УДК 621.396.001.2
DOI: 10.32347/0131-579x.2023.105.81-93

к. т. н., доцент **Гнітецька Т.В.**
gnitetsk@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9682-6488
к. п. н., доцент **Гнітецька Г.О.**
gnitetsk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2864-3142
студент **Бондаренко Ю.В.**
teraria.net@gmail.com
студентка **Губар О.В.**
saashayy21@gmail.com
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ СТРУКТУРИ ФАЗОВИХ ПОТОКІВ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ХАОТИЧНОЮ ПОВЕДІНКОЮ

В статті досліджується геометрична структура фазових потоків динамічної системи, математична модель якої представляється системою нелінійних диференціальних рівнянь. Дослідження проводились на прикладі системи рівнянь Лоренца з використанням теорії стійкості Ляпунова для точок рівноваги системи та чисельного інтегрування з застосуванням системи MATLAB. На першому етапі досліджень шляхом розв'язку системи нелінійних рівнянь при нульових значеннях похідних були знайдені координати трьох точок рівноваги. Використання лінеаризації в точках рівноваги дозволило зробити якісну оцінку процесів, що відбуваються в нелінійній системі. За коренями характеристичних рівнянь матриці коефіцієнтів лінеаризованої системи визначені локальні напрямки стискання та розтягування фазового об'єму у фазовому просторі системи поблизу кожної зі знайдених точок рівноваги. Чисельними методами інтегрування були побудовані фазові криві у тривимірному фазовому просторі системи при різних початкових умовах поблизу кожної з точок рівноваги, що дозволяє провести аналіз фазових портретів, виокремити узагальнену структуру фазових потоків в координатах лінеаризованої системи та визначити їх положення у відповідності до системи координат нелінійної системи. Побудовані фазові портрети у тривимірному фазовому просторі нелінійної системи при різних початкових умовах. Розглянуті перехідні процеси дають можливість оцінити вплив точок рівноваги та хаотичного атрактора на траєкторію фазових кривих. Результати дослідження геометричної структури фазових потоків системи в режимі *детермінованого хаосу дають простір для оптимізації вибору початкових умов функціонування системи.*

Дослідження фазового простору систем з хаотичною поведінкою дозволить більш ефективно використовувати властивості детермінованого хаосу, зокрема шумоподібні властивості вихідних сигналів, в прикладних задачах.

Ключові слова: динамічні системи; хаотична динаміка; атрактор; фазовий простір; фрактальна геометрія.

Постановка проблеми. Для вирішення багатьох практичних задач створюють математичну модель пристрою або процесу, використовуючи певну ідеалізацію. Чим точніша ідеалізація, тим достовірніша математична модель. Частіше за все математична модель представляється у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь. Дослідження поведінки математичної моделі дозволяє прогнозувати процеси, що відбуваються в системі, та визначати необхідні режими її функціонування.

Одним із методів дослідження математичної моделі може бути аналіз геометричної структури фазових портретів системи побудованих як сукупність фазових траєкторій. При цьому кожна фазова траєкторія є частинним розв'язком системи диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах. Геометрична структура фазових портретів систем з хаотичною поведінкою є малодослідженою.

Ціль статті. Ціллю даної статті є дослідження геометричної структури фазових потоків динамічної системи, математична модель якої представлена системою нелінійних диференціальних рівнянь. Досліджуються системи здатні демонструвати складну хаотичну поведінку, утворюючи у фазовому просторі хаотичні атрактори, що характеризуються фрактальною будовою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Фазовий потік заданої системи диференціальних рівнянь математичної моделі описує процес у часі при довільних початкових умовах. Праві частини системи диференціальних рівнянь є векторним полем фазової швидкості, яке визначає локальний закон еволюції процесу. Виходячи з цього, поведінку фазових траєкторій у фазовому просторі можна розглядати як геометричне представлення еволюції в системі. Дослідження структури фазових портретів, як правило, проводяться теоретично. Найбільш повно ця теорія розроблена для лінійних систем диференціальних рівнянь [1]. В нелінійних системах для якісного аналізу процесів, що відбуваються, виконується лінеаризація. Нелінійні системи диференціальних рівнянь що описують хаотичну поведінку, як правило, не інтегруються та можуть мати більшу за 2 розмірність фазового простору. Тому їх дослідження проводиться чисельними методами [1], [2].

Дослідження нелінійних систем в режимі детермінованого хаосу та їх прикладне застосування розглядалось в ряді робіт [3 – 5].

Основна частина. Проведемо дослідження геометричної структури фазових потоків динамічної системи з хаотичною поведінкою на прикладі системи рівнянь Лоренца, яка є спрощеною математичною моделлю конвекції шару рідини, що підігрівається знизу [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a*(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= r*x-y-x*z \\ \frac{dz}{dt} &= -b*z+x*y \end{aligned} \tag{1}$$

При параметрах a=10, b=8/3, r=28 в системі виникає хаотичний автоколивальний режим.

