УДК 517.925.4
DOI: 10.32347/0131-579x.2024.106.27-40
к.ф.-м.н., доцент **Бондаренко Н.В.**
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
к.ф.-м.н., доцент **Отрашевська В.В.**
otrashevska.vv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9879-1442
к.ф.-м.н., доцент **Божонок К.В.**
bozhonok.kv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Київський національний університет будівництва і архітектури
(м. Київ, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДО ПОВІЛЬНО-ШВИДКИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У роботі розглядаються повільно-швидкі автономні двовимірні динамічні системи. Повільно-швидкі динамічні системи описують різні фізичні, механічні та інші явища, в яких поступове еволюційне накопичення малих змін з часом приводить до скачкоподібного переходу системи на новий динамічний режим. Дослідження повільно-швидких динамічних систем пов'язане зі знаходженням аналітичного рівняння повільного інваріантного многовиду, тобто многовиду, де фазові траєкторії системи змінюються повільно. Це обумовлено тим, що траєкторія повільного многовиду розбиває фазовий простір динамічної системи на повільні та швидкі області, тобто області, де динаміка системи сповільнюється та відповідно прискорюється. У роботі розглядаються геометричні підходи до знаходження повільного многовиду таких систем, які дозволяють досить просто записувати аналітичне рівняння повільного многовиду. Метод кривини потоку ґрунтується на використанні понять та методів диференціальної геометрії та механіки. Використання поняття кривини кривої дозволяє визначати аналітичне рівняння повільного многовиду незалежно від «повільних власних значень» системи. Застосовано метод кривини потоку до повільно-швидкої динамічної системи. Визначено аналітичне рівняння повільного многовиду розглядуваної системи та повільну і швидку області фазового простору. Встановлено, що рівняння повільного інваріантного многовиду динамічної системи, отримані методом кривини потоку та методом геометричного сингулярного збурення, повністю ідентичні в першому порядку наближення за малим параметром ε.

Ключові слова: повільно-швидка динамічна система; повільний многовид; кривина кривої; метод кривини потоку; метод геометричного сингулярного збурення.

Постановка проблеми. Повільно-швидкі динамічні системи або сингулярно збурені системи належать до динамічних систем, процеси в яких відбуваються з різною швидкістю. У таких системах деякі змінні змінюються повільно порівняно з іншими змінними. Повільні змінні зазвичай еволюціонують у більш тривалому часовому проміжку, і на їхню динаміку впливають взаємодії зі швидкими змінними, які змінюються швидше. Зв’язок між повільними та швидкими змінними може зумовлювати складні явища, такі як перехідна динаміка, біфуркації та коливання масштабу часу.

Повільно-швидкі динамічні системи описують різні фізичні, механічні та інші явища, в яких поступове еволюційне накопичення малих змін з часом приводить до скачкоподібного переходу системи на новий динамічний режим. Наприклад, повільно-швидкі динамічні системи описують гармонічні осцилятори зі змінною частотою [1], [2], діяльність нейронів та нейронних мереж [3] та ін.

Повільно-швидкі динамічні системи мають інваріантні многовиди, де фазові траєкторії системи змінюються повільно, і до яких найближчі траєкторії системи експоненціально наближаються в часі у нормальних напрямках. Ці многовиди називаються асимптотично стійкими (або нестійкими) повільними інваріантними многовидами. Тобто повільний многовид є підпростором фазового простору, в якому зміни відбуваються дуже повільно порівняно з іншими частинами системи. Теорія Fenichel N. [4], [5] існування нормально гіперболічних інваріантних многовидів дозволила встановити локальну інваріантність повільних інваріантних многовидів. Теорія інваріантних многовидів для звичайного диференціального рівняння розвинена в роботі Hirsch M.W. та ін. [6]. Запропоновані різні методи для знаходження аналітичного рівняння повільних інваріантних многовидів для повільно-швидких динамічних систем або, принаймні, їхній асимптотичний розклад за степенями ε. Деякі з цих методів мають певні недоліки. Наприклад, основним недоліком методу послідовних наближень та принципу нульової похідної, оснований на сингулярних збуреннях, є порушення справедливості асимптотичного розкладу повільного інваріантного многовиду за степенями ε поблизу згину чи негіперболічних областей. Графік аналітичного рівняння повільного многовиду, отриманий «методом дотичної лінійної системи» [7], може бути досить складним або неможливим для побудови.

