

КОНСТРУЮВАННЯ ВИТКА ВІДКРИТОГО ГЕЛІКОЇДА З ПЛОСКОЇ ЗАГОТОВКИ

В техніці дуже поширеною гвинтовою поверхнею є прямий закритий гелікоїд, відомий під назвою шнек. Його утворення відбувається гвинтовим рухом горизонтального відрізка вгору таким чином, що один його кінець перетинає вертикальну пряму – вісь шнека. Для відкритого гелікоїда утворення його поверхні подібне. Відмінність полягає в тому, що відрізок є мимобіжним по відношенню до осі і знаходиться на сталій відстані від неї. Чим менша ця відстань, тим менша різниця між поверхнями. В обох випадках прямолінійні твірні перпендикулярні до осі. Із диференціальної геометрії відомо, що всяку гвинтову поверхню можна зігнути на поверхню обертаня. Саме цей факт взято за основу розрахунку плоскої заготовки для виготовлення витка відкритого гелікоїда. Його поверхня є нерозгортною, тому заготовка повинна бути знайдена таким чином, щоб звести до мінімуму пластичні деформації при формуванні поверхні із плоскої заготовки.

В статті наведено параметричні рівняння, що описують неперервне згинання витка відкритого гелікоїда у відсік однопорожнинного гіперболоїда обертаня. Неперервне згинання можна уявити як поступову деформацію витка гелікоїда зменшенням його кроку. Поверхня деформується, залишаючись гвинтовою і в кінцевому підсумку перетворюється у гіперболоїд. Його меридіаном є відповідна ділянка гіперболи. Відсік гіперболоїда пропонується апроксимувати зрізаним конусом. Ця апроксимація буде більш точною на ділянці гіперболи, на якій вона асимптотично наближається до відрізка прямої. Після вибору конуса визначаються його розміри і будується його точна розгортка, оскільки конус є розгортною поверхнею. Побудована розгортка у вигляді плоского кільця із вирізаним сектором і буде плоскою заготовкою для формування із неї витка відкритого гелікоїда.

Найбільш точно отримати поверхню витка відкритого гелікоїда можна за допомогою штампівки отриманої заготовки. Для малосерійного виготовлення гвинтової поверхні відкритого гелікоїда можна плоскі кільця зварити між собою і розтягувати вздовж вала з одночасним скручуванням навколо його осі. Точність отриманої поверхні залежатиме від точності апроксимації відсіку гіперболоїда обертаня зрізаним конусом.

Ключові слова: гелікоїд; плоска заготовка; деформація; згинання; параметричні рівняння.

Постановка проблеми. Гвинтові поверхні дуже поширені в різноманітних пристроях і механізмах. Вони широко використовуються у гвинтових конвеєрах для транспортування різних сипучих матеріалів, їх змішування, подрібнення, дозування і виконання інших технологічних операцій. У роботі [1] розглянуто використання гвинтової поверхні для проектування робочого органу для поверхневого обробітку ґрунту. Агрегат з такими робочими органами може бути альтернативою дисковим ґрунтообробним знаряддям. Тому велика увага приділяється виготовленню витків гвинтових поверхонь. В працях [2, 3] розглянуто існуючі технології їх отримання із прямолінійної смуги шляхом її навивання, шляхом деформації плоских заготовок у вигляді кільця у готовий виток. Теоретичне згинання поверхні відкритого гелікоїда з точки зору диференціальної геометрії розглянуто в праці [4].

Ціль статті. Форма поверхні прямого відкритого гелікоїда дуже подібна до форми прямого закритого гелікоїда, відомого в техніці під назвою шнек. Проекції одного витка відкритого гелікоїда із циліндричним валом зображено на рис. 1. Відмінність полягає в тому, що прямолінійні твірні поверхні відкритого гелікоїда не перетинають його осі, як у поверхні шнека, а проходять біля неї на певній відстані a . На горизонтальній проекції ці твірні є дотичними до кола радіуса a (рис. 1, б). Всі три кола (радіусів a , r – внутрішньої крайки поверхні, тобто вала, R – зовнішньої крайки поверхні) є проекціями гвинтових ліній.