При дослідженні нелінійних систем в якості першого наближення використовують теорію лінійних диференціальних рівнянь. Це дозволяє за визначеними точками рівноваги системи (1) дослідити топологію векторних полів в околі цих точок.

Було визначено корені характеристичного рівняння для матриці коефіцієнтів лінеаризованої в кожній з точок рівноваги нелінійної системи (1). За цими коренями, у відповідності до теорії стійкості Ляпунова, було запрогнозовано структуру фазових потоків в системі. Для уточнення їх структури чисельними методами інтегрування поблизу кожної з отриманих точок рівноваги були побудовані фазові криві при різних початкових умовах.

Дослідження системи проводилось за допомогою системи MATLAB з використанням чисельного метода інтегрування Рунге-Кута 5 порядку.

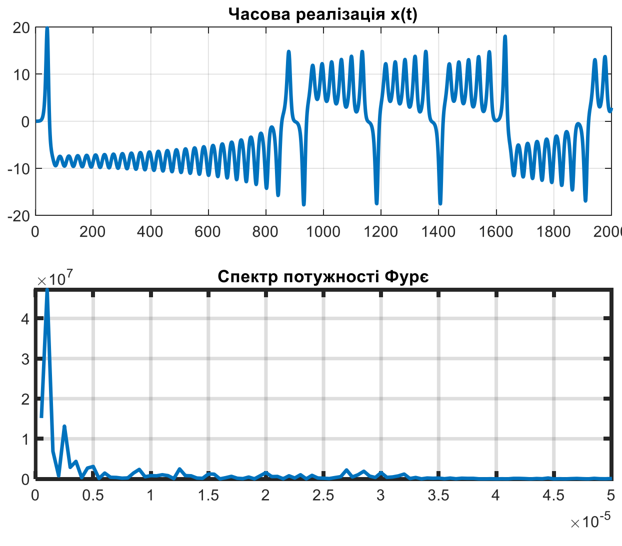


Рис.1. Часова реалізація та спектр Фур’є атрактора Лоренца

На рис.1 зображено часову реалізацію x(t) та спектр Фу’рє сигналу, що генерується в процесі чисельного інтегрування системи. З рисунків видно, що часова реалізація подібна до випадкового сигналу, а спектр Фур’є характеризується широким спектром частот. Саме ця властивість дозволяє використовувати згенеровані хаотичними атракторами часові реалізації в прикладних задачах, зокрема, при конфіденційній передачі інформації [3 – 7].

Для пошуку точок рівноваги похідні у вихідній системі (1) прирівнювались нулю, після чого розв’язувалась система нелінійних рівнянь:

$$a*(y-x)=0$$
$$r*x-y-x*z=0$$
$$-b*z+x*y=0$$

В результаті обчислень в системі MATLAB було виявлено, що досліджувана система при заданих параметрах має три точки рівноваги.
Перша точка рівноваги з координатами (x; y; z):
(0; 0; 0).
Друга точка рівноваги має координати:
(-8.485281374238571; -8.485281374238571; 27).
Третя точка рівноваги:
(8.485281374238571; 8.485281374238571; 27).

Проведемо дослідження на стійкість для кожної точки рівноваги окремо, що дасть можливість з’ясувати характер руху фазових траєкторій в деякому околі кожної з точок рівноваги та геометричну структуру фазового портрету системи в цілому.

Для нелінійних систем в околі точки рівноваги виконуємо лінеаризацію системи шляхом розкладання векторного поля в ряд Тейлора, залишаючи перший лінійний член ряду Тейлора та відкидаючи всі наступні.

Якщо систему диференціальних рівнянь переписати у вигляді:

$$x_i' = f_i(x),\ i=1,\dots,n \tag{2}$$

то лінеаризованим в точці $x=x_{т.р.}$ система рівнянь (2) буде рівняння:

$$\varepsilon_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_j,\quad i=1,\dots,n,\quad a_{i,j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|x=x_{m.p.} \tag{3}$$

Перепишемо лінеаризоване рівняння (3) у матричному вигляді

$$\boldsymbol{e}'=A\boldsymbol{e} \tag{4}$$

Питання про зв’язок нелінійного та лінеаризованого рівнянь необхідно досліджувати окремо, оскільки лінеаризація інваріантна, тобто це операція, яка не залежить від початкової системи координат [1]. Тому в нашому дослідженні чисельними методами визначались також локальні положення напрямків осей e_1, e_2, e_3 стискання та розтягування фазових потоків в околі визначених точок рівноваги.