Ефективнішими методами апроксимації рівняння повільного многовиду є геометричні методи, серед яких слід виділити «метод кривини потоку», оснований на числових характеристиках потоку динамічної системи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [13] запропоновано «метод послідовних наближень» для апроксимації повільного інваріантного многовиду сингулярно збурених динамічних систем. Цей метод полягає в тому, що сингулярна апроксимація, тобто апроксимація нульового порядку за малим параметром ε системи повільного інваріантного многовиду, є многовидом, що утворюється в системі у разі $\varepsilon = 0$. Ітераційний метод «принцип нульової похідної» для апроксимації повільного інваріантного многовиду описаний у роботі [14]. Згідно з цим методом вважається: якщо функція локально інваріантна відносно повільно-швидкої системи, то рівність нулю її k-тих похідних за часом забезпечує ще точніше наближення повільного інваріантного многовиду. Метод «Геометричного сингулярного збурення» розглянутий у роботі [5]. В роботах J. Ginoux and B. Rossetto [11], [12] запропонований ефективний «метод кривини потоку» для знаходження аналітичного рівняння повільного многовиду двовимірних та тривимірних повільно-швидких динамічних систем. Цей підхід ґрунтується на використанні понять і методів диференціальної геометрії та механіки. Використання поняття вектора миттєвого прискорення дозволяє отримати кінематичну інтерпретацію еволюції траєкторії інтегральної кривої системи в околі повільного многовиду шляхом визначення повільної та швидкої областей фазового простору.

Ціль статті. Вивчення повільно-швидких динамічних систем пов’язане зі знаходженням аналітичного рівняння повільного многовиду. Це обумовлено тим, що траєкторія повільного многовиду розбиває фазовий простір динамічної системи на повільні та швидкі області, тобто області, де динаміка системи сповільнюється або відповідно прискорюється. Ціль цієї статті – знайти апроксимацію повільного многовиду двовимірної повільно-швидкої динамічної системи, розглянутої в роботі [10], за допомогою методу кривини потоку, основаного на поняттях диференціальної геометрії, та за допомогою методу геометричного сингулярного збурення. Порівняти та проаналізувати результати, отримані цими двома методами.

Основна частина

1. Вступ

Розглянемо автономну нелінійну систему двох диференціальних рівнянь, визначену на компактній множині $E \subset \mathbf{R}^2$

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y, \varepsilon), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x, y, \varepsilon), \end{cases} \tag{1}$$

де $x, y \in \mathbf{R}$ – фазові координати системи, ε – малий параметр, $0 < \varepsilon << 1$. Функції $f_1 : E \to \mathbf{R}$, $f_2 : E \to \mathbf{R}$ вважаються неперервними та нескінченно диференційованими за змінними x, y і t, тобто належать класу C^∞ та задовольняють теорему Коші-Ліпшиця. Змінна x називається повільною змінною, а y – швидкою змінною. Система диференціальних рівнянь (1) називається повільно-швидкою системою або сингулярно збуреною системою з малим параметром ε. Теорія повільно-швидких динамічних систем вивчає асимптотичну поведінку системи, коли $\varepsilon \to 0$.

Повільним многовидом системи (1) називається локально інваріантний многовид $M_\varepsilon = \{(x; y) \mid y = Y(x, \varepsilon)\}$, де $x \in D$, $D \subseteq \mathbf{R}$ – компактна множина, $y = Y(x, \varepsilon)$ – деяка функція, визначена на D. При цьому множина нулів функції f_1 $M_0 = \{(x; y) \mid f_1(x, y, \varepsilon) = 0\}$, що задається функцією $y = Y_0(x)$, $x \in D$, є апроксимацією першого порядку многовиду M_ε.

Якщо $\varepsilon = 0$ система називається «швидкою», змінна x є нерухомим параметром. Повільна крива складається з нерухомих точок швидкої системи і є, таким чином, її інваріантним многовидом. Для малих $\varepsilon \neq 0$ повільно-швидка динамічна система є малим збуренням швидкої, при цьому поза будь-яким фіксованим околом M_ε швидкість зміни змінної y набагато перевищує швидкість зміни змінної x. З геометричної точки зору це означає, що поза околом повільного многовиду траєкторії системи майже паралельні осі швидкого руху y.

