

## **ПРУЖНЕ ЗГИНАННЯ КРИВОЛІНІЙНОЇ СМУГИ ІЗ ЗАДАНОЮ ПОЧАТКОВОЮ КРИВИНОЮ ЇЇ ПРУЖНОЇ ОСІ**

*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

*Пружне згинання стержня або смуги характеризується тим, що після припинення дії деформуючого навантаження вони повністю відновлюють свою форму. Деформуючим навантаженням може бути прикладений до смуги момент, зосереджена або розподілена сила. Якщо на консольно защемлену смугу буде діяти якась із перерахованих навантажень або їх поєднання, то її прямолінійна вісь перетвориться у криволінійну. За основу розрахунку форми цієї осі береться відомий із опору матеріалів взаємозв'язок між кривиною пружної осі в залежності від її довжини, прикладеним моментом і жорсткістю смуги. Якщо жорсткість стала і на кінці консольно защемленої смуги прикладена зосереджена сила, то кривина осі носитиме лінійний характер, тобто кривина осі зростатиме пропорційно її довжині по мірі віддалення від місця защемлення. Така крива відома у диференціальній геометрії під назвою клотоїда. Вона не має параметричних або неявних рівнянь, тому будується за допомогою чисельних методів.*

*У загальному випадку кривина пружної осі описується нелінійними диференціальними рівняннями. В опорі матеріалів для розрахунку прогинів балок використовують лінійну теорію згину, яка дає спрощений роз'язок. Для практики такий розрахунок є прийнятним, оскільки для балок характерний малий прогин пружної осі і такий підхід значно спрощує розрахунки. Для розрахунку значних прогинів лінійна теорія не дає точного результату, тому потрібно шукати кривину пружної осі в залежності від довжини дуги за допомогою нелінійної теорії.*

*У статті розглянуто випадок, коли смуга не прямолінійна, а криволінійна, тобто вже має початкову кривину своєї осі. При дії прикладених до криволінійної смуги зусиль ця вісь деформується, змінюючи свою кривину. Після припинення дії прикладених зусиль смуга набуває початкової криволінійної форми. Прикладом такої деформації смуги може бути стояк (стійка) культиваторної лапи, який може змінювати кривину пружної осі внаслідок прикладеного до лапи зусилля змінної*

величини. У статті за пружну вісь такого стояка взято криву у функції довжини дуги і здійснено розрахунок його можливих прогинів при роботі.

*Ключові слова:* згинання; смуга; стержень; крива; деформація; лапа; навантаження.

**Постановка проблеми.** В результаті роботи культиватора на лапу, яка підрізає коріння бур'янів і рихлить ґрунт, діють сили опору змінної величини. В результаті цього, на стояки, до яких вони кріпляться, передаються пульсуючі динамічні навантаження. Це призводить до їх періодичної зміни пружної осі. В таких умовах лапа частково змінює своє положення, що впливає на кут входження леза у ґрунт та порушення стійкості її ходу за заданою глибиною [1]. Розрахунок форми пружної осі стояка під дією прикладеної сили до його кінця дасть можливість побудувати траєкторію відхилення лапи від початкового положення, тобто знаходити її нове положення при коливанні. Криволінійну вісь стояка у початковому стані можна задавати різними кривими, описаними натуральними рівняннями, тобто залежністю кривини від довжини дуги. Це дозволяє порівнювати роботу стояків різної геометричної форми.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Відомості про лінійний згин балок містяться у підручниках із опору матеріалів. Теорія нелінійного згину більш складна і менш застосовувана на практиці. Проте є задачі, де необхідно застосовувати теорію нелінійного згину. В праці [2] розглянуто згин консольно закріпленої смуги під дією зосередженої сили, а у праці [3] – згин такої ж смуги при поєднанні зосередженої сили і моменту, а також розподіленої сили. В інших працях [4 – 5] розраховується прогин смуги при інших видах навантаження. Нелінійний згин пружних пластин розглянуто в праці [6].

**Формулювання цілей та завдання статті.** Знайти аналітичний опис пружної осі консольно закріпленої криволінійної смуги із заданою початковою кривиною під дією прикладеної зосередженої сили.

**Основна частина.** З теорії опору матеріалів відомо, що при згинанні стержня кривина  $k$  його пружної осі прямо пропорційна прикладеному моменту  $M$  і обернено пропорційна жорсткості стержня  $EI$ . Жорсткість є добутком модуля Юнга  $E$ , що характеризує властивість матеріалу, на момент інерції  $I$  поперечного перерізу стержня:

$$k(s) = \frac{M(s)}{EI}, \quad (1)$$

де  $s$  є довжина стержня від його кінця до поточної точки.