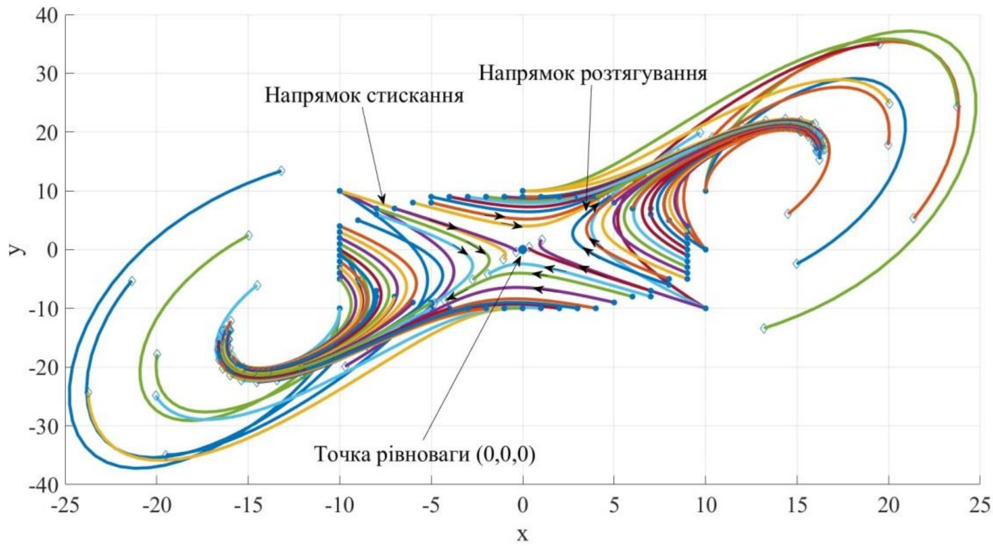
В результаті лінеаризації в першій точці рівноваги x=0; y=0; z=0; матриця A системи рівнянь (4) прийме наступні значення:

$$A = \begin{bmatrix} -10.0 & 10.0 & 0 \\ 28.0 & -1.00 & 0 \\ 0 & 0 & -2.6666666667 \end{bmatrix}$$

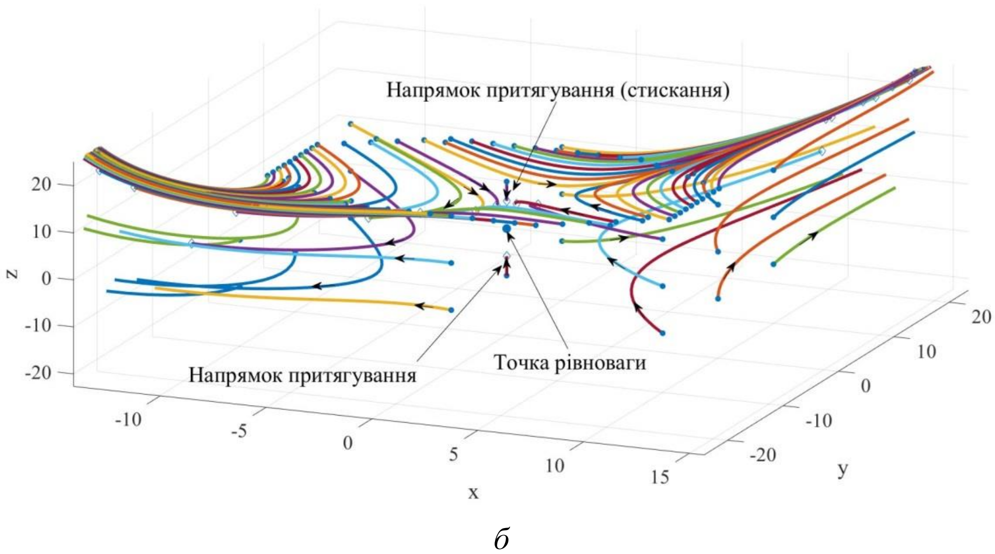
Були знайдені власні значення матриці A, як корені вікового рівняння. В результаті було отримано три дійсні корені:

l_1=-22.827723451163457
l_2=11.827723451163456
l_3=-2.666666666666667

Два з цих коренів від'ємні, що, у відповідності до теорії стійкості Ляпунова, свідчить про притягування фазової траєкторії до точки рівноваги з напрямків e_1 та e_3, причому одне із значень l_1 найбільше по модулю. Тобто, притягування в напрямку e_1 найбільше.



а

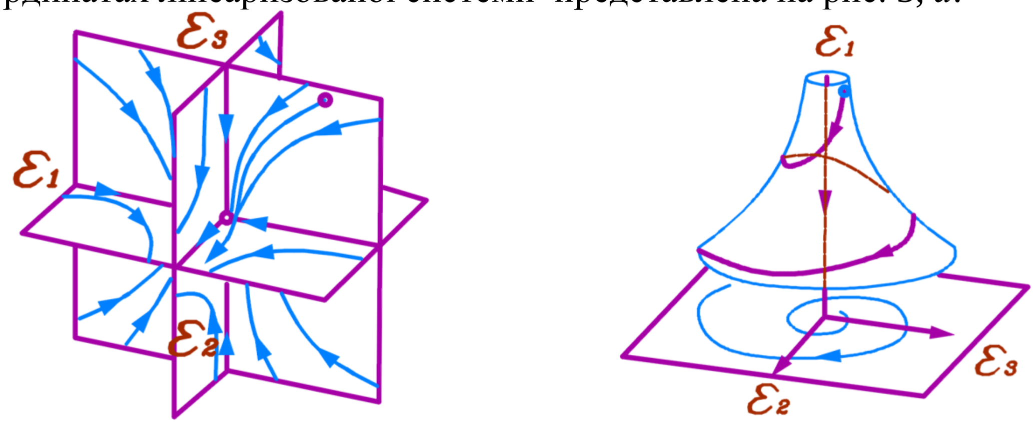


б

Рис.2 Напрямки деформації фазових потоків для точки рівноваги (0; 0; 0)

Додатній корінь l_2 зі значенням 11.827723451163456 свідчить про відштовхування в напрямку e_2. Така сигнатура коренів свідчить про наявність у тривимірному фазовому просторі нестійкої сідлової точки рівноваги.