Систему (1) після переходу до іншого масштабу часу $\tau = \varepsilon t$ можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = f_1(x, y, \varepsilon), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = \varepsilon f_2(x, y, \varepsilon). \end{cases} \tag{2}$$

У цьому разі x є швидкою змінною, а y – повільною змінною і система називається «швидко-повільною». Незалежні змінні t та τ позначають швидкий та повільний час відповідно. Зауважимо, що для $\varepsilon \neq 0$ системи (1) та (2) є еквівалентними.

2. Метод кривини потоку

Запишемо систему (1) у векторному вигляді:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}), \tag{3}$$

де $\vec{X} = (x, y)^T \in E \subset \mathbf{R}^2$, $\frac{d\vec{X}}{dt} = \left(\varepsilon\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)^T \in \mathbf{R}^2$, $0 < \varepsilon << 1$, $\vec{F}(\vec{X}) = (f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}))^T$ – вектор-функція розмірності два.

Розв'язком цієї системи є інтегральна крива, задана вектор-функцією $\vec{X}(t)$ скалярної змінної t, яка визначає стани і динаміку системи. У фазовому просторі E вектор $\vec{F}(\vec{X})$ породжує векторне поле швидкостей. При цьому вектор $\vec{F}(\vec{X})$ в кожній точці $\vec{X}$ спрямований по дотичній до траєкторії інтегральної кривої $\vec{X}(t)$. Можна вважати, що інтегральна крива $\vec{X}(t)$ є кривою траєкторії рухомої точки M. У цьому разі повна похідна $\frac{d\vec{X}}{dt}$ є вектор-функцією $\vec{V}(t)$ скалярної змінної t, яка є вектором миттєвої швидкості точки M в момент часу t:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}).$$

Зазначимо, що вектор миттєвої швидкості $\vec{V}(t)$ напрямлений по дотичній до траєкторії кривої $\vec{X}(t)$.

Повна похідна від $\vec{V}(t)$ є вектор-функцією $\vec{\gamma}(t)$ скалярної змінної t та є вектором миттєвого прискорення рухомої точки M в момент часу t:

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{4}$$

Оскільки функції f_1 та f_2 є функціями класу C^∞ на компактній множині $E \subset \mathbf{R}^2$, то можна обчислити повну похідну векторного поля $\vec{V}(t)$, визначеного системою (3). Використовуючи правило обчислення похідної від складених функцій, запишемо:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{F}}{d\vec{X}} \cdot \frac{d\vec{X}}{dt}. \tag{5}$$

Матриця $\frac{d\vec{F}}{d\vec{X}}$ є функціональною матрицею Якобі J системи (3). З рівнянь (4) і (5) маємо рівняння $\vec{\gamma} = J \cdot \vec{V}$.

Інтегральна крива $\vec{X}(t)$ динамічної системи (3) є траєкторією руху деякої точки M при зміні параметра t, задамо цю криву параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

де $x: I \to \mathbf{R}$, $y: I \to \mathbf{R}$ – функції класу C^{∞} (I – числовий проміжок зміни параметра t), або векторно-параметричним рівнянням

$$\vec{X}(t) = (x(t); y(t)).$$

Інтегральну криву $\vec{X}(t)$ динамічної системи можна розглядати як плоску криву, що має певні числові характеристики такі як кривина та скрут кривої.

У кожній точці M кривої $\vec{X}(t)$ визначимо вектори базису Френе: $\vec{\tau}$ – одиничний дотичний вектор до траєкторії кривої, $\vec{\nu}$ – одиничний вектор головної нормалі, спрямований всередину увігнутості кривої, і $\vec{\beta}$ – одиничний вектор бінормалі до траєкторії кривої. Оскільки вектор миттєвої швидкості $\vec{V}(t)$ дотичний до траєкторії кривої $\vec{X}(t)$ в будь-якій точці *M*, можна побудувати одиничний дотичний вектор

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}.$$

Оскільки $\vec{V}$ та $\vec{\gamma}$ лежать в стичній площині (площині прискорень), то одиничний вектор бінормалі

$$\vec{\beta} = \frac{[\vec{V}, \vec{\gamma}]}{|[\vec{V}, \vec{\gamma}]|},$$

де $[\vec{V}, \vec{\gamma}]$ позначає векторний добуток векторів $\vec{V}$ та $\vec{\gamma}$.