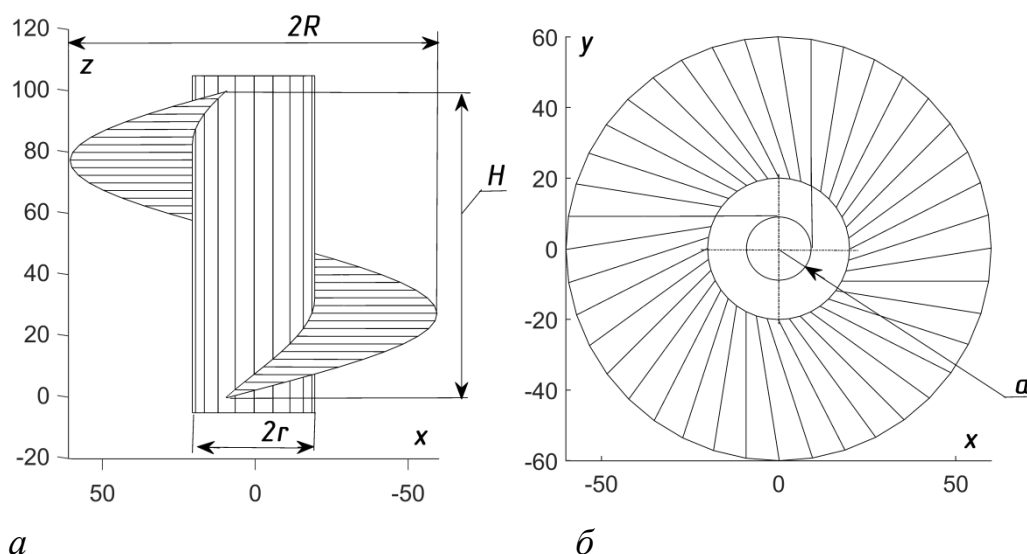


Рис. 1. Проекції витка прямого відкритого гелікоїда:
а) фронтальна проекція; б) горизонтальна проекція

Для відкритого гелікоїда, на відміну від закритого, вал має обмеження по мінімальному значенню діаметра – його радіус не може бути меншим значення a , оскільки там поверхні не існує (рис. 1, б).

Поверхню витка як закритого, так і відкритого гелікоїдів виготовляють із листового матеріалу. Оскільки поверхні є нерозгортними, то плоска заготовка для деформації її у поверхню є наближеною. Для її побудови для закритого гелікоїда, як дуже поширеної поверхні у техніці, існує довідкова література. Для закритого гелікоїда такі дані відсутні, тому побудову наближеної розгортки будемо здійснювати, спираючись на відомості із диференціальної геометрії, а саме на той факт, що будь-яку гвинтову поверхню можна зігнути в поверхню обертання [5]. Отже, виток відкритого гелікоїда потрібно зігнути у відповідний відсік поверхні обертання, який можна буде апроксимувати конусом. Для конуса, як для розгортної поверхні, можна побудувати точну розгортку, яка для витка відкритого гелікоїда буде наближеною.

Неперервне згинання витка відкритого гелікоїда у однопорожнинний гіперболоїд обертання. Під згинанням поверхні в диференціальній геометрії розуміють таку її деформацію, при якій не змінюються довжини ліній на поверхні і кути між ними. В праці [4] наведено параметричні рівняння неперервного згинання косоного гелікоїда в однопорожнинний гіперболоїд обертання. Під неперервним згинанням розуміється таке згинання від початкового положення до кінцевого, коли між ними можна побудувати скільки завгодно проміжних. Одним із проміжних положень є прямий відкритий гелікоїд. Нижче наведені параметричні рівняння неперервного згинання поверхні із праці [4] для випадку, коли початковим станом є поверхня прямого відкритого гелікоїда, а кінцевим – поверхня однопорожниного гіперболоїда обертання:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{a \cos p\gamma \cos(p\gamma - \gamma)}{\cos \gamma} \cos\left(\frac{\cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} s\right) - \\
 &\quad - u \cos(p\gamma - \gamma) \sin\left(\frac{\cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} s\right); \\
 Y &= \frac{a \cos p\gamma \cos(p\gamma - \gamma)}{\cos \gamma} \sin\left(\frac{\cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} s\right) + \\
 &\quad + u \cos(p\gamma - \gamma) \cos\left(\frac{\cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} s\right); \\
 Z &= s \sin p\gamma + u \sin(p\gamma - \gamma).
 \end{aligned} \tag{1}$$