Розглянемо структуру потоків на графіках, отриманих чисельним інтегруванням. Початкові умови зображено точками. Чотирикутниками показано кінцеву точку реалізації. На рис. 2, *а* зображено вигляд на першу точку рівноваги в площині *xOy* з напрямку осі *Oz*, позначено один із напрямків стискання e_1 та напрямок розтягування e_2 фазового об'єму. На рис. 2, *б* показано просторове зображення цього ж фазового портрету системи. На ньому видно ще один напрямок стискання фазового об'єму e_3, який співпадає з напрямком осі *Oz*. Узагальнена структура фазових потоків в координатах лінеаризованої системи представлена на рис. 3, *а*.



а *б*

Рис. 3. Узагальнена структура фазових потоків
в координатах лінеаризованої системи

Як видно з рис. 3, *а*, в напрямку осей e_1 та e_3 відбувається стискання фазових потоків, а в напрямку осі e_2 – розтягування.

У другій точці рівноваги з координатами

x= -8.485281374238571
y= -8.485281374238571
z= 27,

матриця *A* прийме наступні значення:

$$A = \begin{bmatrix} -10.0 & 10.0 & 0 \\ 1.00 & -1.00 & 8.4852813742 \\ -8.4852813742 & -8.4852813742 & -2.6666666667 \end{bmatrix}$$

Корені характеристичного рівняння для вказаної матриці мають значення:

l_1=-13.854577914596037695805235051499
l_2=0.093955623964685514569284192416338 - 10.194505220927849631575710422318i
l_3= 0.093955623964685514569284192416338 + 10.194505220927849631575710422318i

Отримані результати свідчать, що в околі другої точки рівноваги відбувається досить сильне стискання фазового об'єму по напрямку e_1, оскільки маємо дійсне від'ємне значення кореню l_1=-13.854578. В напрямку двох інших осей маємо спряжені комплексні корені l_2 та l_3. Дійсна частина цих коренів додатна, що свідчить про невелике розтягування, причому розтягування приблизно в 150 разів менше за стискання. Присутність комплексної складової додає орбітальний рух по траєкторії відходу в напрямку розтягування від точки рівноваги (рис.4.) Тобто, в координатах лінеаризованої системи при певних початкових умовах маємо уявну поверхню рис. 3, *б* на якій лежать фазові траєкторії. Лійкоподібна форма цієї поверхні свідчить про стискання фазового об'єму по напрямку осі e_1 та розтягування з обертанням по напрямках e_2 і e_3.

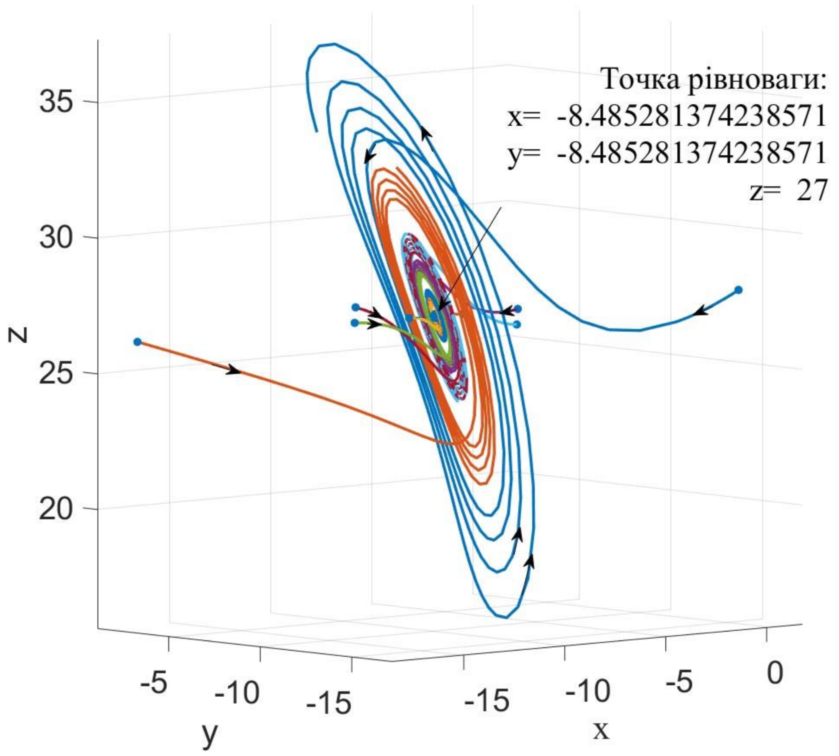


Рис.4 Напрямки руху фазових потоків в околі точки рівноваги (-8.485281374238571; -8.485281374238571; 27)

Напрямок осі притягування e_1, заданої двома точками, для другої точки рівноваги в системі координат x,y,z має значення, близькі до

ex=[-7.74 -9.24]

ey=[-9.14 -7.84]

ez=[27.08 26.92].