Одиничний вектор нормалі $\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$.

Таким чином, можна виразити тангенціальну та нормальну складові вектору миттєвого прискорення $\vec{\gamma}$ як:

$$\vec{\gamma}_{\tau} = |\vec{\gamma}| \cdot \cos(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{V}}) = \frac{(\vec{\gamma}, \vec{V})}{|\vec{V}|}, \qquad \vec{\gamma}_{\nu} = |\vec{\gamma}| \cdot \sin(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{V}}) = \frac{|[\vec{\gamma}, \vec{V}]|}{|\vec{V}|},$$

де $(\vec{\gamma}, \vec{V})$ позначає скалярний добуток векторів $\vec{\gamma}$ та $\vec{V}$.

Область фазового простору E, в якій тангенціальна складова $\vec{\gamma}_{\tau}$ вектора миттєвого прискорення $\vec{\gamma}$ має від'ємне значення, тобто область, в якій система сповільнюється, називається повільною областю динамічної системи. А область фазового простору E, в якій тангенціальна складова $\vec{\gamma}_{\tau}$

вектору миттєвого прискорення $\vec{\gamma}$ має додатне значення, тобто область в якій система прискорюється, називається швидкою областю динамічної системи. Зазначимо, що повільний многовид належить до повільної області системи.

Оскільки вектор миттєвої швидкості $\vec{V}(t) = \dot{\vec{X}}(t)$, а вектор миттєвого прискорення $\vec{\gamma}(t) = \ddot{\vec{X}}(t)$, де крапки зверху позначають першу і другу похідні за часом, то кривина кривої $\vec{X}(t)$, що виражає кутову швидкість зміни дотичної вздовж траєкторії кривої,

$$k_1 = \frac{1}{R} = \frac{|[\dot{\vec{X}}(t), \ddot{\vec{X}}(t)]|}{|\dot{\vec{X}}(t)|^3} = \frac{|[\vec{\gamma}, \vec{V}]|}{|\vec{V}|^3} = \frac{\vec{\gamma}_\nu}{|\vec{V}|^2}, \tag{6}$$

де R – радіус кривини кривої.

Точки, в яких кривина кривої $\vec{X}(t)$ $k_1 = 0$, є точками, в яких нормальна складова $\vec{\gamma}_\nu$ вектору миттєвого прискорення $\vec{\gamma}(t)$ дорівнює нулю. У роботі [11] сформульоване твердження.

Твердження. Геометричне місце точок площини, в яких локальна кривина траєкторії інтегральної кривої двовимірної динамічної системи, визначеної рівнянням (3), дорівнює нулю, є аналітичним рівнянням повільного многовиду цієї системи. Тобто

$$k_1 = \frac{1}{R} = \frac{|[\vec{\gamma}, \vec{V}]|}{|\vec{V}|^3} = 0 \ \text{тоді і тільки тоді, коли}\ [\vec{\gamma}, \vec{V}] = 0.$$

Оскільки $\vec{V} = \dot{\vec{X}}$, а $\vec{\gamma} = \ddot{\vec{X}}$, то рівняння $[\vec{\gamma}, \vec{V}] = 0$ можна подати у вигляді

$$\det(\ddot{\vec{X}}, \dot{\vec{X}}) = 0. \tag{7}$$

Приклад. Розглянемо повільно-швидку систему диференціальних рівнянь ([10])

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \varepsilon(1 - c^2 y^2), \end{cases} \tag{8}$$

де c – деяка константа і $\varepsilon << 1$ – малий параметр.

Знайдемо повільний многовид цієї системи методом кривини потоку використовуючи рівняння (7). Обчислимо похідні другого порядку за часом:

$$\ddot{x} = -\dot{x} + \dot{y} = x - y + \varepsilon(1 - c^2 y^2);$$

$$\ddot{y} = \varepsilon(-2c^2 y\dot{y}) = -2\varepsilon c^2 y\dot{y} = -2\varepsilon c^2 y\varepsilon(1 - c^2 y^2) = -2\varepsilon^2 c^2 y(1 - c^2 y^2).$$