В рівняннях (1) незалежними змінними є s – довжина дуги гвинтової лінії, розташованої на циліндрі діаметра a і u – довжина прямолінійної твірної поверхні, відлік якої починається від цієї гвинтової лінії. Дві інших величини сталі: γ – кут підйому зазначеної гвинтової лінії; p – параметр згинання, який може приймати значення в межах від 1 (початкове

положення поверхні) до 0 (кінцеве положення поверхні). Для вибору потрібного відсіку для згинання потрібно задати значення постійних та межі зміни незалежних змінних s і u . При $u=0$ рівняння (1) опишуть гвинтову лінію, яка в початковому положенні розташована на циліндрі радіуса a і яка є напрямною для утворення поверхні. Знайдемо межі зміни довжини дуги s . Щоб отримати один виток поверхні, точка на гвинтовій лінії повинна зробити один повний оберт, тобто 2π . Вираз у круглих дужках тригонометричних функцій $\frac{s \cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} = \alpha$ є значенням кута повороту.

Прирівнявши його до 2π , отримаємо:

$$s = \frac{2\pi a}{\cos \gamma} \quad (2)$$

Отже, s має змінюватися в межах $s=0 \dots 2\pi a / \cos \gamma$. Знайдемо значення сталої a . При повороті точки гвинтової лінії на кут 2π , що відповідає значенню дуги s (1), її координата Z повинна бути рівною кроку H . З останнього рівняння (1) при $u=0$ і $p=1$, що відповідає гвинтовій лінії до початку згинання, запишемо:

$$H = s \sin \gamma = \frac{2\pi a}{\cos \gamma} \sin \gamma, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{H \cos \gamma}{2\pi \sin \gamma} \quad (3)$$

Знайдемо межі зміни відстані u . При $u=0$ рівняння (1) описують напрямну гвинтову лінію на циліндрі радіуса a . При $u=\rho=const$, будуть описані інші гвинтові лінії, в тому числі і ті, що обмежують відсік, при $\rho=r$ і $\rho=R$ (рис. 1,а). Відстань ρ (тобто відстань від осі поверхні до точки на цій поверхні) можна знайти із виразу:

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 = \frac{\cos^2(p\gamma - \gamma)}{\cos^2 \gamma} (a^2 \cos^2 p\gamma + u^2 \cos^2 \gamma). \quad (4)$$

Розв'язавши рівняння (4) відносно u , ми зможемо знайти його значення для заданої величини ρ . Радіуси r і R , які обмежують відсік гелікоїда, ми задаємо у початковому положенні, тобто до згинання поверхні. Цьому положенню відповідає значення $p=1$. Це значення p підставимо в (4) і розв'яжемо відносно u :

$$u = \sqrt{\rho^2 - a^2}. \quad (5)$$

Кут γ є єдиною сталою величиною, яку можна вибрати із певного проміжку допустимих значень. Нехай вихідною поверхнею буде прямий відкритий гелікоїд із кроком $H=100$ і радіусами $r=20$ і $R=60$. Приймаємо $\gamma=\pi/3$. За формулою (3) знаходимо: $a=9,19$. Знаходимо довжину напрямної гвинтової лінії із виразу (2): $s=115,5$. Отже дуга s змінюється в межах $s=0 \dots 115,5$. Нарешті із формули (5) знаходимо межі зміни параметра u , почергово вставляючи у неї замість ρ радіуси r і R : $u=17,8 \dots 59,3$. За цими даними за допомогою рівнянь (1) було побудовано початкове ($p=1$), кінцеве ($p=0$) і деякі проміжні положення поверхні при її згинанні (рис. 2).