Будемо вважати, що переріз стержня (смуги) не змінюється і модуль Юнга теж сталий. В такому випадку кривина  $k$  прямо пропорційна прикладеному моменту  $M$ , де коефіцієнтом пропорційності служить величина, обернена жорсткості. Також вважатимемо, що криволінійна смуга є абсолютно пружна, тобто вона повністю відновлює свою форму

після припинення дії моменту. Прикладом такої смуги може служити стояк, до якого кріпиться лапа культиватора (рис. 1, а). Під час рихлення ґрунту на лапу діють сили опору рихленню і перерізанню бур'янів, які не є сталими. Під дією пульсуючого динамічного навантаження стояк може змінювати форму пружної осі, відповідно положення лапи теж змінюватиметься. За пружну вісь стояка візьмемо дугу кола, радіус  $r=1/k$  якого вибирають із врахуванням висоти  $h$  від лапи до місця кріплення стояка (рис. 1, б).

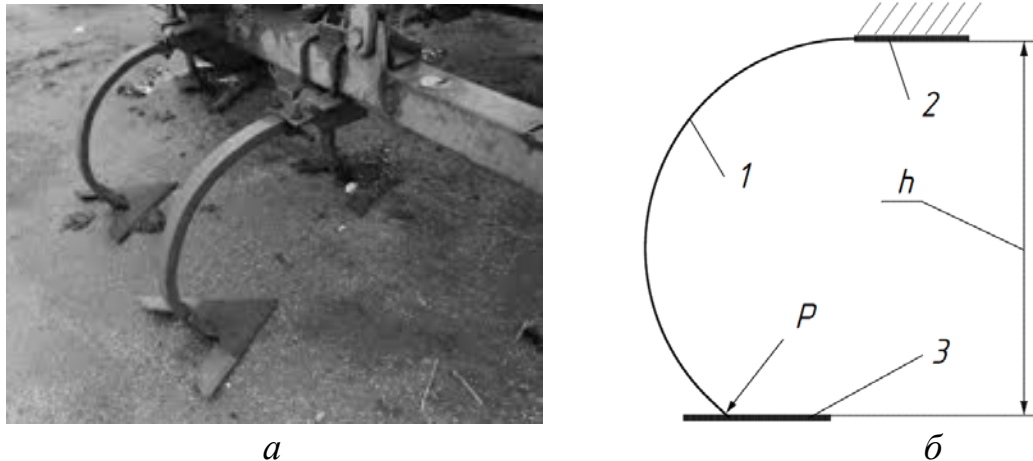


Рис. 1. Графічні ілюстрації до згинання стояка культиваторної лапи в процесі рихлення ґрунту: а) вихідне положення стояка із лапою до початку роботи;

б) схема пружної осі стояка з лапою:

1 – стояк; 2 – місце кріплення стояка до рами; 3 – лапа

До початку роботи кривина осі стояка  $k=1/r$  є сталою. Під час роботи виникає сила опору, складова  $P$  якої прикладена в кінці стояка перпендикулярно до нього (рис. 1, б). Вона створює момент  $M=P \cdot s$ , де  $s$  – довжина пружної осі стояка. Цей момент намагається розігнути стояк.

Від величини жорсткості  $EI$  смуги залежить величина прогину її пружної осі. Під дією однієї і тієї ж сили  $P$  смуга із меншою жорсткістю матиме більший прогин і навпаки. В статті не ставиться задача до визначення чисельних значень жорсткості, а до закономірностей прогину стояка в залежності від форми його пружної осі. При роботі культиватора виникає сила, яка розгинає стояк, і ця сила має певні межі: від мінімальної величини, близької до нуля, до максимального значення (до уваги не приймається непередбачувана перешкода, що веде до виникнення неспіврозмірно великої сили і для уникнення дії якої передбачено захисні пристрої). При одній і тій же жорсткості стояка його кінець у місці з'єднання із лапою може мати різну амплітуду коливань при одних і тих же межах зміни сили  $P$  в залежності від форми пружної осі в початковому стані. В зв'язку із цим для спрощення розрахунків умовно приймемо жорсткість рівною одиниці:  $EI=1$ . Після цього формула (1) набуває спрощеного вигляду:  $k(s)=M(s)$ . Ця залежність характеризує зміну кривини смуги від прикладеного моменту при умові, що початкова її кривина дорівнює нулю, тобто смуга до згинання є прямолінійною. В нашому

випадку смуга до прикладення згинаючого моменту має початкову кривину  $k_0$ . В залежності від напрямку дії прикладеної сили смуга може або збільшувати свою кривину (згинатися), або зменшувати (розгинатися). В нашому випадку відбувається розгинання смуги, що відповідає виразу  $k_0(s) - k(s) = M(s)$ . Прикладений момент носить лінійний характер:  $M(s) = P \cdot s$ . У зв'язку із цим можна записати:  $k(s) = k_0(s) - P \cdot s$ . Розглянемо варіант, коли стояк окреслений по дузі кола, отже  $k_0 = \text{const}$ . Із диференціальної геометрії відомо, що кривина є границею відношення кута  $\alpha$  між дотичними на кінцях елемента дуги  $s$  до довжини цього елемента. У зв'язку із цим можна записати:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_0 - Ps. \quad (2)$$

