

Печук В.Д.

pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
Київський національний університет будівництва та архітектури
д.ф.-м.н., проф. **Краснопольська Т.С.**

krasnopolska1005@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6197-092X

Інститут гідромеханіки НАНУ

к.ф.-м.н. **Печук Є.Д.**

evgdmp@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1028-1390

Інститут гідромеханіки НАНУ

УНІВЕРСАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ОЦІНКИ СТАРШОГО ПОКАЗНИКА ЛЯПУНОВА В ДИСИПАТИВНІЙ ДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

При дослідженні динамічних систем часто виникає необхідність в кількісній оцінці ступеня хаотизації динамічного режиму, що реалізується в системі. На практиці для цього використовують експоненту Ляпунова – старший показник Ляпунова, що обчислюється чисельно за допомогою відомого алгоритму Беннеттіна. Наявність додатного старшого показника Ляпунова в системі вказує на швидке розбігання двох близьких траєкторій з плином часу та на чутливість до початкових значень. Алгоритм Беннеттіна добре працює і був використаний розробниками лише для консервативних систем. В наших попередніх роботах цей алгоритм було модифіковано для дисипативних систем. Однак у випадку коли геометрія атрактора системи є складною, з великою кількістю збігань та розбігань траєкторій, алгоритм Беннеттіна дає некоректно малі значення показника. Це насамперед пов'язано з тим, що проміжки зближення траєкторій враховуються алгоритмом зі знаком мінус, що зменшує остаточний результат обчислення і призводить до значної похибки такої оцінки. За визначенням, хаотичний аттрактор, як і взагалі будь-який аттрактор в дисипативній динамічній системі, є обмеженою множиною точок у фазовому просторі динамічної системи, що свідчить про обов'язкове зближення зображуючих точок на ньому. В даній роботі запропоновано модифікацію алгоритму Беннеттіна, що дозволяє враховувати описану вище особливість атракторів дисипативних динамічних систем. Новий алгоритм дозволяє збільшити точність розрахунків та розширити область застосування зазначеного методу. Цей універсальний алгоритм застосовано до математичної моделі, що описує генерацію хрестоподібних хвиль в прямокутному басейні скінченних розмірів. Показано переваги алгоритму порівняно з класичним алгоритмом Беннеттіна.

Ключові слова: Експонента Ляпунова, Алгоритм Беннеттіна, Алгоритм Вольфа, Початкові умови, Хаотичне моделювання.

Постановка проблеми. На практиці, для знаходження старшого показника Ляпунова використовують алгоритм Беннеттіна 1976 року. Запропонований для консервативної системи Hénon-Heiles [1], цей метод обчислення добре працює і підходить, в першу чергу, для консервативних систем. У своїй роботі 1980 року ці самі автори використовували свої результати для гладких гамільтонових динамічних систем [2]. Зважаючи на відсутність альтернатив, його часто застосовують і для дисипативних систем, проте в цьому випадку неминуче виникають помилки, пов'язані з тим, що розмірність атратора такої системи нижча за розмірність фазового простору. А застосування класичного алгоритму Беннеттіна у разі існування в системі кількох атракторів і, тим більше, прихованих атракторів взагалі кажучи, некоректно.

При дослідженні вихідних сигналів динамічних систем часто використовують запропонований Вольфом в 1985 році метод обчислення показника Ляпунова по хаотичній часовій реалізації [3]. В його основі лежить класичний алгоритм Беннеттіна та теорема Такенса [7]. Проблемою всіх існуючих алгоритмів є той факт, що на хаотичному атракторі траєкторії не лише збігаються, але й розбігаються з плином часу. Це очевидно впливає з обмеженості атратора у фазовому просторі динамічної системи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченню хаотичних розв'язків різного типу динамічних систем присвячені роботи [1-11]. Але запропоновані методи знаходження старшого показника Ляпунова мають певні обмеження на динамічну систему. Наприклад, в роботах [1] та [2] запропоновано алгоритм лише для консервативної системи. В роботі [3] запропоновано алгоритм для обчислення старшого показника Ляпунова по вихідному сигналу, але лише для випадку хаотичного сигналу. Модифікацію алгоритму Беннеттіна для випадку консервативних систем та Вольфа для будь-якого типу вихідного сигналу запропоновано нами в роботі [6].