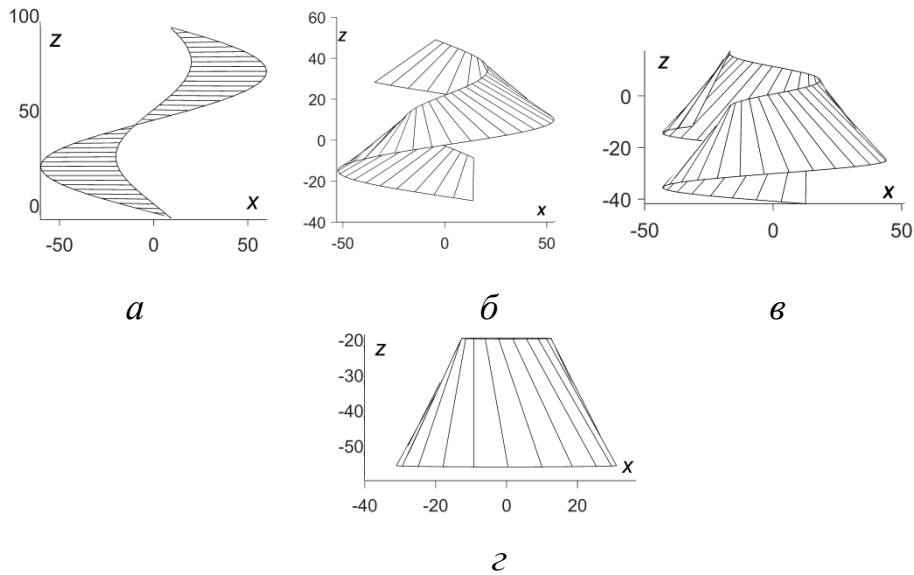


Рис. 2. Фронтальні проекції положень витка прямого відкритого гелікоїда при його згинанні в поверхню однопорожнинного гіперболоїда обертання: а) $p=1$; б) $p=0,5$; в) $p=0,25$; г) $p=0$

Із рис. 2 видно, що при згинанні прямолінійні твірні залишаються прямолінійними, тобто поверхня весь час залишається лінійчатою. Слід звернути увагу, що кут повороту точки по напрямній гвинтовій лінії змінюється від 0 до 2π , що відповідає одному витку гелікоїда. У цьому можна переконатися, якщо підставити вираз (2) у вираз кута α при $p=1$. Якщо при цьому прийняти $p=0$, що відповідає згинанню поверхні у однопорожнинний гіперболоїд обертання, то отримаємо $\alpha=2\pi/\cos\gamma$, що відповідає кутові $\alpha=4\pi$. Це означає, що отриманий гіперболоїд (рис. 2, г) є подвійним, тобто при його утворенні зроблено два повних оберти.

Побудова умовної розгортки витка прямого відкритого гелікоїда.

Як зазначалося раніше, поверхня відкритого гелікоїда є нерозгортною, тому мова може йти про наближену розгортку. Як видно із рис. 2, г, відсік гіперболоїда близький до поверхні зрізаного конуса. Замінімо відсік гіперболоїда зрізаним конусом і будемо шукати розгортку конуса, яку можна побудувати точно. Запишемо параметричні рівняння меридіана гіперболоїда, яким є гіпербола. Одне рівняння отримаємо із виразу (4) при $p=0$, а другим є останнє рівняння (1) теж при $p=0$. Отже параметричні рівняння меридіана гіперболоїда запишуться:

$$\rho_h = \sqrt{a^2 + u^2 \cos^2 \gamma}; \quad z_h = -u \sin \gamma. \quad (6)$$

На рис. 3, а побудовано частину меридіана, причому ділянку AB , яка побудована при знайдених межах зміни параметра u і відповідає відсіку гіперболоїда, виділено потовщеною лінією. Радіус верхньої основи відсіку

гіперболоїда, отриманому при мінімальному значенні змінної u , позначено через ρ_{hA} , а нижньої, при максимальному значенні u – через ρ_{hB} .

