УДК 004.925.86
DOI: 10.32347/0131-579x.2024.106.41-56

д. т. н. професор **Ботвіновська С. І**.,
botvinovska.si@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1832-1342
доцент **Золотова А.В.**,
zolotova.av@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8014-3834

Київський національний університет будівництва і архітектури

ЗАГАЛЬНИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНОЇ РІВНОЛАНКОВОЇ КРИВОЇ СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧНИМ МЕТОДОМ

У роботі представлено загальний параметричний аналіз задачі геометричного моделювання дискретних каркасів плоских рівноланкових кривих ліній статико-геометричним методом з урахуванням заданих вихідних умов. У дослідженні представлено можливі шляхи врахування геометричних властивостей кривих ліній, їх закономірності, ті що можуть виникнути під час моделювання кривих ліній. Слід зазначити, що всі задачі, які можуть виникнути у процесі конструювання дискретної рівноланкової кривої статико-геометричним методом, підпадають під різні комбінації геометричних умов. У зв'язку із великою кількістю можливих варіантів поєднання геометричних умов між собою, підрахунок параметрів буде цілком індивідуальним у кожному випадку розв'язання поставленої практичної задачі, а саме при конструюванні за заданими вихідними умовами дискретних рівноланкових кривих.

В основі моделювання кривих ліній за статико-геометричним методом лежить рівновага вузлів дискретно представлених кривих за рахунок прикладеного до кожного вузла формоутворюючого навантаження. Оскільки, всі зусилля у вузлах будуть завжди пропорційні довжинам ланок, то у процесі вирішення будь-якої практичної задачі, де потрібно сконструювати дискретний каркас кривої лінії, завжди буде складатись єдина система рівнянь рівноваги вузлів для знаходження координат x, y, враховуючи законтурні вузли до якої будуть додаватись рівняння, які будуть аналогами додаткових геометричних умов і рівняння, які будуть дискретними аналогами натуральних рівнянь. Останні враховують властивість, що закон розподілу зусиль зовнішнього навантаження є аналогом розподілу кривини при умові формування кривої.

Ключові слова: статико-геометричний метод; дискретна рівноланкова крива; геометричне моделювання; параметричний аналіз; розподіл кривини кривої.

Постановка проблеми. Криві лінії знайшли широке використання в будівництві, архітектурі та дизайні. Незважаючи на те, що до розв'язання задач моделювання кривих ліній у сучасних системах автоматизованого проектування залучено різноманітні методи, в основі яких є потужні математичні моделі, залишаються задачі, які і далі потребують подальших досліджень. Серед них є питання моделювання рівноланкової кривої з урахуванням різноманітних умов, які необхідно враховувати та виконувати у процесі моделювання. У роботі будуть розглянуті шляхи задоволення геометричних властивостей кривих ліній, їх закономірності, які виникають під час моделювання кривих ліній. Проведене за цією тематикою дослідження вимагає виконання параметричного аналізу поставленої задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує багато досліджень, присвячених темі моделювання кривих ліній. Серед них робота [1], де автор формулює спосіб конструювання просторових кривих, що описуються параметричними рівняннями у функції натурального параметра. Автор вказує на можливість використання таких кривих для розв'язання практичних задач, які потребують завдання просторових кривих ліній, коли довжина дуги кривої виступає інваріантом її перетворення. Статико-геометричний метод професора Ковальова С.М. (СГМ) широко використовується у процесі моделювання дискретних каркасів кривих ліній та поверхонь із завданням різноманітних геометричних умов. Багато робіт присвячено розробці способів управління дискретно-представленими кривими, які мають широке практичне використання [2, 3]. У роботі [4] демонструється використання СГМ при розв'язанні інженерної задачі моделювання дискретного аналогу ланцюгової лінії із закріпленими кінцями. Автор демонструє можливість побудови аналогу ланцюгової лінії, незважаючи на складні рівняння її опису та пропонує алгоритм побудови множини точок такої лінії. Геометричному моделювання плоских кривих ліній присвячено роботу [5]. Автор пропонує моделювання кривих ліній, які подаються у натуральній параметризації, а закон розподілу кривини від довжини дуги лінії має синусоїдальну залежність. У роботі [6] автор розглядає побудову просторових кривих з урахуванням параболічних законів розподілу кривини, яка розглядається як функція від довжини дуги. Роботу [7] присвячено моделюванню просторових кривих за допомогою розв'язання диференційних рівнянь числовими методами, коли автори замінюють залежність скруту на залежність дуги підйому від довжини дуги. Багато практичних інженерних задач пов'язано із моделюванням різноманітних поверхонь, які наділяються естетичними властивостями. Для дизайнерів та архітекторів найчастіше використовують лінії з монотонною зміною кривини. Такі криві вважаються найкращими з точки зору їх використання в дизайні та інженерії [8-9]. У рамках дискретного моделювання у роботах [10, 11] реалізовано побудову дискретних каркасів кривих ліній за допомогою управління кутами суміжності між ланками дискретно представлених кривих. З аналізу літературних джерел видно, що задачам моделювання плоских кривих ліній за допомогою складного математичного апарату [12] присвячено багато робіт, але вказані дослідження все одно не вирішують усіх питань моделювання кривих ліній за заданими вихідними умовами. Задача моделювання кривих ліній за заданими значеннями кривини є суттєво нелінійною задачею, тому пропонується її розв'язання способами дискретного геометричного моделювання. Представлені дослідження виконуються з використанням натуральних рівнянь кривих, що моделюються та з урахуванням дискретних аналогів їх кривини.