Ціль статті. В нашій попередній роботі [6] показано, що для коректної роботи алгоритму Беннеттіна у випадку дисипативної динамічної системи потрібна саме точка на атракторі досліджуваної системи, а не близька до атратора [1-5, 9]. В іншому випадку отриманий результат характеризуватиме не поведінку траєкторії на атракторі, а поблизу нього, що є джерелом помилок при обчисленні СПЛ для неконсервативних систем. Не менш серйозною проблемою є також той факт, що на хаотичному атракторі траєкторії не лише збігаються, але й розбігаються з плином часу. Це очевидно впливає з обмеженості атратора у фазовому просторі динамічної системи. Дійсно, відстань між точками на атракторі не може бути більшою за геометричні розміри самого атратора, тому вона обов'язково має змінюватись – як збільшуватися так и зменшуватися.

Яскравим прикладом цього є відомий метелик Лоренца [11]. Метою даної роботи є побудова універсального алгоритму, що враховуватиме цю особливість хаотичних атракторів. Також даний алгоритм не залежатиме від форми, розміру та структури самого атрактора та їх кількості в фазовому просторі системи.

Основна частина

1. Універсальний алгоритм оцінки старшого показника Ляпунова.

Спочатку розглянемо ситуацію, що ілюструє проблеми, які виникають при дослідженні хаотичної динаміки. Нехай для динамічної системи, що задана аналітично системою диференціальних рівнянь у формі Коші з неперервними правими частинами, що задовольняють умовам Ліпшиця по всім аргументам, окрім часу t

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, \mathbb{R}^n – фазовий простір системи, потрібно оцінити старший показник Ляпунова (СПЛ). В результаті застосування чисельного методу знайдено ненульовий розв'язок для початкових умов $x(t_0) = x_0$, а після перехідного процесу виявлено деякий хаотичний атрактор складної форми та структури. На цьому атракторі відстежимо поведінку двох близьких траєкторій та відстань між ними. Для цього позначимо через x_i точку в фазовому просторі динамічної системи, що відповідає радіус-вектору стану $x(t_i)$.

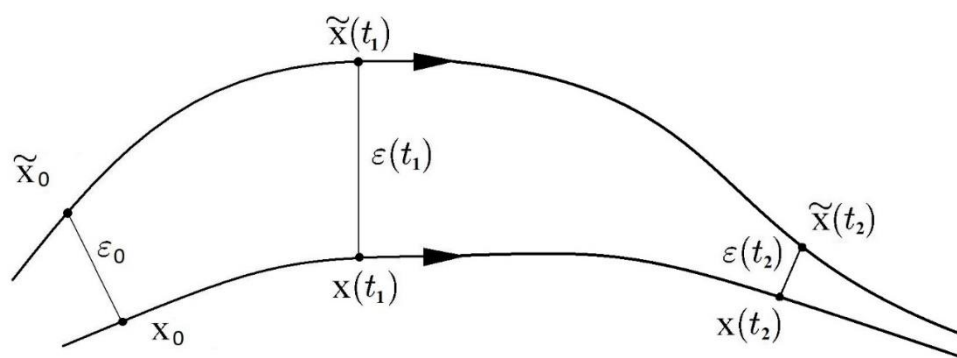


Рис. 1. Збігання та розбігання двох близьких точок на атракторі динамічної системи

Виберемо довільну точку x_0 на атракторі динамічної системи (рис. 1.) в деякий початковий момент часу t_0 . Задавши деяке мале ε_0 , виберемо ще одну точку \tilde{x}_0 на атракторі, що задовольняє умові

$$|\tilde{x}_0 - x_0| = \varepsilon_0. \quad (2)$$

З плином часу траєкторії розбігаються та збігаються. В залежності від проміжку часу Δt_1 точки x_0 та \tilde{x}_0 еволюціонують в точки $x(t_1)$ та $\tilde{x}(t_1)$ відповідно. Відстань між ними позначимо через $\varepsilon(t_1)$, де $t_1 = t_0 + \Delta t_1$. Значення $\varepsilon(t_1)$ залежить від початкового положення точок x_0 та \tilde{x}_0 , а також проміжку часу Δt_1 і динамічної системи в цілому. Причому в нашому випадку $\varepsilon(t_1) > \varepsilon_0$. Наближено, можна вважати, що

$$\varepsilon(t_1) \approx \varepsilon_0 e^{\lambda \Delta t_1},$$

де λ є оцінкою старшого показника Ляпунова. Отримане значення буде в даному конкретному випадку додатним. Таким чином, параметром, що характеризує динаміку точки, яку зображуємо на атракторі, буде λ_1 , в першому наближенні, згідно [1, 2]