Дуга AB меридіана поверхні практично збігається із відрізком прямої, яку приймаємо за прямолінійну твірну конуса. Із рис. 3, а видно, що точність апроксимації гіперболоїда обертання конусом збільшується по мірі зростання радіуса ρ_{hA} , який відповідає радіусу вала r . Якщо взяти мінімальне значення радіуса вала $r=a=\rho_{hA}$, то точність апроксимації буде найгіршою.

Для побудови розгортки зрізаного конуса, який апроксимує отриману поверхню гіперболоїда обертання, необхідно мати його розміри. Для цього достатньо мати координати точок A і B (рис. 3, а). Відрізок AB приймаємо за прямолінійну твірну конуса. Координати точок A і B отримуємо із рівнянь (6), у яких для зручності перейдемо від змінної u до змінної ρ . Для цього врахуємо вирази (5) для u і (3) для a . Після їх підстановки у (6) отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho_h &= \frac{\cos\gamma}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 \rho^2 + H^2}; \\ z_h &= -\frac{\cos\gamma}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 \rho^2 \operatorname{tg}^2\gamma - H^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Вирази (7) дозволяють отримати координати точок A і B через задані конструктивні параметри гелікоїда. При підстановці в них $\rho=r$ отримаємо координати точки A , а при $\rho=R$ – координати точки B . Наприклад, для заданих параметрів $H=100$, $r=20$, $R=60$, $\gamma=\pi/3$ отримаємо:

- координати точки A : $\rho_{hA}=12,8$, $z_{hA}=15,4$;
- координати точки B : $\rho_{hB}=31,0$, $z_{hB}=51,4$.

За відомими координатами знаходимо довжину відрізка AB , тобто довжину прямолінійної твірної зрізаного конуса, яку позначимо через L : $AB=L=40,3$.

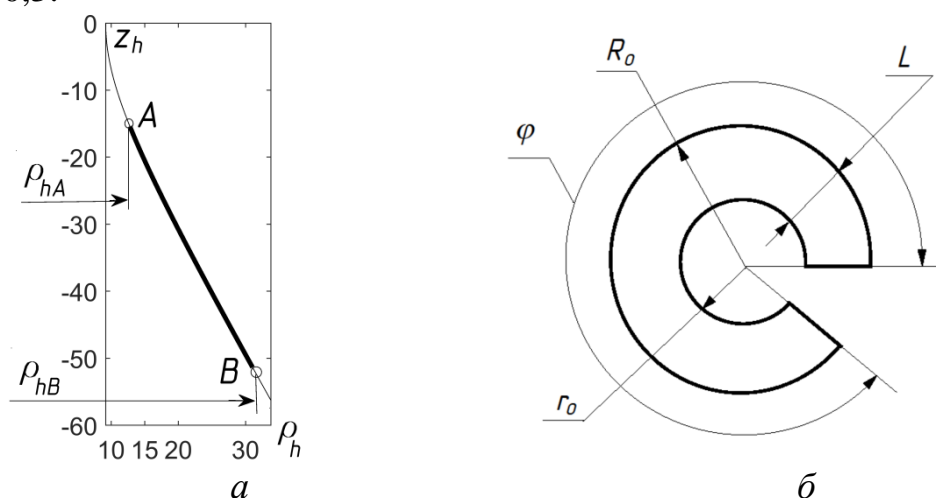


Рис. 3. Графічні ілюстрації до побудови розгортки зрізаного конуса, який апроксимує однопорожнинний гіперболоїд обертання:

- а) меридіан AB відсіку гіперболоїда обертання; б) розгортка зрізаного конуса, який апроксимує гіперболоїд

Відомо, що розгорткою зрізаного конуса є кільце із вирізаним сектором. Довжина прямолінійної твірної конуса L є різницею між радіусами R_0 зовнішнього і r_0 внутрішнього кіл (рис. 3, б). При побудові розгортки будемо виходити із того, що довжина дуги кола визначається добутком радіуса на величину центрального кута. Наприклад, довжина дуги внутрішнього кола радіуса r_0 запишеться, як добуток $\varphi \cdot r_0$ (рис. 3, б). З іншої сторони, на конусі ця дуга є подвійною довжиною кола радіуса ρ_{hA} , оскільки конус, відповідно до гіперболоїда, є подвійним. Відповідно, довжина дуги на подвійному конусі буде рівною $4\pi \cdot \rho_{hA}$. Аналогічно міркуємо відносно дуги зовнішнього кола, беручи до уваги, що його радіус R_0 рівний $R_0 = r_0 + L$. На основі цього запишемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi r_0 = 4\pi \rho_{hA}; \\ \varphi (r_0 + L) = 4\pi \rho_{hB}. \end{cases} \quad (8)$$

До системи (8) входить дві невідомі величини: кут φ і радіус r_0 . Розв'яжемо систему (8) відносно вказаних величин і отримаємо:

$$r_0 = \frac{L \rho_{hA}}{\rho_{hB} - \rho_{hA}}; \quad \varphi = \frac{4\pi}{L} (\rho_{hB} - \rho_{hA}). \quad (9)$$

Згідно виразам (9) знайдемо розміри плоскої заготовки для виготовлення витка гелікоїда (наближеної розгортки): $r_0 = 28,3$, $\varphi = 5,68$ (325°), $R_0 = r_0 + L = 68,6$.

На вибір величини кута γ існує обмеження. Згідно другого виразу (3) він не може бути рівним нулю, що і так зрозуміло із його фізичної суті, оскільки він є кутом підйому гвинтової лінії. Як раніше зазначалося, $a \leq r$ (рис. 1, б). При $a = r$ величина кута γ буде мінімальною. Щоб її знайти, замінимо у другому рівнянні (3) a на r і розв'яжемо відносно γ : $\gamma = \text{Arctg}(H/2\pi r)$. Для нашого випадку $\gamma = 38,5^\circ$. При цьому точка A (рис. 3, а) зміститься по кривій вгору і збігатиметься із точкою нуль, тобто при цьому дещо погіршується апроксимація конусом гіперболоїда обертання. При збільшенні кута γ зменшується радіус a , тобто відкритий гелікоїд прямує до закритого. Розміри заготовки при цьому змінюються тільки на початку і то не суттєво, а далі практично не міняються.

Висновки. Застосування теоретичного згинання поверхні прямого відкритого гелікоїда зменшенням його кроку дозволяє отримувати проміжні положення, закінчуючи кінцевим – однопорожниним гіперболоїдом обертання. Конструктивні розміри гелікоїда переходять у конструктивні розміри гіперболоїда. Це дає можливість замінити з певною точністю відсік гіперболоїда зрізаним конусом. Розгортка конуса буде наближеною розгорткою гіперболоїда, тому що він є нерозгортним. Оскільки при теоретичному згинанні довжини ліній, кути між лініями і площа відсіку не змінюються, то отримана розгортка буде плоскою заготовкою для виготовлення витка відкритого гелікоїда.

