статті. Знайти положення кінематичного гвинта тригранника Дарбу у власній системі при його переміщенні вздовж кривої на поверхні, а також кінематичні характеристики гвинта.

Основна частина. Розглянемо найпростіший випадок руху тригранника Дарбу, коли крива розташована у площині μ (рис. 1, *а*). При русі по кривій орти $\overline{T}$ і $\overline{P}$ змінюють напрям руху, тобто повертаються. Швидкість повороту залежить від швидкості руху тригранника по кривій і від кривини кривої. Якщо швидкість руху тригранника дорівнює одиниці, то його кутова швидкість ω обертання навколо орта нормалі $\overline{N}$ чисельно рівна кривині k кривої в точці A [7]. Без врахування лінійного переміщення тригранника в напрямі орта $\overline{T}$ із швидкістю $V=1$ його миттєвою віссю обертання є нормаль $\overline{N}$. Від обертального руху тригранника можна визначити лінійну швидкість кінців одиничних ортів $\overline{T}$ і $\overline{P}$. Зважаючи на те, що радіус R обертання кінців ортів дорівнює одиниці, а кутова швидкість $\omega=k$, лінійні швидкості кінців ортів будуть рівні: $V_T=V_P=k$. Лінійна швидкість точки A (вершини тригранника) в напрямі орта $\overline{T}$ за умовою дорівнює одиниці. Цю швидкість потрібно додати до всіх точок тригранника, оскільки крім обертального руху тригранник рухається з одиничною швидкістю в напрямі орта $\overline{T}$. На рис. 1 ,*б* до швидкостей V_T *і* V_P додано швидкість V_A переміщення всіх точок тригранника і в результаті векторної суми знайдено швидкості кінців ортів $\overline{T}$ (V_A+V_T) і $\overline{P}$ (V_A+V_P).



а *б*

Рис. 1. Графічні ілюстрації до знаходження миттєвої осі обертання тригранника Дарбу при його русі по кривій у площині μ:

а) миттєва вісь $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ обертання тригранника без врахування його переміщення вздовж орта дотичної $\overline{\boldsymbol{T}}$;

б) миттєва вісь обертання тригранника на горизонтальній проекції, яка проходить через точку *О* із врахуванням його сумарного переміщення

З теоретичної механіки відомо, що центр обертання відрізка знаходиться на перетині перпендикулярів до напряму швидкостей його кінців. Для знаходження центру (т. O на рис. 1,б) достатньо провести перпендикуляри до векторів сумарних швидкостей із кінців ортів $\overline{T}$ і $\overline{P}$. Ці перпендикуляри перетинаються в точці O. Виходячи із відомих векторів сумарних швидкостей кінців ортів $\overline{T}$ і $\overline{P}$ можна аналітичним шляхом знайти координати точки O – точки, через яку проходить миттєва вісь обертання тригранника. В системі тригранника $\overline{T}$, $\overline{P}$, $\overline{N}$ точка O для даного часткового випадку кривої у площині μ задається координатами $\{0,\ 1/k,\ \infty\}$, тобто миттєва вісь обертання проходить через центр кривини кривої паралельно орту $\overline{N}$.

Якщо кривою є коло із кривиною $k=1/r$, де r – його радіус, то координати точки O будуть сталими. Тригранник Дарбу обертатиметься навколо осі, яка проходить через центр кола.

Перейдемо до загального випадку, коли на криволінійній поверхні є просторова крива, вздовж якої рухається тригранник Дарбу. Положення твердого тіла в просторі (в нашому випадку – тригранника Дарбу) визначається положенням трьох його точок, що не лежать на спільній кривій. При переміщенні його в просторі ці точки мають певні швидкості. Якщо вони відомі, то для певного положення твердого тіла можна знайти миттєву вісь обертання і ковзання, тобто кінематичний гвинт. У тригранника Дарбу відомі швидкості кінців ортів внаслідок обертального руху тригранника при переміщенні його по кривій на поверхні. В цьому випадку миттєва вісь обертання тригранника має проекції ω_T, ω_P і ω_N (рис. 2, *а*). Їх величина залежить кривини $k=k(s)$ і скруту $\sigma=\sigma(s)$, де s – довжина дуги кривої. При переміщенні тригранника Дарбу вздовж кривої його рух в порівнянні із рухом тригранника Френе набуває додаткову швидкість обертання навколо орта $\overline{T}$ на кут ε (рис. 2, *б*), де ε – кут між дотичною до поверхні площиною μ і стичною площиною тригранника Френе.