Цілі та завдання статті. Мета дослідження полягає у виконанні загального параметричного аналізу задачі побудови дискретної кривої у випадку її побудови статико-геометричним методом.

Основна частина. На сьогодні напрацьовано багато прикладів моделювання плоских кривих ліній статико-геометричним методом. Одним з інваріантів цього методу є властивість, що кривина в кожному вузлі кривої лінії прямо пропорційна довжині вектору зовнішнього зусилля Pi, прикладеного до нього. Чим більше кривина, тим більше зусилля необхідно мати, при цьому довжина ланки повинна залишатись незмінною. Таким чином зберігається залежність векторів зовнішніх зусиль Pi від радіуса кривини r, а значить і від кривини. Якщо графік зміни кривини кривої має лінійний характер, то розподіл зовнішніх зусиль вздовж кривої теж буде лінійним. У такому випадку вектори зусиль будуть нормалями до кривої в заданих точках для рівноланкових кривих [14]. Основним принципом статико-геометричного способу є можливість управління формою нерозтяжної нитки при зміні форми графіка розподілу зовнішніх зусиль, прикладених дод вузлів. Таким чином, цей спосіб моделювання рівноланкової дискретно представленої кривої дозволяє управляти її формою за допомогою зміни графіку розподілу навантаження між вузлами.

При всьому тому необхідно мати сумісні вихідні умови, які не будуть суперечити одне одному. Крок вузлів уздовж рівноланкової кривої залишається весь час постійною величиною, але не задається, як вихідна умова, а розраховується у процесі побудови та вибору першого наближення.

Конструювання кривих ліній, як і будь-яких геометричних фігур, базується на відомому факті рівності кількості геометричних параметрів і умов, які вони можуть задовольняти.

Класичні схеми побудови кривих спираються на параметри, які є постійною частиною рівнянь шуканих кривих, заданих у явному, неявному або параметричному вигляді. Це стосується як моно- так і різноманітних складених кривих.

У цьому випадку керуючими чинниками при конструюванні є параметри кривої. В останні роки у геометричному моделюванні, зокрема в комп'ютерних системах, поширене використання керуючого чинника у вигляді деякої кривої, що не належить вихідній кривій, яка будується. Керуючими чинниками здебільшого є вершини такої ламаної, що в явному вигляді зв'язані з параметрами кривої. Управління вершинами таких ламаних дозволяє користувачеві отримувати моно- та складені криві за будь-яким порядком гладкості (здебільшого використовується другий порядок гладкості) у місцях стику кривих, а крім того задавати відповідні крайові умови.