В третій точці рівноваги з координатами

x= 8.485281374238571

y= 8.485281374238571

z= 27,

матриця A приймає вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} -10.0 & 10.0 & 0 \\ 1.00 & -1.00 & -8.4852813742 \\ 8.4852813742 & 8.4852813742 & -2.6666666667 \end{bmatrix}$$

Корені характеристичного рівняння для вказаної матриці мають наступні значення:

l_1=-13.854577914596037695805235051499
l_2=0.093955623964685514569284192416338 - 10.194505220927849631575710422318i
l_3= 0.093955623964685514569284192416338 + 10.194505220927849631575710422318i

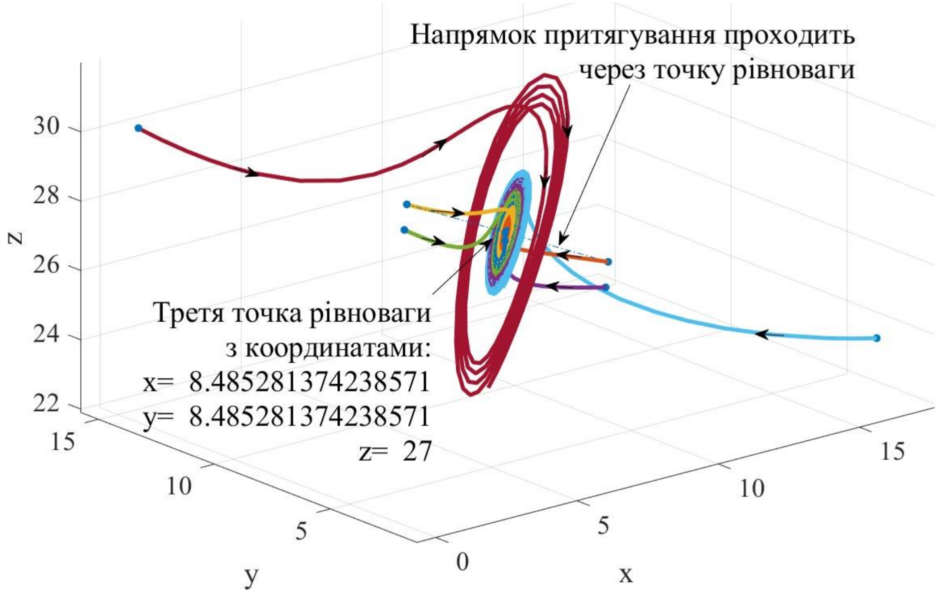


Рис.5 Напрямки руху фазових потоків в околі точки рівноваги (8.485281374238571; 8.485281374238571; 27)