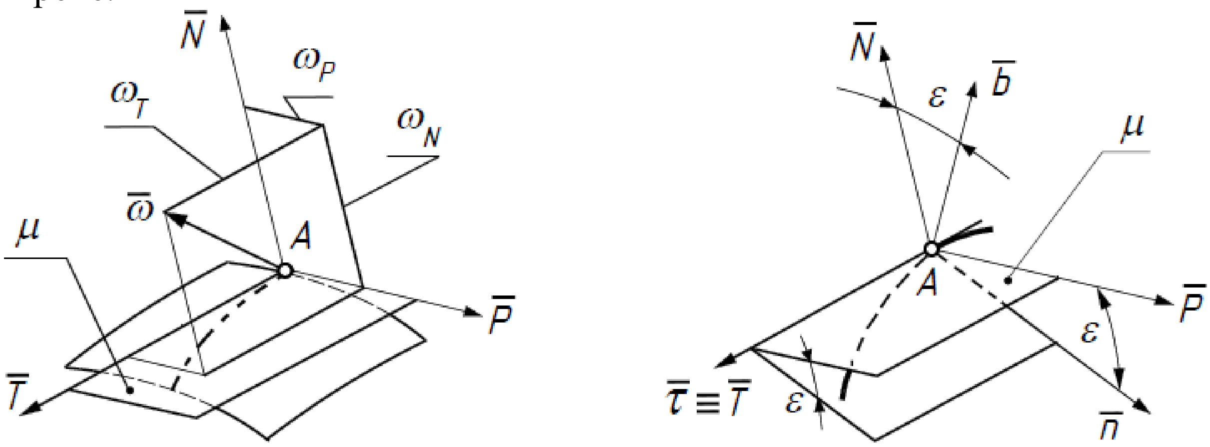


Рис. 2. Тригранники Дарбу і Френе в точці A кривої на поверхні:

а) миттєва вісь $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ обертання тригранника Дарбу без врахування його переміщення вздовж орта дотичної $\overline{\boldsymbol{T}}$;

б) взаємне положення тригранників Дарбу і Френе в точці A кривої на поверхні

Вирази проекцій вектора $\overline{\omega}$ миттєвої осі обертання тригранника Дарбу запишуться:

$$\omega_T = \sigma + \frac{d\varepsilon}{ds}, \qquad \omega_P = k\sin\varepsilon, \qquad \omega_N = k\cos\varepsilon \,. \tag{1}$$

Геометрична сума проекцій (1) дає величину обертальної швидкості тригранника Дарбу навколо миттєвої осі обертання $\overline{\omega}$:

$$\left|\overline{\omega}\right| = \sqrt{\omega_T^2 + \omega_P^2 + \omega_N^2} = \sqrt{\left(\sigma + \varepsilon'\right)^2 + k^2}\,. \qquad (2)$$

За відомими проекціями (1) засобами теоретичної механіки можна знайти напрям швидкості кінця кожного орта тригранника Дарбу в проекціях на ці ж орти:

$$\begin{aligned} V_T &= \overline{P}k\cos\varepsilon - \overline{N}k\sin\varepsilon; \\ V_P &= \overline{N}\left(\sigma + \varepsilon'\right) - \overline{T}k\cos\varepsilon; \\ V_N &= \overline{T}k\sin\varepsilon - \overline{P}\left(\sigma + \varepsilon'\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

На рис. 3, *а* схематично зображено трикутник *TPN*, який ми отримали сполученням кінців ортів тригранника Дарбу, і вектори швидкості вершин трикутника, тобто кінців ортів. Якщо взяти у просторі довільну точку (наприклад, *O*), і перенести в неї початок кожного вектора V_T, V_P і V_N, то їх кінці утворять швидкісну площину $T_VP_VN_V$ (рис. 3, *б*).