Підставимо отримані похідні в рівняння (7):

$$\det(\ddot{\vec{X}}, \dot{\vec{X}}) = \begin{vmatrix} \ddot{x} & \dot{x} \\ \ddot{y} & \dot{y} \end{vmatrix} = \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = 0;$$

$$(x - y + \varepsilon^2(1 - c^2y^2)) \cdot \varepsilon(1 - c^2y^2) + 2\varepsilon^2c^2y(1 - c^2y^2)(-x + y) = 0;$$

$$x - y + \varepsilon(1 - c^2y^2) - 2\varepsilon c^2y(x - y) = 0;$$

$$x - y + \varepsilon - \varepsilon c^2y^2 - 2\varepsilon c^2yx + 2\varepsilon c^2y^2 = 0;$$

$$\varepsilon c^2y^2 - (1 + 2\varepsilon c^2x)y + x + \varepsilon = 0.$$

Ми отримали неявне рівняння повільного многовиду. Це є рівняння другого степеню відносно y, знайдемо його розв'язки:

$$y = \frac{2\varepsilon c^2x + 1 \pm \sqrt{4\varepsilon^2c^4x^2 + 1 - 4\varepsilon^2c^2}}{2\varepsilon c^2}.$$

На рис. 1 зображено траєкторії повільного многовиду системи (8) у випадку $\varepsilon = 0{,}05$ та $c = 2$. Сірим кольором позначена повільна область, тобто область, де тангенціальна складова вектору миттєвого прискорення $\vec{\gamma}$ додатна. Зазначимо, що як тільки траєкторія інтегральної кривої системи залишає повільну область, система набирає швидкої динаміки.

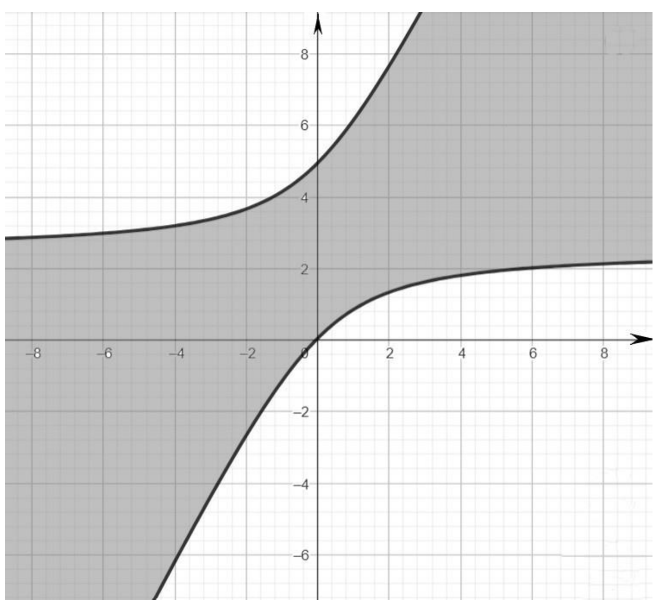

Рис. 1

3. Метод геометричного сингулярного збурення

Геометрична теорія Fenichel N. [7] для сингулярно збурених динамічних систем дозволяє розглядати задачу знаходження функцій

$y = Y(x,\varepsilon)$, графіками яких є локально інваріантні повільні многовиди M_ε системи (1), як регулярну задачу збурення.

Інваріантність многовиду M_ε означає, що функція $Y(x,\varepsilon)$ задовольняє рівність

$$D_x Y(x,\varepsilon)\, f_1(x, Y(x,\varepsilon),\varepsilon) = \varepsilon f_2(x, Y(x,\varepsilon),\varepsilon). \tag{9}$$

Згідно з Guckenheimer J. та ін. [16], це диференціальне рівняння в частинних похідних відносно $Y(x,\varepsilon)$ неможливо розв'язати точно. Його розв’язок можна апроксимувати рядом Тейлора при $(x,\varepsilon) = (0,0)$. При цьому дістанемо таке подання збурення:

$$Y(x,\varepsilon) = Y_0(x) + \varepsilon Y_1(x) + \varepsilon^2 Y_2(x) + o(\varepsilon^2). \tag{10}$$