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\Delta t_1} \ln \frac{\varepsilon(t_1)}{\varepsilon_0} > 0.$$

Якщо тепер провести аналогічні розрахунки для проміжку часу $t_2 = t_1 + \Delta t_2$, то отримаємо, що точки x_0 та \tilde{x}_0 еволюціонують в точки $x(t_2)$ та $\tilde{x}(t_2)$ відповідно. Відстань між ними $\varepsilon(t_2) < \varepsilon(t_1)$, тому отримуємо наступний результат:

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\Delta t_2} \ln \frac{\varepsilon(t_2)}{\varepsilon(t_1)} < 0.$$

Таким чином, в даній ситуації, після усереднення буде отримано занижену оцінку СПЛ

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \approx 0.$$

Зрозуміло, що отримане на другому етапі значення λ_2 для оцінки старшого показника Ляпунова хаотичного атрактора було некоректне. На практиці така ситуація призводить до того, що при обчисленнях за класичними алгоритмами Бенеттіна чи Вольфа, результати для хаосу можуть бути дуже заниженими та неточними. На деяких проміжках часу значення будуть додатні, на деяких від'ємні, а середнє значення буде близьке до нуля, що не дозволить відрізнити регулярні та хаотичні режими (рис. 2.). Шляхом для підвищення точності таких розрахунків є додавання до алгоритму процедур аналізу отриманих значень на кожному з етапів. Тут слід зазначити, що експоненційне розходження траєкторій еквівалентне експоненційному зближенню в зворотному часі. А згідно з ергодичною теоремою В. І. Оселедця [14], експоненційне розходження двох випадково обраних точок на атракторі з одиничною ймовірністю характеризує старший показник Ляпунова. Тому, для розглянутого вище прикладу коректною оцінкою СПЛ має бути наступне значення:

$$\lambda = \frac{|\lambda_1| + |\lambda_2|}{2} > 0.$$

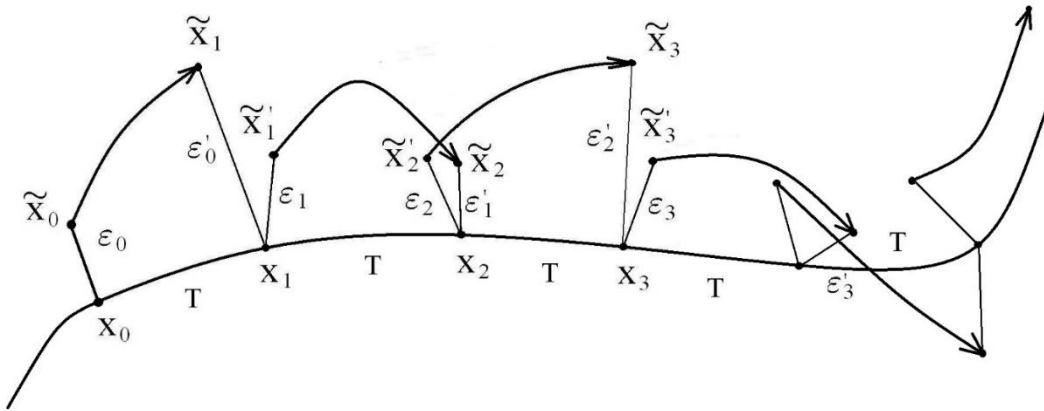


Рис. 2. До універсального алгоритму обчислення старшого показника Ляпунова

А універсальний алгоритм може виглядати наступним чином.

Крок 1. Після перехідного процесу обираємо точки x_0 та \tilde{x}_0 на розв'язку системи (1) для фіксованих початкових умов так, щоб рівність (2) виконувалася для деякого малого $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$. Рухаючись по траєкторії розв'язку далі, через час T отримуємо відповідно точки x_1 та \tilde{x}_1 на ньому. Знаходимо перше значення

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{x}_1 - x_1|}{\varepsilon_0}.$$

Крок 2. Фіксуємо одну з отриманих точок, наприклад x_1 , а \tilde{x}_1 знаходимо розв'язуючи систему далі від точки \tilde{x}_1 до виконання умови $|\tilde{x}_1' - x_1| = \varepsilon_1 \leq \varepsilon$. Таким чином і початок і кінець вектора збурення лежать на атракторі. Через час T отримуємо наступні значення x_2 та \tilde{x}_2 на атракторі. Знаходимо наступне значення

$$\lambda_2 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{x}_2 - x_2|}{\varepsilon_1}.$$