У представленому дослідженні за управляючу криву (ламану) пропонується обирати криву лінію, яка задає натуральне рівняння шуканої лінії так, що керуючими чинниками при конструюванні будуть параметри цього натурального рівняння кривої. Нижче пропонується задача конструювання кривої з крайовими умовами, які будуть задані у вигляді керуючих чинників параметрів їх натуральних рівнянь.

Нехай натуральні рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} \chi &= \chi\,(s,\ \ a_{j_1}),\ \text{де } j_1 = 1,\ldots, \mathrm{N}_1, \\ \sigma &= \sigma\,(s,\ \ b_{j_2}),\ \text{де } j_2 = 1,\ldots, \mathrm{N}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

де a_{j_1}, b_{j_2} – їх невизначені параметри, що використовуються як керуючі чинники, s – довжина кривої. Дискретна рівноланкова крива відшукується як множина точок, що повинна представити криву, яка б задовольняла рівняння (1) та крайові умови. Розглянемо можливі умови, які необхідно враховувати при конструюванні дискретного каркасу рівноланкової ламаної.

Загальна умова E_ℓ^k, де $k \in [1 \quad N]$, $\ell \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4{,}5\}$, (індекс k визначає умову у початковій $\widetilde{P}_1 = P1$ і кінцевій $\widetilde{P}_2 = P2$ точках, а індекс ℓ відповідає номеру умови) складається з умов:

E_1^k: $\widetilde{P}_1$ та $\widetilde{P}_2$ – задані початкова та кінцева точки направляючої кривої, що відповідають першій та останній точкам дискретної рівноланкової кривої;

E_2^k: $\widetilde{\sum}_1$ та $\widetilde{\sum}_2$ – задані стичні площини, відповідно в початковій та кінцевій точках дискретної рівноланкової кривої;

E_3^k: $\widetilde{\rho}_1$та $\widetilde{\rho}_2$ – прямі, що задають дотичні в початковій *P1* та кінцевій *P2* точках дискретної рівноланкової кривої;

E_4^k: $\widetilde{\chi}_1$ та $\widetilde{\chi}_N$ – кривини в точках *P1* та *P2* відповідно;

E_5^k: $\widetilde{\sigma}_1$ та $\widetilde{\sigma}_N$ – скрут в точках *P1* та *PN,* відповідно.

Для плоскої дискретної рівноланкової кривої задоволення умови E_1^k вимагає чотири параметри, по два на початкову та кінцеву точки кривої. Умова E_2^k при побудові плоскої кривої взагалі не існує. У варіанті побудови просторової кривої її завдання в кожній заданій кінцевій точці вимагає два параметри, для визначення стичних площин, в яких будуть лежати дотичні.

Умова E_3^k в обох варіантах (у варіантах побудови плоскої і просторової кривих) вимагає два параметри, відповідно по одному на кожну дотичну. Йдеться про побудову прямої, яка належить заданій площині: у плоскому варіанті – це є площина кривої, а в просторовому варіанті – стична площина. Дотична проходить через задану точку, тому на її задачу необхідно один параметр.

Умови E_4^k та E_5^k в сукупності становлять чотири параметри – числові значення кривини χ та скруту σ в початковій та кінцевій точках. У випадку плоскої дискретної рівноланкової кривої залишається тільки значення кривини χ, тобто тільки два параметри.

Таким чином, у просторовому випадку для задоволення крайових умов необхідно розробити апарат з шістнадцятьма вільними параметрами. Кількість таких параметрів для двовимірного випадку дорівнює вісім.

Далі процес параметризації повинен розглядатись з урахуванням практичного завдання тих або інших умов. По-перше, у різних практичних задачах виконується задоволення тих або інших вихідних умов по різному; по-друге, неоднакова структура управляючих кривих та геометрична інтерпретація керуючих чинників також впливає на кількість параметрів та їх значущість.