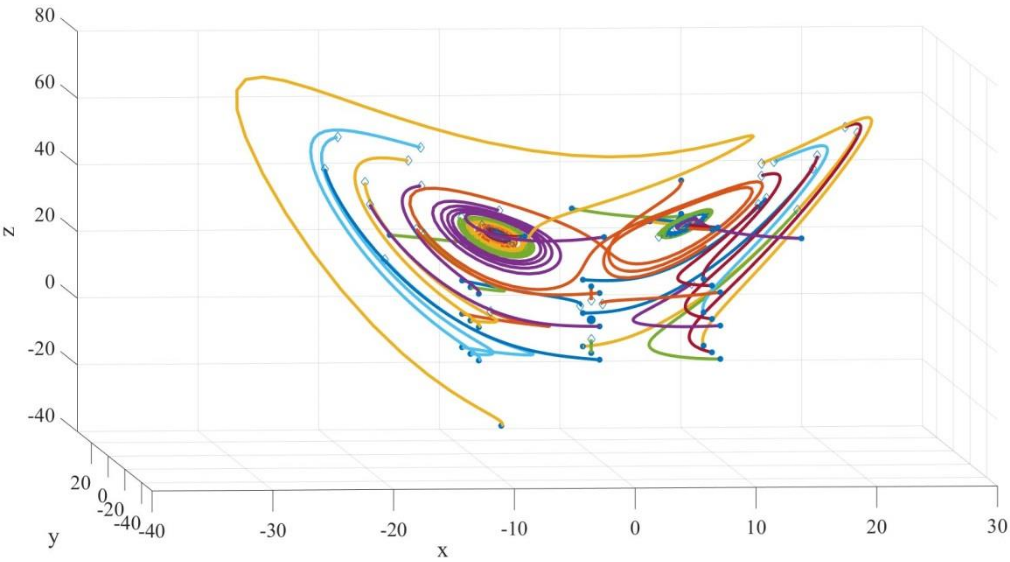


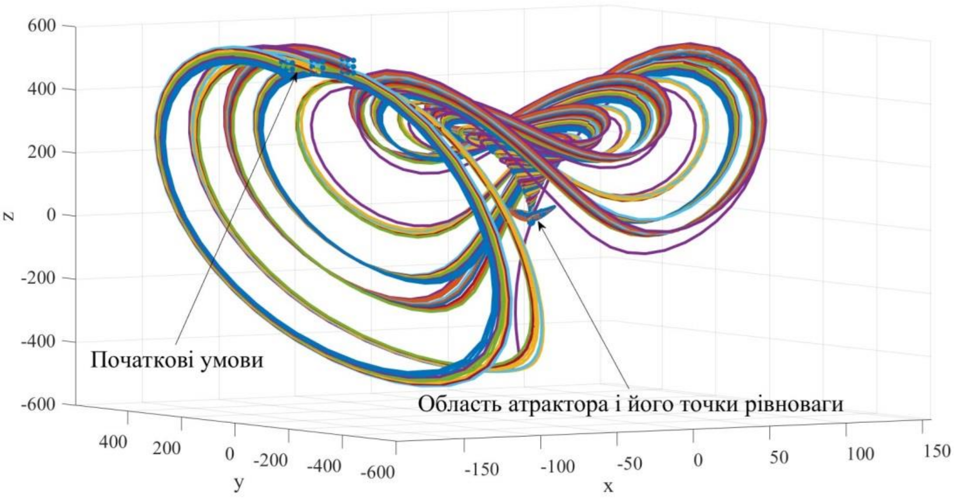
Рис.6 Загальний вигляд перехідного процесу на атрактор Лоренца при початкових умовах близьких до точок рівноваги

Як видно з отриманих результатів, значення цих коренів повністю співпадають зі значеннями коренів в другій точці рівноваги. Тобто, поведінка фазових потоків в околі третьої точки рівноваги є аналогічною до поведінки в околі другої точки рівноваги (рис. 5).

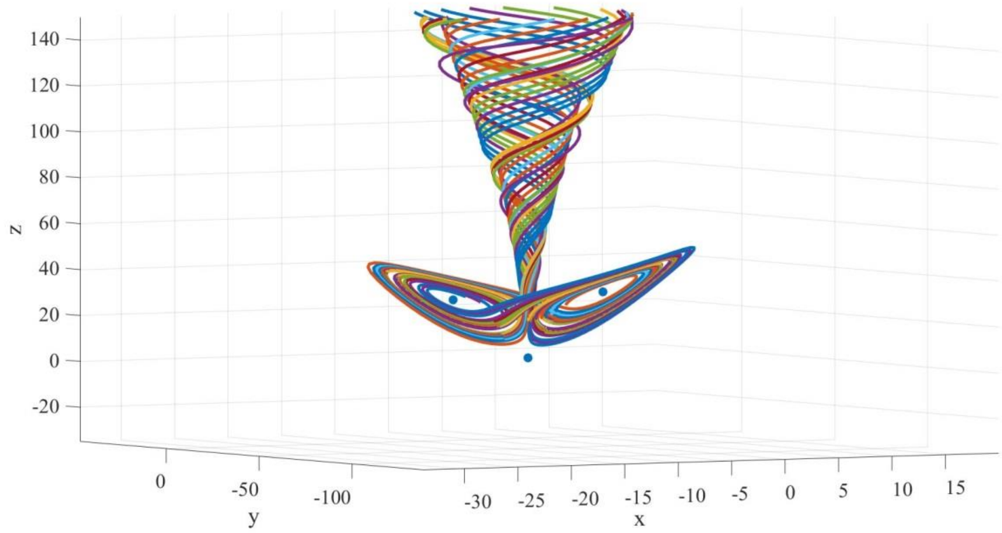
Узагальнена структура фазових потоків в околі третьої точки рівноваги в координатах лінеаризованої системи відповідає рис. 3, *б*.

Напрямок осі притягування e_1, заданої двома точками, для третьої точки рівноваги в системі координат x,y,z має значення близькі до ex=[11 5.99], ey=[7.194 9.792], ez=[25.97 28.02].

Загальна картина атрактора при різних початкових умовах, близьких до точок рівноваги, зображена на рис 6. Як видно з рис. 6, після завершення перехідного процесу фазові траєкторії потрапляють на хаотичний атрактор і залишаються на ньому.



а



б

Рис.7 Перехідний процес для атрактора Лоренца при початкових умовах далеких від області атрактора

На рис. 7, *а* представлено перехідний процес атрактора Лоренца при початкових умовах далеких від зони атрактора. Як видно з рис. 7, *а* взаємодія областей притягування у фазовому просторі показує досить цікаві результати. По мірі наближення до атрактора фазові траєкторії характеризуються обертанням навколо осі *Oz*, що обумовлено комплексними характеристичними коренями, та їх деформацією типу прогинання, обумовленою присутністю двох симетричних точок рівноваги 2 та 3. При наближенні до точки рівноваги 1 вихровий потік фазових траєкторій розділяється та переходить в область орбітального руху пари симетричних точок рівноваги 2 і 3 рис. 7, *б*. Після завершення перехідних процесів встановлюється рух по хаотичному атрактору рис. 7, *б*.