Крок 3. Повторюючи цю процедуру M разів, знаходимо СПЛ, як середнє арифметичне значень, отриманих на кожному етапі:

$$\lambda \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |\lambda_k|.$$

Отримане число, за ергодичною теоремою В. І. Оселедця [14], з імовірністю одиниця характеризуватиме старший показник Ляпунова атрактора. Зрозуміло, що отримане значення залежатиме як від вибору величини ε , так

і довжини проміжку часу T . Як було зазначено вище величину ε потрібно узгоджувати з геометричним розміром атрактора. Довжина T має бути значно меншою за час умовного «повного оберту» зображуючої точки по атрактору.

2. Хрестоподібні хвилі у прямокутному каналі скінченних розмірів

Занурені в рідину тіла, що коливаються, створюють навколо себе на її вільній поверхні хвилі різного походження. Деякі з такого роду хвиль досі не отримали повного пояснення механізму свого збудження. Це, насамперед, так звані хрестоподібні хвилі, які вперше були віднайдені та описані Фарадеєм в його відомій роботі 1831 р. У роботі [5] побудовано нову математичну модель збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини та запропоновано методикау отримання рішення на основі застосування методу суперпозиції Ляме, яке описує безпосередню перекачку енергії від хвилепродуктора в хрестоподібні хвилі. Вперше отримано аналітичний розв'язок для хрестоподібних хвиль у скінченних по розмірам прямокутних басейнах. Цей розв'язок суттєво відрізняється від існуючого та широко використововуваного розв'язку, отриманого Хавелоком для хвиль у напівнескінченному прямокутному басейні. Отримана в результаті система, приведена до форми Коші, має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{l} &= p; & \dot{p} &= \\ -\frac{l+ap+1.4003lp^2+4.78Al \sin(2\tau-\beta\tau)-2.99Ap \cos(2\tau-\beta\tau)}{1+1.0504l^2}; & & & \\ \dot{\tau} &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

У цій системі рівнянь було виявлено регулярну (рис. 3.) та хаотичну (рис. 4.) динаміку [5]. До цих динамічних режимів було застосовано класичний алгоритм Бенеттіна та універсальний алгоритм. Результати розрахунку наведено на Рис.5. За класичним алгоритмом Бенеттіна отримано від'ємні значення показника для стійких граничних циклів (випадки **1** та **2**). Універсальний алгоритм демонструє додатні значення, менші по абсолютній величині, що вказує на більшу точність оцінки. Причому видно, що у випадку **1** значення показника менше за отримане у випадку **2**, що пояснюється більшими розмірами граничного циклу у фазовому просторі. Для хаотичних режимів всіма методами отримано додатні значення показників. Найбільше значення отримано універсальним алгоритмом у випадку **3**. Універсальний алгоритм демонструє додатні значення, більші по абсолютній величині, що знову вказує на більшу точність оцінки. Таким чином, в даній моделі використання універсального алгоритму дозволяє більш точно розрізняти та характеризувати поведінку фазової траєкторії на атракторі, як у випадку граничного циклу, так і для хаосу.

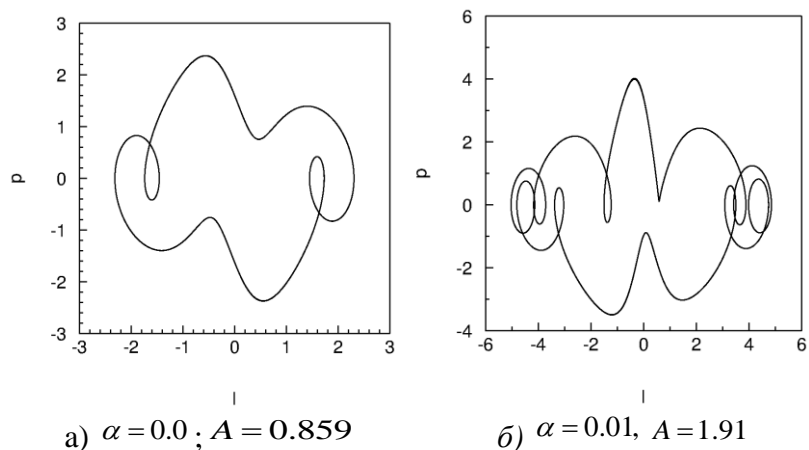


Рис. 3. Регулярні режими в системі, що описує збудження хрестоподібних хвиль у скінченних по розмірам прямокутних басейнах [5]