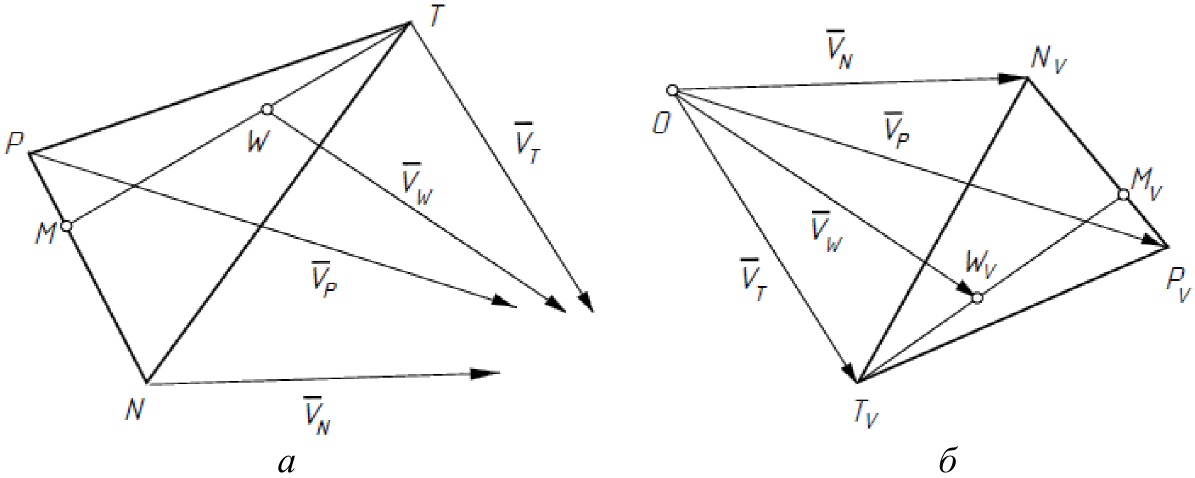


Рис. 3. Графічні ілюстрації до визначення швидкості будь-якої точки тригранника Дарбу за відомими швидкостями кінців його ортів:
а) трикутник, утворений кінцями ортів тригранника Дарбу із векторами їх швидкостей;
б) швидкісна площина, з допомогою якої можна визначити напрям і величину швидкості довільної точки

За допомогою швидкісної площини можна знайти величину і напрям швидкості будь-якої точки ΔTPN (наприклад, точки *W*, рис. 3, *а*). Для цього потрібно знайти відповідну точку у швидкісній площині $\Delta T_VP_VN_V$ і сполучити з точкою *O* (рис. 3, *б*). У різних точок швидкість буде різною, але якщо відрізок OW_V буде перпендикуляром до швидкісної площини, то швидкість точки W_V буде найменшою. Отриманий вектор V_W задає напрям миттєвої осі обертання і ковзання, а його модуль (довжина перпендикуляра) є величиною швидкості ковзання тригранника вздовж цієї осі. Початок цього вектора потрібно перенести у відповідну точку *W* ΔTPN. Таке перенесення потрібно робити на основі пропорційного ділення відрізків ΔTPN і $\Delta T_V P_V N_V$. Розглянемо це з використанням залежностей аналітичної геометрії.

Спочатку побудуємо швидкісну площину без врахування лінійного переміщення тригранника Дарбу в напрямі орта $\overline{T}$. Координати векторів швидкостей V_T, V_P і V_N в системі тригранника згідно (3) запишуться:

$$\begin{aligned} V_T &: \{0 \quad k\cos\varepsilon \quad -k\sin\varepsilon\}; \\ V_P &: \{-k\cos\varepsilon \quad 0 \quad \sigma+\varepsilon'\}; \\ V_N &: \{k\sin\varepsilon \quad -(\sigma+\varepsilon') \quad 0\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Рівняння площини, яка проходить через три точки із заданими координатами (4) в системі тригранника Дарбу, запишеться:

$$T(\sigma+\varepsilon') + Pk\sin\varepsilon + Nk\cos\varepsilon = 0. \tag{5}$$

Отже, швидкісна площина проходить через початок координат тригранника Дарбу перпендикулярно вектору з координатами $\{\tau+\varepsilon',\ k\sin\varepsilon,\ k\cos\varepsilon\}$. Згідно (1) такі ж координати має вектор миттєвої осі обертання, тобто швидкісна площина перпендикулярна вектору $\overline{\omega}$, що і логічно, тому що перпендикуляр OW_V (рис. 3,б) в даному випадку дорівнює нулю. Це означає, що тригранник здійснює тільки обертальний рух без його переміщення в напрямі орта $\overline{T}$. Надамо всім трьом точкам тригранника швидкість $V_A=1$ в напрямі орта $\overline{T}$, як ми це робили графічно (рис. 1,б). Після цього координати кінців векторів швидкостей V_T, V_P і V_N запишуться:

$$\begin{aligned} V_T &: \{1 \quad k\cos\varepsilon \quad -k\sin\varepsilon\}; \\ V_P &: \{1-k\cos\varepsilon \quad 0 \quad \sigma+\varepsilon'\}; \\ V_N &: \{1+k\sin\varepsilon \quad -(\sigma+\varepsilon') \quad 0\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Відповідно рівняння швидкісної площини, яка проходить через три точки із заданими координатами (5) в системі тригранника Дарбу, запишеться:

$$T(\sigma+\varepsilon') + Pk\sin\varepsilon + Nk\cos\varepsilon - (\sigma+\varepsilon') = 0. \tag{6}$$

Порівнюючи рівняння (4) і (6) бачимо, що напрям перпендикуляра OW_V не помінявся, але він має певну довжину, яку можна знайти за відомою формулою визначення відстані від початку координат до площини:

$$OW_V = \frac{\sigma+\varepsilon'}{\sqrt{(\sigma+\varepsilon')^2 + k^2}}. \tag{7}$$

За формулою (7) визначають величину швидкості ковзання тригранника Дарбу вздовж миттєвої осі обертання і ковзання в конкретній точці кривої на поверхні. Звідси випливає, що при $\sigma+\varepsilon'=0$ швидкість ковзання відсутня, а це відповідає руху тригранника Дарбу по лінії кривини поверхні. При цьому положення вектора $\bar{\omega}$, який в цьому випадку є миттєвою віссю обертання, теж зміниться відповідно до (1), тобто він буде розташований у нормальній площині тригранника Дарбу.

Наступний етап – перенести вектор OW_V в систему тригранника Дарбу. Для цього в ΔTPN, який утворений кінцями ортів (рис. 4, *а*), знайти точку W, яка відповідає точці W_V в швидкісній площині $\Delta T_V P_V N_V$ (рис. 3, *б*). Це будемо здійснювати на основі пропорційного ділення відрізків вказаних трикутників. Це громіздка багатокрокова робота, яку ми представимо у скороченому вигляді. Наприклад, в першу чергу знайдемо точку W_V перетину вектора OW_V із швидкісною площиною $\Delta T_V P_V N_V$ (рис. 3,б). Параметричні рівняння прямої, яка виходить із початку координат (т. O, рис. 3,б) паралельно вектору OW_V $\{\tau+\varepsilon',\ k\sin\varepsilon,\ k\cos\varepsilon\}$, запишуться:

$$T = u(\tau+\varepsilon'); \qquad P = uk\sin\varepsilon; \qquad N = uk\cos\varepsilon\ , \tag{8}$$

де u – незалежна змінна, пропорціональна довжині прямої.

Підставляємо вирази (8) у рівняння швидкісної площини (6) і знаходимо:

$$u = \frac{\tau+\varepsilon'}{k^2+(\tau+\varepsilon')^2}\,. \tag{9}$$

Підстановка виразу (9) у рівняння прямої (8) дає координати точки W_V:

$$V_W:\ \left\{\frac{(\tau+\varepsilon')^2}{k^2+(\tau+\varepsilon')^2} \qquad \frac{(\tau+\varepsilon')k\sin\varepsilon}{k^2+(\tau+\varepsilon')^2} \qquad \frac{(\tau+\varepsilon')k\cos\varepsilon}{k^2+(\tau+\varepsilon')^2}\right\}. \tag{10}$$

Наступний крок – потрібно знайти рівняння прямої, що сполучає точку W_V із знайденими координатами (10) з точкою T_V (координати у першому рядку виразів (5)). Також потрібно скласти рівняння прямої $P_V N_V$ і знайти точку перетину M_V її із продовженням прямої $T_V W_V$ (рис. 3, *б*). Координати точки M_V мають досить громіздкий характер, через те їх і координати деяких інших точок наводити не будемо.