Ряди Тейлора для $f_1(x, Y(x,\varepsilon),\varepsilon)$ і $f_2(x, Y(x,\varepsilon),\varepsilon)$ з точністю до першого порядку за ε мають вигляд [9]:

$$f_1(x, Y(x,\varepsilon),\varepsilon) = f_1(x, Y_0(x), 0) + \varepsilon\left[D_y f_1(x, Y_0(x),0) Y_1(x) + \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon}(x, Y_0(x), 0)\right],$$

$$f_2(x, Y(x,\varepsilon),\varepsilon) = f_2(x, Y_0(x), 0) + \varepsilon\left[D_y f_2(x, Y_0(x),0) Y_1(x) + \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon}(x, Y_0(x), 0)\right].$$

У наближенні з точністю до порядку ε^0 рівняння (9) має вигляд:

$$D_x Y_0(x)\, f_1(x, Y_0(x), 0) = 0.$$

Це рівняння визначає $Y_0(x)$.

У наближенні з точністю до порядку ε^1 рівняння (9) має вигляд:

$$D_x Y_0(x)\left[D_y f_1(x, Y_0(x),0) Y_1(x) + \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon}\right] = f_2(x, Y_0(x,\varepsilon), 0),$$

яке визначає $Y_1(x)$ і так далі.

Застосуємо метод геометричного сингулярного збурення до системи (8)

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \varepsilon) = -x + y, \\ \dot{y} = \varepsilon f_2(x, y, \varepsilon) = \varepsilon(1 - c^2 y^2). \end{cases}$$

Згідно з формулою (9) інваріантність многовиду M_ε запишеться у вигляді

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}(x,\varepsilon)\right) f_1(x, Y(x,\varepsilon),\varepsilon) = \varepsilon f_2(x, Y(x,\varepsilon),\varepsilon). \tag{11}$$

Застосуємо метод геометричного сингулярного збурення та знайдемо рівняння (11):

у наближенні з точністю до порядку ε^0:

$$\frac{\partial Y_0}{\partial x}(x)\, f_1(x, Y_0(x), 0) = 0, \quad f_1(x, Y_0(x), 0) = 0,\ Y_0(x) = x;$$

у наближенні з точністю до порядку ε^1:

$$\frac{\partial Y_0}{\partial x}(x) Y_1(x) = f_2(x, Y_0(x), 0),\ \ Y_1(x) = 1 - c^2 x^2;$$

у наближенні з точністю до порядку ε^2:

$$\frac{\partial Y_0}{\partial x}(x) Y_2(x) = -2c^2 x(1 - c^2 x^2),\ \ Y_2(x) = 2c^2 x(c^2 x^2 - 1).$$

Таким чином, згідно з рівнянням (10) наближення з точністю до порядку ε^2 повільного інваріантного многовиду сингулярно збуреної динамічної системи визначається таким чином:

$$y = Y(x, \varepsilon) = x + (1 - c^2 x^2)\varepsilon + 2c^2 x(c^2 x^2 - 1)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Рівняння повільного многовиду розглядуваної системи, отримане методом кривини потоку, має вигляд

$$\phi(x, y, \varepsilon) = \varepsilon c^2 y^2 - (1 + 2\varepsilon c^2 x) y + x + \varepsilon = 0. \tag{13}$$

Для визначення $Y_0(x),\ Y_1(x),\ Y_2(x)$ у розкладі $Y(x, \varepsilon)$ у ряд Тейлора використаємо рівності:

у наближенні з точністю до порядку ε^0

$$\phi(x, Y_0(x), 0) = 0;$$

у наближенні з точністю до порядку ε^1

$$D_y \phi(x, Y_0(x), 0) Y_1(x) + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(x, Y_0(x), 0) = 0,$$

і так далі.

Дістанемо розклад

$$y = x + (1 - c^2 x^2)\varepsilon + 2c^2 (c^2 x^2 - 1)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{14}$$

Отже, повільні інваріантні многовиди, отримані двома методами, апроксимовані рівняннями (12) і (14), є повністю ідентичними з точністю до першого порядку за ε. У доданку, що містить ε^2, в рівняннях (12) і (14) є відмінність, обумовлена тим, що повільний інваріантний многовид, отриманий методом кривини потоку, визначається для двовимірної динамічної системи тензором другого порядку від кривини, тобто визначником (7), що містить першу та другу похідні за часом від $\vec{X}$. Якщо зробити обчислення, використовуючи похідну Лі від цього визначника, отримаємо визначник, що містить першу та третю похідні за часом від $\vec{X}$, тобто тензор третього порядку $\det(\dddot{\vec{X}}, \dot{\vec{X}}) = 0$. У такому разі в апроксимаціях повільного інваріантного многовиду, отриманих двома методами, відмінності у доданку із ε^2 не буде.