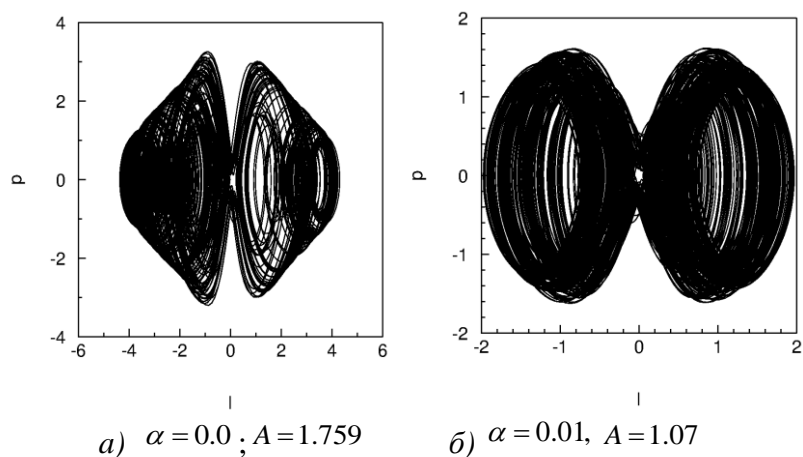


Рис. 4. Хаотичні режими в системі, що описує збудження хрестоподібних хвиль у скінченних по розмірам прямокутних басейнах [5]

| | 1 Регулярний режим $\alpha = 0.0$ $A = 0.859$ | 2 Регулярний режим $\alpha = 0.01,$ $A = 1.91$ | 3 Хаотичний режим $\alpha = 0.0$ $A = 1.759$ | 4 Хаотичний режим $\alpha = 0.01,$ $A = 1.07$ |
|---|--|---|---|--|
| Алгоритм Бенеттіна $\varepsilon = 0.05$ | -0.123058 | -0.276340 | 0,539841 | 0,921434 |
| Універсальний алгоритм $\varepsilon = 0.05$ | 0,078490 | 0,179645 | 2,118874 | 1,687826 |

Рис. 5. Значення старшого показника Ляпунова, отримані різними методами, для регулярних та хаотичних режимів в моделі хрестоподібних хвиль

Висновки та перспективи. Числовий розрахунок старшого показника Ляпунова на основі класичного алгоритму Бенеттіна не враховує збігання та розбігання траєкторій на хаотичному атракторі. В статті

запропоновано універсальний алгоритм, точність якого не залежить від цієї та інших особливостей хаотичних атракторів, таких як форма, розмір та структура, їх кількість та розташування у фазовому просторі. Новий алгоритм дозволяє збільшити точність розрахунків та розширити область застосування зазначеного методу. Застосування запропонованої модифікації для моделі збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини дозволяє більш точно ідентифікувати динамічний режим.

Література

1. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev.*, 1976. A4. P. 2338 – 2342.
2. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. *Meccanica*, 1980. P. 9 – 30.
3. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica 16 D*, 1985. P. 285 – 317.
4. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1980. P. 366 – 381.
5. Kuznetsov S. P. Dynamic chaos. M.: Fizmatlit, 2001. 320p.
6. Pechuk V. D., Krasnopol'skaya T. S., Pechuk E.D. Maximum Lyapunov Exponent Calculation. In: Skiadas, C.H., Dimotikalis, Y. (eds) *14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. CHAOS 2021. Springer Proceedings in Complexity. Springer Nature Switzerland AG 2022*, 2022. P. 327-335.
7. Laskar J., Froeschle K., Celletti A. Measuring chaos using the numerical analysis of fundamental frequencies, Appendix to the standard map. Translation from English - A.G. Arzamastseva, Moscow : Mir. 1992. 345p.
8. Golovko V. A. Neural network methods for processing chaotic processes. *Scientific session of MEPhI*, Moscow: MEPhI, 2005. P. 43 – 91.
9. Moon F. Chaotic oscillations, Translation from English. Yu. A. Danilova and A.M.Shukurova, Moscow : Mir, 1990. 356p.
10. Berger P., Pomo I., Vidal K. Order in chaos. On the deterministic approach to turbulence, Translated from French. Yu.A. Danilova, Moscow : Mir, 1991. 432p.
11. Crutchfield D. P. Chaos. *In the world of science*, 1987. Vol. 2. P. 18 – 28.
12. Oseledets V. I., Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic exponents of dynamical systems. *Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 1968. Vol. 19. P. 179 – 210.
13. Krasnopol'skaya T. S., Pechuk E.D. Peculiarities of Parametric Resonances in Cross-waves, *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) 3*, 2016. P. 377-385.