Розглянемо побудовою плоскої дискретної рівноланкової кривої із застосуванням статико-геометричного методу. У якості управляючої ламаної приймемо поліноміальну функцію

$$\chi = a_0 + a_1 S^1 + \ldots + a_m S^m , \qquad (2)$$

а саме параболу m-го порядку, що дозволяє, принаймні теоретично, додавати до названих умов $E_\ell^k, \ell = 1,...,5$, які прийнято обов’язковими, умови у проміжних (внутрішніх) вершинах дискретної рівноланкової кривої. Наприклад, $\tilde{E}_\ell^i$, де $\ell = 6,...,8$, i – номер точки, у якій буде задовольнятися відповідна умова, якщо дискретна рівноланкова крива складається з $N+1$ точок, то $i \in \{0,..., N\}$:

$\tilde{E}_6^i$ – умова проходження через додаткові проміжні точки ламаної (два параметра);

$\tilde{E}_7^i$ – завдання дотичних у проміжних точках ламаної (один параметр);

$\tilde{E}_8^i$ – завдання значень кривини (її дискретного аналогу Pi) у проміжних точках ламаної (один параметр).

За статико-геометричним методом є можливість при побудові рівноланкової кривої, незалежно від функції розподілу кривини, забезпечити умову E_1^k, (яка еквівалентна чотирьом параметрам). Але усі інші задані умови повинні забезпечуватися за рахунок параметрів управляючої кривої (2). Це обов'язкові умови E_3^k та E_4^k, які у сукупності еквівалентні чотирьом параметрам і деяка кількість додаткових умов $\widetilde{E}_\ell^i$, $\ell = 6,...,8$.

Якщо додаткових умов немає, то для задоволення чотирьох обов'язкових параметрів (дві дотичні у початковій та кінцевій точках кривої та значення кривин у цих точках) необхідно обрати кубічну параболу. Тобто, ступінь функції (2) визначається як $m = m' + 3$, де m' − сукупне параметричне число додаткових умов.

Система кінцево-різницевих рівнянь, що складається на основі (2), визначеного порядку (m) і буде керуючим чинником, що задовольнятиме вихідні умови. Загальний вигляд цього керуючого чинника не буде залежати від конкретних умов, що задовольняються, а тільки від їх кількості (сукупного параметричного числа m').

Усі результати, отримані за статико-геометричним методом, будуть справедливі і при неповному обсязі вихідних умов, тоді можна застосовувати лінійну функцію або параболічну функцію другого порядку. Але коли йдеться про задоволення умов по кривинам та використанню функції, що управляє кривиною, розглядати такі варіанти не доцільно.

Розглянемо приклад побудови рівноланкової кривої за допомогою статико-геометричного методу. Нехай через дві задані точки необхідно провести дискретну рівноланкову криву. За статико-геометричним методом, якщо $R_i[x_i \quad y_i]$, при $i = -1,..., N+1$ – вузли ламаних, серед яких R_0 та R_N задані, то всі інші, включаючи законтурні R_{-1} і R_{N+1}, необхідно визначити. Нехай до кожної точки R_i, при i = -1,..., $N+1$ прикладено зовнішні зусилля P_i. Тоді, якщо зовнішні зусилля P_i − визначені, точки R_i повинні задовольняти систему рівноваги вузлів:

$$R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1} + K_i P_i = 0, \text{ i = 0, ..., } N \qquad (3)$$

де $K_i[k_{ix} \quad k_{iy}]$ − коефіцієнти, що визначають співвідношення між проекціями векторів P_i на координатні осі та довжинами ланок. У систему (3), як невідомі, включено законтурні вузли R_{-1} і R_{N+1}, це дозволить враховувати як вихідні умови – дотичні у початковій та кінцевій точках дискретної рівноланкової кривої. Вважається, що коефіцієнти $K_i[k_{ix} \quad k_{iy}]$ визначені. Пропишемо ці коефіцієнти у зручній для поставленої задачі інтерпретації. Для цього розглянемо три сусідні вузли ламаної в локальній системі координат (рис. 1, *а*). На рис. 1, *б* вузли такої ламаної позначено точками *A*, *B*, *C*.

Із подоби трикутників (рис. 1, *б*) ΔBED, ΔACF та із того, що $Pi = BE$, запишемо, що:

$$\frac{P_{x_i}}{P_i}=\frac{FC}{AC}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{AC},$$

де $AC=\sqrt{\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)^2+\left(y_{i+1}-y_{i-1}\right)^2}$.