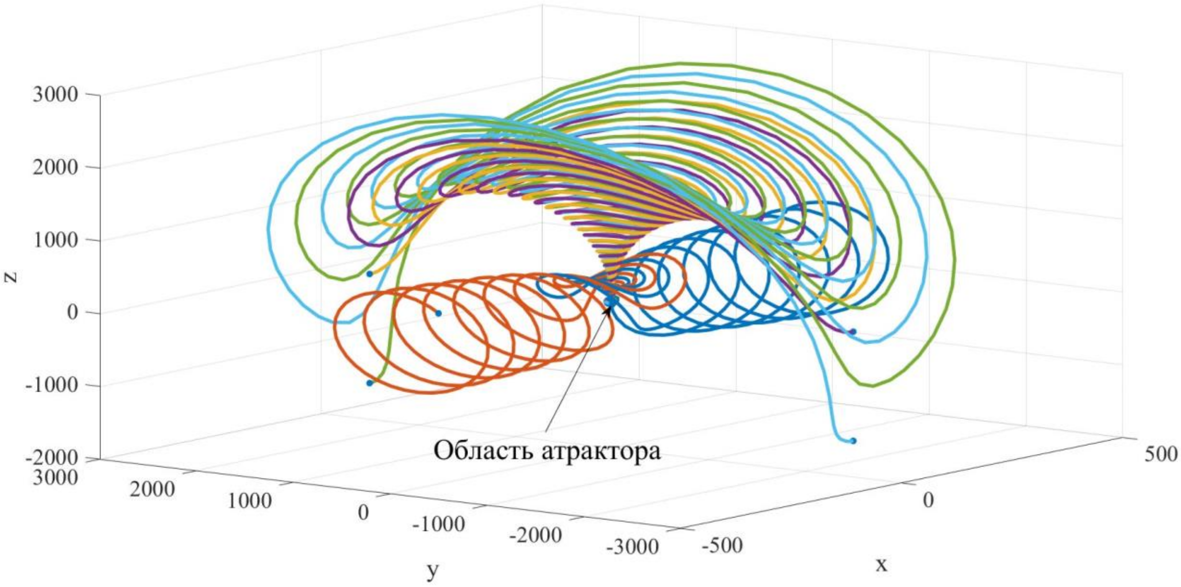


Рис.8 Перехідний процес для атрактора Лоренца при далеких від області атрактора початкових умовах

На рис. 8 наведено перехідний процес в системі при початкових умовах далеких від області атрактора. З рисунку видно, що характер перехідних процесів може суттєво змінюватись при зміні початкових умов.

Висновки та перспективи. У статті проведено дослідження геометричної структури фазових потоків нелінійної динамічної системи. Дослідження проводилось на прикладі системи Лоренца з використанням теорії стійкості Ляпунова для точок рівноваги. З використанням методів чисельного інтегрування розраховано та побудовано фазові портрети системи у тривимірному фазовому просторі при різних початкових умовах в околі кожної з визначених точок рівноваги. Досліджено перехідні процеси при початкових умовах далеких від області атрактора. Обчислення та побудова фазових портретів проводилась за допомогою системи MATLAB.

Отримані результати дозволили узагальнити структуру фазових потоків в координатах лінеаризованої системи та погодити їх положення з системою координат заданої нелінійної системи. Дослідження геометричної структури фазових потоків у фазовому просторі дають можливість виявити їх особливості та оптимізувати вибір початкових умов функціонування системи.

Вважаємо доцільним продовжувати дослідження геометричної структури фазових потоків нелінійних систем, які демонструють хаотичну динаміку, для подальшого використання в конкретних прикладних задачах.

Література

1. *Хусаїнов Д. Я., Шатирко А. В. Основи нелінійної динаміки: Посібник для студентів спеціальності "Прикладна математика"*. Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. 159 с.
2. *Kehui Sun, Xia Wang and J.C. Sprott.* (2010). Bifurcations of fractional-order diffusionless Lorenz system / *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Volume 20, Issue 04, pp. 1209–1219.
3. Слободян М.О., Таранчук А.А., Гавронський В.Є. Генерування широкосмугових хаотичних сигналів для прихованої передачі інформації в телекомунікаційних системах / *Вісник Хмельницького національного університету*. Технічні науки. 2020. Том 1, №4, (287). С 192-198. doi:10.31891/2307-5732-2020-287-4-192-198
4. *Пятін І.С., Лужанський В.І., Карпова Л.В.* Конфіденційна система зв'язку / *Вісник Хмельницького національного університету*. Технічні науки. 2015. № 1. С. 207–212.
5. *Гнітецька Т.В.* Дослідження можливості використання гідравлічного випромінювача для передачі складних хаотичних сигналів з фрактальною будовою атрактора для кодування інформації / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет, 2012. Т.52. Вип..4. С.134-139.
6. *Marius-F. Danca, N.V. Kuznetsov*. (2018). Matlab code for Lyapunov exponents of fractional order systems / *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 28, No. 05, 1850067. 14 p.
7. *Бобало Ю.Я., Галюк С.Д., Климаш М.М.,* Політанський Р.Л. Прикладне застосування теорії хаотичних систем у телекомунікаціях : монографія / *Technical sciences ISSN 2307-5732*. Нац. ун-т «Львів. політехніка». Львів : Коло, 2015. 178 с.