References

1. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev.*, 1976. A4. P. 2338 – 2342. *{in English}*
2. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. *Meccanica*, 1980. P. 9 – 30. *{in English}*
3. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica 16 D*, 1985. P. 285 – 317. *{in English}*
4. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin*, 1980, P. 366 – 381. *{in English}*
5. Kuznetsov S. P. Dynamic chaos. Moscow : Fizmatlit, 2001. 320p. *{in Russian}*
6. Pechuk V. D., Krasnopolskaya T. S., Pechuk E.D. Maximum Lyapunov Exponent Calculation. In: Skiadas, C.H., Dimotikalis, Y. (eds) *14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. CHAOS 2021. Springer Proceedings in Complexity. Springer Nature Switzerland AG 2022*, 2022. P. 327-335. *{in English}*
7. Laskar J., Froscchle K., Celletti A. Measuring chaos using the numerical analysis of fundamental frequencies, Appendix to the standard map. Translation from English - A.G. Arzamastseva, Moscow : Mir, 1992. 345p. *{in Russian}*
8. Golovko V. A. Neural network methods for processing chaotic processes. *Scientific session of MEPhI , Moscow: MEPhI*, 2005. P. 43 – 91. *{in Russian}*
9. Moon F. Chaotic oscillations, Translation from English. Yu. A. Danilova and A.M.Shukurova, M.: Mir, 1990, 356p. *{in Russian}*
10. Berger P., Pomo I., Vidal K. Order in chaos. On the deterministic approach to turbulence, Translated from French. Yu.A. Danilova, M.: Mir, 1991, 432p. *{in Russian}*
11. Crutchfield D. P. Chaos. *In the world of science*, 1987. Vol. 2. P. 18 – 28. *{in English}*
12. Oseledets V. I., Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic exponents of dynamical systems. *Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 1968. Vol. 19. P. 179 – 210. *{in Russian}*
13. Krasnopolskaya T. S., Pechuk E.D. Peculiarities of Parametric Resonances in Cross-waves, *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) 3*, 2016. P. 377-385. *{in English}*

Vasiliy Pechuk

pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA)

Prof. Tatyana Krasnopolskaya
krasnopolska1005@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6197-092X
Institute of Hydromechanics NASU

A UNIVERSAL ALGORITHM FOR ESTIMATING THE LYAPUNOV EXPONENT IN A DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEM

When studying dynamic systems, it often becomes necessary to quantify the degree of chaotization of the dynamic regime. The presence of a positive Lyapunov exponent in the system indicates a rapid divergence over time of any two close trajectories and sensitivity to the values of the initial conditions. At the same time, the chaotic attractor geometry can be complex, contain both divergent and convergent trajectories. For such attractors, the Benettin algorithm will give an underestimated small value. This is due to the fact that the section of convergence of the trajectories is included in the average value with a minus sign. But by definition, a strange attractor, like any attractor of a dissipative dynamical system, is limited in phase space, so the distance between the representing points on it will necessarily be either large or small. A modification of the Benettin algorithm is proposed, which makes it possible to take into account both the divergence and the convergence of the trajectory on the attractor of a dissipative dynamical system. The method is applied to a strange attractor in the cross-waves hydrodynamic system.

Estimation of the Lyapunov exponent based on the classical Benettin algorithm does not take into account the convergence and divergence of trajectories on a chaotic attractor. The article proposes a universal algorithm, the accuracy of which does not depend on this and other features of chaotic attractors, such as their shape, size, and structure, as well as their number and location in phase space. The new algorithm makes it possible to increase the accuracy of calculations and expand the field of application of the method. The application of the proposed modification to the model of excitation of cross-shaped waves on the free surface of a liquid in a rectangular channel of finite length and depth made it possible to more accurately identify the dynamic regime.

Key words: Lyapunov exponent, Algorithm of Benettin, Algorithm of Wolf, Initial conditions, Chaotic modeling.