Наступний крок – знайти відповідну точку M у ΔTPN (рис. 3, *а*). Для цього скористаємося співвідношенням пропорціонального ділення відрізків:

$$\frac{P_V M_V}{P_V N_V} = \frac{PM}{PN}\,. \tag{11}$$

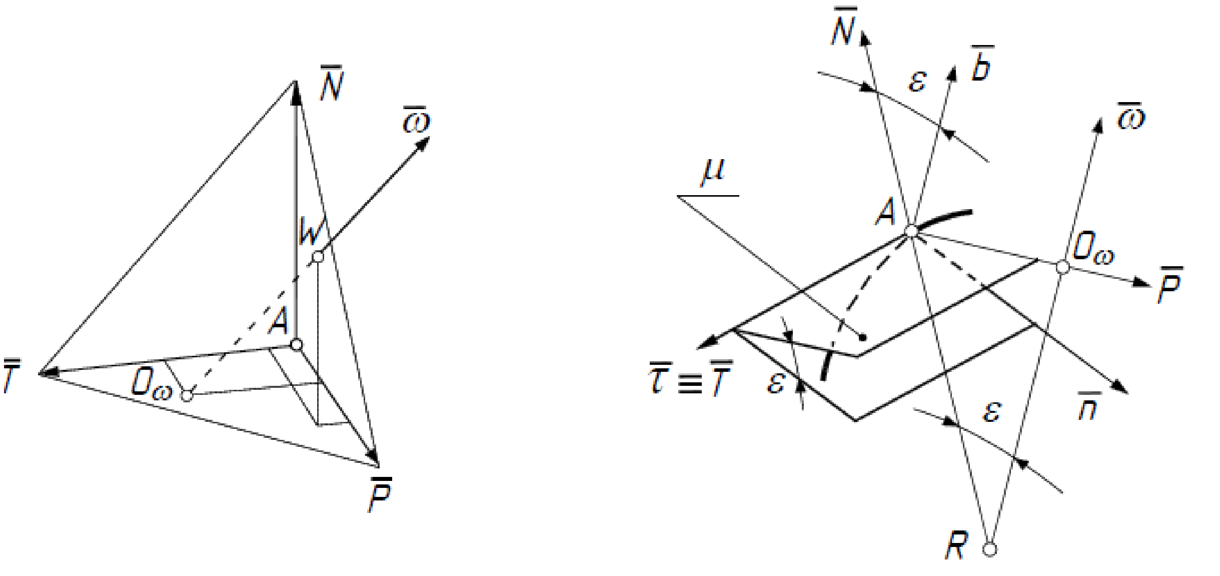
Із співвідношення (11) знаходять координати точки M у ΔTPN, попередньо склавши в ньому рівняння прямої PN. Аналогічно знаходять координати точки W у ΔTPN. Наводимо їх координати:

$$
\begin{aligned}
W_T &= \frac{(\sigma+\varepsilon')^2 + k(k-\cos\varepsilon+\sin\varepsilon)}{\left[(\sigma+\varepsilon')^2+k^2\right]\left[(\sigma+\varepsilon')+k(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon)\right]}(\sigma+\varepsilon');\\
W_P &= \frac{\left[(\sigma+\varepsilon')^2+k^2\right]\sin\varepsilon + k + (\sigma+\varepsilon')\cos\varepsilon}{\left[(\sigma+\varepsilon')^2+k^2\right]\left[(\sigma+\varepsilon')+k(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon)\right]}k;\\
W_N &= \frac{\left[(\sigma+\varepsilon')^2+k^2\right]\cos\varepsilon - k - (\sigma+\varepsilon')\sin\varepsilon}{\left[(\sigma+\varepsilon')^2+k^2\right]\left[(\sigma+\varepsilon')+k(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon)\right]}k\ .
\end{aligned}
\tag{12}
$$

В систему тригранника Дарбу у точку W із знайденими координатами (12) потрібно перенести вектор $\bar{\omega}$ із заданим напрямом (1). Якщо його продовжити до перетину із дотичною площиною тригранника, то отримаємо точку O_ω (рис. 4,а). Координати цієї точки описуються простими виразами:

$$
O_\omega:\ \left\{ \frac{(\sigma+\varepsilon')\mathrm{tg}\varepsilon}{(\sigma+\varepsilon')^2+k^2} \qquad \frac{k}{\left[(\sigma+\varepsilon')^2+k^2\right]\cos\varepsilon} \qquad 0 \right\}
\tag{13}
$$

Таким чином, кінематичний гвинт тригранника Дарбу проходить у його системі через точку O_ω, задану координатами (13) паралельно вектору, заданому його проекціями (1). Величина швидкості обертання навколо нього визначається виразом (2), а величина швидкості ковзання вздовж нього – виразом (7).