Referenses

1. Khusainov D. Ya., Shatyrko A. V. *Osnovy neliniinoi dynamiky*: Posibnyk dlia studentiv spetsialnosti "Prykladna matematyka" K.: Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr "Kyivskyi universytet", 2017. 159 s. {in Ukranian}.
2. *Kehui Sun, Xia Wang and J.C. Sprott.* (2010). Bifurcations of fractional-order diffusionless Lorenz system / *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Volume 20, Issue 04, pp. 1209 – 1219. {in English}

3. Slobodian M.O., Taranchuk A.A., Havronskyi V.Ie. (2020). Heneruvannia shyrokosmuhovykh khaotychnykh syhnaliv dlia prykhovanoi peredachi informatsii v telekomunikatsiinykh systemakh. *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu*. Tekhnichni nauky. Tom 1, №4, (287). S 192 – 198. doi:10.31891/2307-5732-2020-287-4-192-198 {in Ukranian}
4. Piatin I.S., Luzhanskyi V.I.,. Karpova L.V. Konfidentsiina systema zviazku / *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu*. Tekhnichni nauky. 2015. № 1. S. 207 – 212. {in Ukranian}
5. Hnitetska T.V. Doslidzhennia mozhlyvosti vykorystannia hidravlichnoho vyprominiuvacha dlia peredachi skladnykh khaotychnykh syhnaliv z fraktalnoiu budovoiu atraktora dlia koduvannia informatsii / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Pratsi/ Tavriiskyi derzhavnyi ahrotekhnolohichnyi universytet. 2012. T.52. Vyp.4. C.134 – 139. {in Ukranian}
6. *Marius-F. Danca, N.V. Kuznetsov*. (2018). Matlab code for Lyapunov exponents of fractional order systems / *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 28, No. 05, 1850067. 14 p. {in English}
7. *Iu.Ia.,Bobalo, S.D. Haliuk, M.M. Klymash, R.L.* (2015). Politanskyi Prykladne zastosuvannia teorii khaotychnykh system u telekomunikatsiiakh : monohrafiia / *Technical sciences ISSN 2307-5732*. Nats. un-t «Lviv. politekhnika». Lviv : Kolo, 2015. 178 c. {in Ukranian}

Ph.D., assoc. prof. **Tetjana Hnitetska**
gnitetsk@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9682-6488
Ph.D., assoc. prof. **Galyna Hnitetska**
gnitetsk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2864-3142
student **Bondarenko Yurii**
teraria.net@gmail.com
student **Hubar Oleksandra**
saashayy21@gmail.com
National Technical University of Ukraine Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute (Kyiv, Ukraine)

STUDY OF THE GEOMETRIC STRUCTURE OF PHASE FLOWS OF A DYNAMIC SYSTEM WITH CHAOTIC BEHAVIOR

The article examines the geometric structure of phase flows of a dynamic system, the mathematical model of which is represented by a system of nonlinear differential equations. The research was conducted on the example of the system of Lorentz equations using the Lyapunov stability theory for the equilibrium points of the system and numerical integration using the MATLAB system. At the first stage of research, the coordinates of the three equilibrium points were found by solving the system of nonlinear equations with zero values of the derivatives.

The use of linearization at the equilibrium points made it possible to make a qualitative assessment of the processes occurring in the nonlinear system. Based on the roots of the characteristic equations of the matrix of coefficients of the linearized system, the local directions of compression and expansion of the phase volume in the phase space of the system near each of the found equilibrium points are determined. Numerical integration methods were used to construct phase curves in the three-dimensional phase space of the system under different initial conditions near each of the equilibrium points, which makes it possible to analyze the phase portraits, isolate the generalized structure of phase flows in the coordinates of the linearized system, and determine their position in accordance with the coordinate system of the nonlinear system. Constructed phase portraits in the three-dimensional phase space of a nonlinear system under different initial conditions. The considered transient processes make it possible to evaluate the influence of equilibrium points and a chaotic attractor on the trajectory of phase curves. The results of the study of the geometric structure of the phase flows of the system in the deterministic chaos regime provide space for optimizing the selection of the initial conditions of the system's functioning.

The study of the phase space of systems with chaotic behavior will make it possible to more effectively use the properties of deterministic chaos, in particular the noise-like properties of output signals, in applied problems.

Keywords: dynamic systems; chaotic dynamics; attractor; phase space; fractal geometry.