Висновки та перспективи. Розглянуто геометричні підходи до знаходження аналітичного рівняння повільного інваріантного многовиду повільно-швидкої нелінійної динамічної системи. Метод кривини потоку знаходження повільного многовиду таких систем використовує поняття диференціальної геометрії. Геометричне місце точок розпрямлення інтегральної кривої системи, тобто точок, в яких кривина траєкторії інтегральної кривої рівна нулю, є повільним інваріантним многовидом. Таким чином, метод кривини потоку дозволяє простими обчисленнями знайти аналітичне рівняння повільного многовиду. Застосування методу кривини потоку та методу геометричного сингулярного збурення для знаходження повільного многовиду показано на прикладі повільно-швидкої динамічної системи. Проаналізовані та порівнюються результати, отримані двома методами. Повільні та швидкі області розглянутої динамічної системи зображені графічно.

Застосування методів диференціальної геометрії до дослідження повільно-швидких динамічних систем може бути поширено на подальші дослідження динамічних систем, зокрема динамічних систем із запізнюванням у часі [17].

Література

1. *Bonet C., Jeffrey M.R., Martín P.* Olm J.M. Novel slow–fast behaviour in an oscillator driven by a frequency-switching force, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 118, 2023, P. 1–22.

2. *Righetti L., Buchli J, Ijspeert A.J.* Slow-fast dynamics of strongly coupled adaptive frequency oscillators, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 20(4), 2021, P. 1985–2012.

3. *Chen B., Miller P.* Attractor-state itinerancy in neural circuits with synaptic depression. *J. Math. Neurosci.*, 2020, P. 10–15.

4. *Fenichel N.* Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Ind. Univ. Math. J.* Vol. 21, 1971, P. 193–225.

5. *Fenichel N.* Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.* Vol. 31, 1979, P. 53–98.

6. *Hirsch M.W., Pugh C. C.* Shub, M. Invariant Manifolds, Springer-Verlag, New York, 1977.

7. Rossetto B., Lenzini T., Ramdani S., Suchey G. Slow-fast autonomous dynamical systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos 8*, 1998, P. 2135–2145.
8. *O'Malley R.E.* Introduction to Singular Perturbations, *Academic Press*, New York, 1974.
9. *O'Malley R.E.* Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1991.
10. *Verhulst F., Bakri T.* The dynamics of slow manifold, *Journal of the Indonesian Mathematical Society* , Vol. 13(1), 2007, P.73-90.
11. *Ginoux J.M., Rossetto B.* Differential geometry and mechanics applications to chaotic dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, Vol. 4(16), 2006, P. 887–910.
12. *Ginoux J.M., Rossetto B. Chua L O.* Slow invariant manifolds as curvature of the flow of dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, Vol. 11(18), 2008, P. 3409–3430.
13. *Rossetto B., Lenzini T., Ramdani S., Suchey G.* Slow fast autonomous dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos* Vol. 8(11), 1998, P. 2135–2145.
14. *Gear C.W., Kaper T.J., Kevrekidis I.G., Zagaris A.* Projecting to a slow manifold: singularly perturbed systems and legacy codes, *SIAM J. Applied Dynamical Systems, Mathematics*, Vol. 4(3), 2005, P. 711–732.
15. Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.* Vol. 31, 1979, P. 53–98.
16. Guckenheimer J., Hoffman K., Weckesser W. Numerical Computation of Canards, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, Vol. 10(12), 2000, P. 2669–2687.
17. *Бондаренко Н.В., Соколова Л.В., Отрашевська В.В.* Геометричний підхід до дослідження стійкості динамічних систем із запізнюванням у часі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, 2023. Випуск 104, С. 16-29.