Кінцевий вираз буде мати вигляд:

$$P_{x_i}=\frac{P_i\times\left(y_{i-1}-y_{i+1}\right)}{\sqrt{(x_{i+1}-x_{i-1})^2+(y_{i-1}-y_{i+1})^2}}=k_{ix}P_i;$$
$$P_{y_i}=\frac{P_i\times\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)}{\sqrt{(x_{i+1}-x_{i-1})^2+(y_{i-1}-y_{i+1})^2}}=k_{iy}P_i.$$

Таким чином, координатні складові векторів P_i розраховуються за коефіцієнтами k_{ix}, k_{iy}:

$$k_{ix}=\frac{\left(y_{i-1}-y_{i+1}\right)}{\sqrt{(x_{i+1}-x_{i-1})^2+(y_{i-1}-y_{i+1})^2}};$$
$$k_{iy}=\frac{\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)}{\sqrt{(x_{i+1}-x_{i-1})^2+(y_{i-1}-y_{i+1})^2}}. \tag{4}$$

Задача розв'язується методом послідовних наближень, коли в ітераційному процесі на кожному етапі уточнюються положення всіх вузлів дискретної рівноланкової кривої. Важливо також і те, що цей метод дозволяє утворювати рівноланкову дискретно подану криву при заданому графіку залежності кривини кривої (χ) від довжини, завдяки тому, що довжина векторів зовнішніх зусиль у кожному вузлі такої кривої прямо пропорційна кривині кривої.

Для задач дискретної інтерполяції число заданих параметрів повинно дорівнювати числу вільних параметрів дискретної рівноланкової кривої. У випадку, коли ця умова відсутня (перших більше ніж других) необхідно звільнити додаткові параметри дискретної рівноланкової кривої. У даній роботі дискретна інтерполяція проводитися за рахунок звільнення параметрів зовнішнього навантаження. Число параметрів такого навантаження змінюватися за рахунок зміни його функціонального розподілу між вузлами.

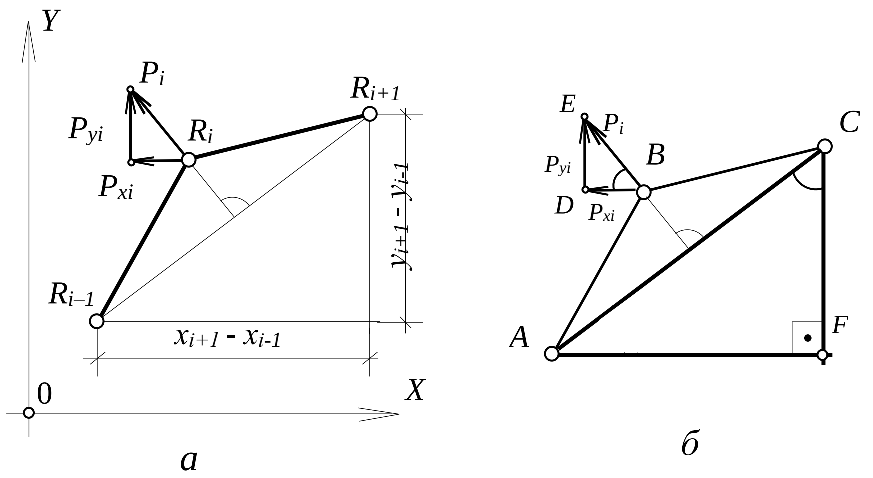

Рис. 1. Схема для розрахунку координатних складових зовнішніх зусиль прикладених до дискретної рівноланкової кривої :

а) підрахунок коефіцієнтів k_{ix}, k_{iy};

б) розрахункова схема для визначення зусиль P_{xi}, P_{yi}

Підставляючи (4) у (3) маємо у координатному вигляді систему рівнянь рівноваги вузлів:

$$\begin{cases} x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + \dfrac{y_{i-1} - y_{i+1}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i-1} - y_{i+1})^2}} |P_i| = 0, \quad i = 0,..., N; \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \dfrac{x_{i+1} - x_{i-1}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i-1} - y_{i+1})^2}} |P_i| = 0, \quad i = 0,..., N; \\ x_0 = a_0; \\ y_0 = b_0; \\ x_N = a_N; \\ y_N = b_N. \end{cases} \tag{5}$$

Це нелінійна, але визначена система, яка містить $2(N+1)$ рівняння з невідомими змінними і стільки ж невідомих змінних (включаючи законтурні точки). У зв'язку з цим така система має розв'язок.