По суті, рівняння (2) є натуральним рівнянням пружної осі смуги. Перехід від нього до координатної форми запису відбувається за відомими формулами:

$$x = \int \cos \alpha(s) ds; \quad y = \int \sin \alpha(s) ds, \quad (3)$$

де кут  $\alpha$  знаходиться інтегруванням виразу (2).

При відсутності прикладеної сили  $P$  ( $P=0$ ) із рівняння (2) отримуємо:  $\alpha = k_0 \cdot s$ . При подальшій підстановці цього виразу у (3), після інтегрування отримуємо параметричні рівняння кола радіуса  $r = 1/k_0$ , тобто стояк матиме форму дуги кола. Прикладемо силу  $P$ , яка розгинає стояк. Інтегрування виразу (2) дає:

$$\alpha = k_0 s - \frac{P}{2} s^2. \quad (4)$$

Підстановка виразу (4) у (3) не дозволяє виконати інтегрування, тому форму пружної осі стояка визначаємо методами чисельного інтегрування. На рис. 2, а представлено форму пружної осі стояка при різних значеннях прикладеної сили  $P$ .

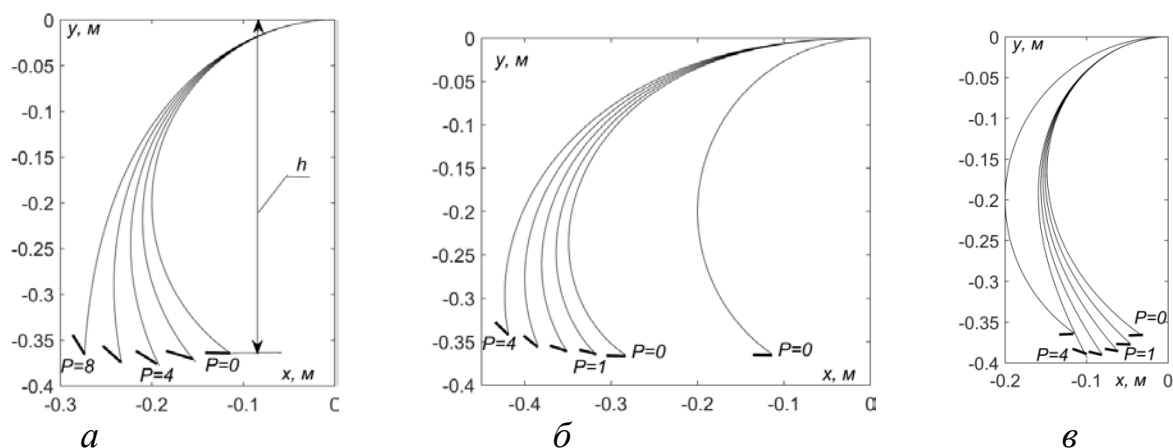


Рис. 2. Зміна форми пружної осі стояка під дією прикладеної сили  $P$ :

- а) стояк при  $P=0$  представляє дугу кола радіуса  $r=0,2$ ;
- б) стояк при  $P=0$  описується рівнянням  $k_0=10s+1$ ;
- в) стояк при  $P=0$  описується рівнянням  $k_0=10s-7,6$

Як видно із рис. 2, а, висота  $h$  становить 0,35 м. При цьому кут в точці примикання стояка до лапи рівний  $35^\circ$ . Довжина  $s$  пружної осі (дуги кола при  $P=0$ ) становить 0,5 м. На рис. 2, а показані окремі положення пружної осі стояка через 2 одиниці збільшення сили  $P$ .

Для порівняння було взято інші криві із змінною кривиною для початкової форми пружної осі стояка. Їх рівняння підбиралися так, щоб у початковому стані висота  $h$  і кут примикання до лапи були такими ж, як і для кола. В одному випадку кривина зростала по лінійному закону по мірі віддалення точки кривої від місця кріплення (рис. 2, б), в іншому – зменшувалася (рис. 2, в). Для порівняння в обох випадках зображена вісь у вигляді дуги кола, як на рис. 2, а. Довжина дуги  $s$  пружної осі становить  $s=0,62$  м (рис. 2, б) і  $s=0,49$  м (рис. 2, в). Аналізуючи отримані зображення, бачимо, що більша стабільність по висоті при коливанні стояка властива для випадку, коли його пружна вісь є дугою кола.