Reference

1. *Bonet C., Jeffrey M.R., Martín P.* Olm J.M. Novel slow–fast behaviour in an oscillator driven by a frequency-switching force, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 118, 2023, P. 1–22. *{in English}*
2. *Righetti L., Buchli J, Ijspeert A.J.* Slow-fast dynamics of strongly coupled adaptive frequency oscillators, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 20(4), 2021, P. 1985–2012. *{in English}*
3. *Chen B., Miller P.* Attractor-state itinerancy in neural circuits with synaptic depression. *J. Math. Neurosci.*, 2020, P. 10–15. *{in English}*
4. *Fenichel N.* Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Ind. Univ. Math. J.* Vol. 21, 1971, P. 193–225. *{in English}*

5. *Fenichel N.* Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.* Vol. 31, 1979, P. 53–98.
6. *Hirsch M.W., Pugh C. C.* Shub, M. Invariant Manifolds, Springer-Verlag, New York, 1977. *{in English}*
7. Rossetto B., Lenzini T., Ramdani S., Suchey G. Slow-fast autonomous dynamical systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos 8*, 1998, P. 2135–2145. *{in English}*
8. *O'Malley R.E.* Introduction to Singular Perturbations, *Academic Press*, New York, 1974. *{in English}*
9. *O'Malley R.E.* Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1991. *{in English}*
10. *Verhulst F., Bakri T.* The dynamics of slow manifold, *Journal of the Indonesian Mathematical Society* , Vol. 13(1), 2007, P.73-90. *{in English}*
11. *Ginoux J.M., Rossetto B.* Differential geometry and mechanics applications to chaotic dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, Vol. 4(16), 2006, P. 887–910. *{in English}*
12. *Ginoux J.M., Rossetto B. Chua L O.* Slow invariant manifolds as curvature of the flow of dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, Vol. 11(18), 2008, P. 3409–3430. *{in English}*
13. *Rossetto B., Lenzini T., Ramdani S., Suchey G.* Slow fast autonomous dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos* Vol. 8(11), 1998, P. 2135–2145. *{in English}*
14. *Gear C.W., Kaper T.J., Kevrekidis I.G., Zagaris A.* Projecting to a slow manifold: singularly perturbed systems and legacy codes, *SIAM J. Applied Dynamical Systems, Mathematics*, Vol. 4(3), 2005, P. 711–732. *{in English}*
15. Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.* Vol. 31, 1979, P. 53–98. *{in English}*
16. Guckenheimer J., Hoffman K., Weckesser W. Numerical Computation of Canards, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, Vol. 10(12), 2000, P. 2669–2687. *{in English}*
17. *Bondarenko N.V., Sokolova L.V., Otrashevska V.V.* Heometrychnyi pidkhid do doslidzhennia stiikosti dynamichnykh system iz zapizniuvanniam u chasi. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 2023. Vypusk 104, S. 16-29. *{in Ukranian}*

Ph.D., assoc. prof. Nataliia Bondarenko,
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Ph.D., assoc. prof. Valentyna Otrashevska
otrashevska.vv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9879-1442
Ph.D., assoc. prof. Kateryna Bozhonok
bozhonok.kv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA)

APPLICATION OF DIFFERENTIAL GEOMETRY METHODS TO SLOW-FAST DYNAMIC SYSTEMS

The slow-fast autonomous two-dimensional dynamic systems are considered. Slow-fast dynamic systems describe various physical, mechanical, and other phenomena in which the gradual evolutionary accumulation of small changes over time leads to a sudden transition of the system to a new dynamic regime. The study of slow-fast dynamic systems is connected with finding the analytical equation of a slow invariant manifold, that is, a manifold where the phase trajectories of the system change slowly. This is due to the fact that the trajectory of the slow manifold divides the phase space of the dynamic system into slow and fast regions, that is, regions where the dynamics of the system slows down and accelerates, respectively. The work considers geometric approaches to finding the slow manifold of such systems, which allow writing the analytical equation of the slow manifold rather simply. The flow curve method is based on the concepts and methods of differential geometry and mechanics. Using the concept of the curvature of a curve allows one to determine the analytical equation of a slow manifold regardless of the "slow eigenvalues" of the system. The flow curvature method is applied to a slow-fast dynamic system. The analytical equation of the slow manifold of the considered system and the slow and fast regions of the phase space are determined. It was established that the equations of the slow invariant manifold of the dynamic system, obtained by the flow curvature method and the geometric singular perturbation method, are completely identical in the first order of approximation with a small parameter ε.

Key words: slow-fast dynamical system; slow manifold; curvature; flow curvature method; geometric singular perturbation method.