Література

1. Драган А.П. Обґрунтування конструкції робочого органа гвинтової секції комбінованого ґрунтообробного знаряддя. *Збірник наукових праць «Перспективні технології та прилади»*. 2021. №18. С. 66 – 73.
2. Гевко І. Б., Лещук Р. Я., Гудь В. З., Дмитрів О. Р., Дубиняк Т. С., Навроцька Т. Д., Круглик О. А. Гнучкі гвинтові конвеєри: проектування, технологія виготовлення, експериментальні дослідження. Монографія. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2019. 208 с.
3. Гевко І.Б. Синтез способів навивання спіралей шнеків. *Збірник наукових праць «Перспективні технології та прилади»*. 2018. Вип. 12. С. 39 – 47.
4. Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. (2021). Rolling of a single-cavity hyperboloid of rotation on a helicoid on which it bends. *Engineering Review*, 41 (3), 106–114. doi: <https://doi.org/10.30765/er.1563>
5. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. навч. посіб. Москва: 1949. 512 с.

References

1. Drahan A.P. Obgruntuvannia konstruktsii robochoho orhana hvyntovoi sektsii kombinovanoho gruntoobrobnoho znariaddia. *Zbirnyk naukovykh prats «Perspektyvni tekhnolohii ta prylady»*. 2021. №18. S. 66 – 73.
2. Hevko I. B., Leshchuk R. Ya., Hud V. Z., Dmytriv O. R., Dubyniak T. S., Navrotska T. D., Kruhlyk O. A. Hnuchki hvyntovi konveiery: proektuvannia, tekhnolohiia vyhotovlennia, eksperymentalni doslidzhennia. Monohrafiia. Ternopil: FOP Palianytsia V. A., 2019. 208 s.
3. Hevko I.B. Syntez sposobiv navyvannia spiralei shnekiv. *Zbirnyk naukovykh prats «Perspektyvni tekhnolohii ta prylady»*. 2018. Vyp. 12. S. 39 – 47.
4. Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. (2021). Rolling of a single-cavity hyperboloid of rotation on a helicoid on which it bends. *Engineering Review*, 41 (3), 106–114. doi: <https://doi.org/10.30765/er.1563>
5. Vygodsky M.Ya. Differential geometry. navch. pos_b. Moscow: 1949. 512 p.

Postgraduate Student **Vyacheslav Hropost**,
hropost97@ukr.net ORCID 0000-0001-9363-3955
Ph. D., assoc. prof **Tetiana Kresan**
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

CONSTRUCTION OF AN OPEN HELICOID COIL FROM A FLAT BILLET

In technology, a very common helical surface is a straight closed helicoid, known as a screw. Its formation takes place by the spiral movement of the horizontal segment upwards in such a way that one of its ends crosses a vertical straight line - the axis of the auger. For an open helicoid, the formation of its surface is similar. The difference is that the segment is transient in relation to the axis and is at a constant distance from it. The smaller this distance, the smaller the difference between the surfaces. In both cases, rectilinear generators are perpendicular to the axis. It is known from differential geometry that any helical surface can be bent into a surface of revolution. It is this fact that is taken as the basis for the calculation of a flat blank for the manufacture of an open helicoid coil. Its surface is non-expanded, so the workpiece must be found in such a way as to minimize plastic deformations when forming the surface from a flat workpiece.

The article presents parametric equations that describe the continuous bending of the turn of an open helicoid into the compartment of a single-cavity hyperboloid of rotation. Continuous bending can be imagined as a gradual deformation of a helicoid turn by decreasing its pitch. The surface is deformed, remaining helical and ultimately turning into a hyperboloid. Its meridian is the corresponding section of the hyperbola. It is proposed to approximate the section of the hyperboloid by a truncated cone. This approximation will be more accurate in the section of the hyperbola where it asymptotically approaches the line segment. After choosing a cone, its dimensions are determined and its exact sweep is built, since the cone is a sweep surface. The sweep is built in the form of a flat ring with a cut sector and will be a flat blank for forming an open helicoid turn from it.

The surface of the turn of an open helicoid can be most accurately obtained by stamping the resulting blank. For low-volume production of the helical surface of an open helicoid, flat rings can be welded together and stretched along the shaft with simultaneous twisting around its axis. The accuracy of the obtained surface will depend on the accuracy of the approximation of the section of the hyperboloid of rotation by a truncated cone.

Keywords: helicoid, planar billet, alteration, flection, parameter equality.