а б

Рис. 4. Положення кінематичного гвинта в системі тригранника Дарбу:
а) загальний випадок руху тригранника вздовж кривої на поверхні;
б) окремий випадок руху тригранника вздовж лінії кривини поверхні

У випадку, коли тригранник Дарбу рухається по лінії кривини поверхні, то $\sigma+\varepsilon'=0$. Відповідно до (13) зміняться координати точки O_ω:

вона лежатиме на орті $\overline{P}$ на відстані $AO_\omega=1/k\cos\varepsilon$ від вершини тригранника (рис. 4, *б*). Згідно (1) вектор $\overline{\omega}$ розташований у нормальній площині паралельно бінормалі лінії кривини і є миттєвою віссю обертання, оскільки ковзання вздовж осі відсутнє згідно (7). Швидкість обертального руху згідно (2) чисельно рівна кривині k аналогічно руху тригранника по кривій у площині. Оскільки вектор $\overline{\omega}$ лежить у нормальній площині, то він перетинає орт $\overline{N}$ в точці R (рис. 4,б). Із прямокутного трикутника ARO_ω можна знайти відстань $AR=1/k\sin\varepsilon$. Із диференціальної геометрії відомо, що нормалі до поверхні вздовж лінії кривини утворюють розгортну поверхню (торс). Нормалі дотикаються до ребра звороту на відстані від поверхні, оберненій нормальній кривині кривої. Відстань AR і є цією відстанню. Таким чином миттєвий вектор обертання тригранника Дарбу перетинає орт $\overline{N}$ в точці ребра звороту торса. Якщо взяти за приклад конус і його лінію кривини – паралель, то згідно отриманих результатів вектор $\overline{\omega}$ збігатиметься із його віссю, тобто при русі по паралелі тригранник Дарбу буде обертатися навколо осі конуса.

Висновки. При русі тригранника Дарбу по кривій на поверхні він здійснює два рухи одночасно: обертальний рух навколо миттєвої осі обертання, яка проходить через вершину тригранника, і лінійний рух в напрямі орта дотичної до кривої. Ці два рухи можна замінити одним гвинтовим рухом навколо миттєвої осі обертання і ковзання, тобто з допомогою осі кінематичного гвинта. Його напрям такий же, як і миттєвої осі обертання, яка проходить через вершину тригранника, а положення в системі тригранника знайдено через аналітичні розрахунки. Показано, що у випадку руху тригранника по лінії кривини поверхні він здійснює тільки обертальний рух навколо миттєвої осі обертання без ковзання вздовж неї. Для цього випадку знайдено положення осі, її напрям та величину швидкості обертального руху при одиничній швидкості руху тригранника по кривій.

Література

1. *Несвідомін А.В.* Моделювання руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні горизонтального циліндра в проекціях на орти локальних систем координат / *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків : ХДУХТ, 2011. Вип. 29. С. 23 – 29.
2. *Pylypaka S., Volina T., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S.* The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the predefined plane displacement / *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021, 3 (7-111), pp. 45–50. Режим доступу: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/232446/234604
3. *Кресан Т.А.* Рух частинки грунту по поверхні розгорнутого гелікоїда з горизонтальною віссю обертання і заданим кутом атаки / *Machinery &*

Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2021, Vol. 12, No 2, 67 - 75.
4. *Воліна Т.М.* Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні, яка утворена гвинтовим рухом синусоїди, під дією сили власної ваги / *Machinery & Energetics*. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No. 3, 187 – 194.
5. *Чепіжний А. В.* Визначення положень і швидкостей ланок плоских механізмів з допомогою тригранника Френе / *Сучасні проблеми моделювання* : зб. наук праць. МДПУ ім. Б. Хмельницького. Мелітополь : МДПУ, 2016. Вип. 7. С. 166 – 171.
6. *Чепіжний А.В., Бабка В.М.* Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2012. Вип. 90. С. 20 – 26.
7. *Пилипака С.Ф.* Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина перша. Абсолютні швидкість і траєкторія / *Електротехніка і механік*а. Київ, 2006. №1. С. 84 – 94.