**Висновки та перспективи розвитку.** У практиці поширеною задачею є розрахунок прямолінійних балок на міцність під дією прикладених сил. При цьому враховується їх прогин, який є незначним у порівнянні із їх довжиною. Поряд із цим існують елементи машин, які мають форму криволінійного стержня і під дією прикладених сил зазнають значних прогинів. У статті такий елемент розглянуто на прикладі стояка лапи культиватора, на який в процесі роботи діють пульсуючі змінні навантаження, і які викликають зміну форми його пружної осі. В основі виконаних досліджень лежить відома залежність кривини пружної осі від прикладеного моменту і жорсткості стержня. При цьому приймається до уваги, що стержень до деформації має початкову сталу або змінну кривину.

## Література

1. Арендаренко В.М., Ларенко В.В. Особливості розрахунку пружинного елемента регулятора кута атаки культиваторної лапи *Вісник Полтавської державної аграрної академії*. 2017. № 3. С. 122–125. Режим доступу: <https://www.pdau.edu.ua/sites/default/files/visnyk/2017/03/30.pdf>
2. Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М., Пилипака Т.С. Пружне згинання стержнів при значних їх прогинах. *Електротехніка і механіка*. 2007. № 1. С. 52–56.
3. Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Хропост В.І., Бабка В.М. Пружне згинання смуги із значним прогином під дією прикладених сил та моменту. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київський національний університет будівництва і архітектури, 2021. № 101. С. 137-147. Режим доступу: <http://ageg.knuba.edu.ua/article/view/256312>
4. Лізунов П.П., Недін В.О. Чисельне диференціювання форм вигину пружних стержнів значної довжини. *Управління розвитком складних*

систем. 2021. № 46, С. 70–75. Режим доступу:  
<http://mdcs.knuba.edu.ua/article/view/244933>

5. Харченко В.Є., Корсак В.І. Аналітичне розв'язання нелінійної задачі згину пружного стрижня. *Видавництво Львівської політехніки*. 2015. № 820, С. 105–115. Режим доступу:  
<http://ena.lp.edu.ua:8080/bitstream/ntb/31079/1/15-105-115.pdf>

6. Курпа Л.В., Любицька К.І., Лінник, І.О. Г.Б. Морачковська. Дослідження нелінійного згину багатокутних функціонально-градієнтних пластин з урахуванням пружної основи. *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. 2022. № 1, С. 47–51. Режим доступу:  
<http://jdsm.khpi.edu.ua/article/view/263808>

Postgraduate Student **Vyacheslav Hropost**

[hropost97@ukr.net](mailto:hropost97@ukr.net) ORCID 0000-0001-9363-3955

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

Ph. D. **Iryna Demchuk**

[okira@i.ua](mailto:okira@i.ua) ORCID 0000-0001-9566-2194

Separate Division of the University, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, "Nizhynsk Agrotechnical Institute"

## **ELASTIC BENDING OF A CURVILINEAR STRIP WITH A GIVEN INITIAL CURVATURE OF ITS ELASTIC AXIS**

*The elastic bending of a rod or strip is characterized by the fact that after the deforming load is removed, they fully restore their shape. The deforming load can be a moment, a concentrated force, or a distributed force applied to the strip. If the cantilevered strip is subjected to any of the above loads or their combination, its straight axis will turn into a curved axis. The calculation of the shape of this axis is based on the relationship between the curvature of the elastic axis depending on its length, the applied moment, and the stiffness of the strip, which is known from the resistance of materials. If the stiffness is constant and a concentrated force is applied at the end of the cantilevered strip, the curvature of the axis will be linear, i.e., the curvature of the axis will increase in proportion to its length as it moves away from the point of clamping. Such a curve is known in differential geometry as a clotoid. It has no parametric or implicit equations, so it is constructed using numerical methods.*

*In general, the curvature of an elastic axis is described by nonlinear differential equations. In the resistance of materials, the linear bending theory is used to calculate the deflections of beams, which provides a simplified solution. For practice, this calculation is acceptable, since beams are characterized by a small deflection of the elastic axis and this approach greatly simplifies calculations. To calculate significant deflections, the linear theory does not provide an accurate result, so it is necessary to look for the curvature of the elastic axis depending on the arc length using a nonlinear theory.*

*This paper considers the case when the strip is not straight but curved, i.e., it already has an initial curvature of its axis. When forces are applied to a curved strip, this axis deforms, changing its curvature. When the applied forces are released, the strip acquires its original curvilinear shape. An example of such a band deformation is the riser (stand) of a cultivator tine, which can change the curvature of the elastic axis as a result of a variable force applied to the tine. In this article, the elastic axis of such a riser is taken as a curve as a function of the arc length and its possible deflections during operation are calculated.*

*Keywords: bending; strip; rod; curve; deformation; paw; load.*