References

1. *Nesvidomin A.V.* Modeliuvannia rukhu chastynky po shorstkii vnutrishnii poverkhni horyzontalnoho tsylindra v proektsiiakh na orty lokalnykh system koordynat / *Heometrychne ta kompiuterne modeliuvannia*. Kharkiv : KhDUKhT, 2011. Vyp. 29. S. 23 – 29.
2. *Pylypaka S., Volina T., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S.* The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the predefined plane displacement / *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021, 3 (7-111), pp. 45–50. Режим доступу: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/232446/234604
3. *Kresan T.A.* Rukh chastynky hruntu po poverkhni rozghornutoho helikoida z horyzontalnoiu vissiu obertannia i zadanym kutom ataky / *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Kyiv. Ukraine. 2021, Vol. 12, No 2, 67 - 75.
4. *Volina T.M*. Doslidzhennia rukhu chastynky po shorstkii poverkhni, yaka utvorena hvyntovym rukhom synusoidy, pid diieiu syly vlasnoi vahy / *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No. 3, 187 – 194.
5. *Chepizhnyi A. V.* Vyznachennia polozhen i shvydkostei lanok ploskykh mekhanizmiv z dopomohoiu tryhrannyka Frene / *Suchasni problemy modeliuvannia* : zb. nauk prats. MDPU im. B. Khmelnytskoho. Melitopol : MDPU, 2016. Vyp. 7. S. 166 – 171.
6. *Chepizhnyi A.V., Babka V.M.* Vyznachennia polozhen lanok ploskoho mekhanizmu za dopomohoiu systemy tryhrannyka Frene / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Kyiv : KNUBA, 2012. Vyp. 90. S. 20 – 26.
7. *Pylypaka S.F.* Teoriia skladnoho rukhu materialnoi tochky na ploshchyni. Chastyna persha. Absoliutni shvydkist i traiektoriia / *Elektrotekhnika i mekhanika*. Kyiv, 2006. №1. S. 84 – 94.

PhD, assistant professor **Andrii Nesvidomin ,**
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718
PhD, professor **Serhiy Pylypaka ,**
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

KINEMATIC SCREW OF DARBU TRIHEDRON

Frenet and Darboux trihedron play an important role in the theory of the internal geometry of surfaces. The first concerns the curve, the second concerns the surface. In a Darboux trihedron, one of the orthos is normal to the surface, and the other two form a plane tangent to the surface. If a curved line is set on the surface, the Darboux trihedron can be its companion. When a trihedron moves along a curve, one of its vertices, which form a tangent plane, will be tangent to the curve. The position of the trihedron at each moment of time is uniquely described and depends on the parameters of the surface and the curve on it. Therefore, its movement can be considered as the movement of a solid body. The Darboux trihedron performs two movements at the same time: a rotation around the instantaneous axis of rotation, the magnitude of which depends on the curvature of the curve on the surface, and a linear movement in the direction of the orthogonal tangent. For a relatively small arc of a curve on the surface, moving the trihedron from the position at the beginning of the arc to the position at the end of the arc can be performed alternately by two movements: rotation around the instantaneous axis of rotation and rectilinear sliding in the direction of the tangent. On a small part of the curve, you can take the angular speed of rotation and the linear speed of sliding as constant and find the numerical values of these movements. However, the movement from the initial to the final position can be carried out by a helical movement, that is, a simultaneous rotation around an axis and sliding along this axis. This axis is called the instantaneous axis of rotation and sliding or kinematic screw.

The direction of the kinematic screw is the same as in the instantaneous axis of rotation, which passes through the top of the trihedron, but the position in its system is different. In some cases, the sliding of the trihedron may be absent, then the kinematic screw becomes the instantaneous axis of rotation. This is shown on a simple example, when the surface is a plane and the trihedron moves along a curve in this plane. In this case, the instantaneous axis of rotation of the trihedron is a vector parallel to the orthonormal and shifted in the direction of the curvature of the curve by an amount proportional to the curvature, that is, it passes through the center of the curvature of the curve. If the curve is a circle, then the instantaneous axis of rotation of the trihedron is a vector that occupies a constant position in the center of the circle and the Darboux vector rotates around this vector, moving in a circle. The article finds the position of the kinematic screw in the general case when the curve on the surface is spatial. It is shown that the purely rotational motion of the trihedron occurs when it moves along the line of curvature of the surface.

Keywords: kinematic screw; Darbu's trihedron; Darbu vector; geometric methods of construction.