Системи (3) або (5) визначають не просто врівноважену ламану але і рівноланкову, що є прямим наслідком обчислювання коефіцієнтів K_i за (4). За статико-геометричним методом пропонується виконувати розв'язок за ітераційний алгоритм, де задається перше наближення точок R_i^1.

За формулами (4) відшукується перше наближення коефіцієнтів $K_i^1[k_{ix}^1 \quad k_{iy}^1]$. Система (3) розв'язується відносно точок R_i, які приймаються за друге наближення R_i^2. В ітераційному процесі розглядаючи K_i^t (де t –

номер ітерації), як функцію R_i^t, за формулами (4) отримуємо остаточне значення координат точок R_i, визначившись із критерієм зупинки ітераційного процесу.

Для забезпечення рівності ланок доцільно критерієм зупинки обрати $\ell_{i\max} - \ell_{i\min} \le \delta$, де ℓ_i − довжина ланки *і*-ої ітерації, а δ − припустима похибка. Рівняння (3) будемо називати рівняннями базової побудови. Вони дозволяють будувати дискретну рівноланкову криву за двома заданими точками та заданими значеннями P_i, і визначають *N-1* внутрішню точку кривої (*N* – номер кінцевої точки) та дві законтурні точки R_{-1} і R_{N+1}. Ця крива, у загальному випадку, однозначно не проектується на осі *ОХ* та *ОУ*.

Для пояснення підрахунку кількості параметрів будемо поступово розглядати можливі варіанти утворення дискретної рівноланкової кривої, починаючи з найпростішого і додаючи далі різні геометричні умови. Поєднання геометричних умов буде впливати на форму кривої і її характеристики.

Розглянемо більш детально геометричні умови які необхідно враховувати при конструюванні дискретної рівноланкової кривої будь якої практичної задачі:

1. Необхідність проходження дискретної рівноланкової кривої через вузли, координати та номери яких відомі (R_i, при *і* = -1,..., *N+1*).

2. Завдання дотичної у вузлі, номер якого відомий, чи координати якого можуть бути відомими величинами. У загальному випадку (це стосується дотичних в початковій та кінцевій точках) дотичні можуть задаватись двома точками *Р1* та *Р3* або *Р2* та *Р4* (рис.2, *а*). У дискретному вигляді кутом нахилу, точніше $tg\alpha_0$, $tg\alpha_n$ (рис. 2, *б*). Кут вважатиметься додатнім, якщо підрахунок його буде йти від осі *ОХ* проти годинникової стрілки, і від'ємним, якщо за годинниковою стрілкою. Оскільки, основні задачі, що розв'язуються, включають в себе завдання дотичних у початковій та кінцевій точках, до системи рівнянь рівноваги вузлів (3) обов'язково додаються рівняння дотичних для початкового та кінцевого вузлів:

$$\begin{aligned} x_i \times tg\alpha_0 - x_{i-1} \times tg\alpha_0 - y_i - y_{i-1} = 0, \\ x_{n+1} \times tg\alpha_n - x_n \times tg\alpha_n - y_{n+1} - y_n = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки, кожне рівняння включає координати вузла за межами дискретної рівноланкової кривої (вузли A_{i-1} та A_{n+1} рис. 2), то для цих вузлів, також, записуються рівняння рівноваги.

У тому випадку, коли дотична (t_i) до дискретної рівноланкової кривої задана у вузлі A_i, і в дискретному вигляді, паралельна відрізку $A_{i-1}A_{i+1}$ кут нахилу її можна аналітично записати через координати вузлів A_{i-1} та A_{i+1}, суміжних з A_i. (рис. 2, *в*),

$$tg\alpha = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \tag{7}$$

Коли дотична задається у проміжку між двома суміжними вузлами, тоді кут її нахилу записується через координати цих вузлів (рис.2, *г*),

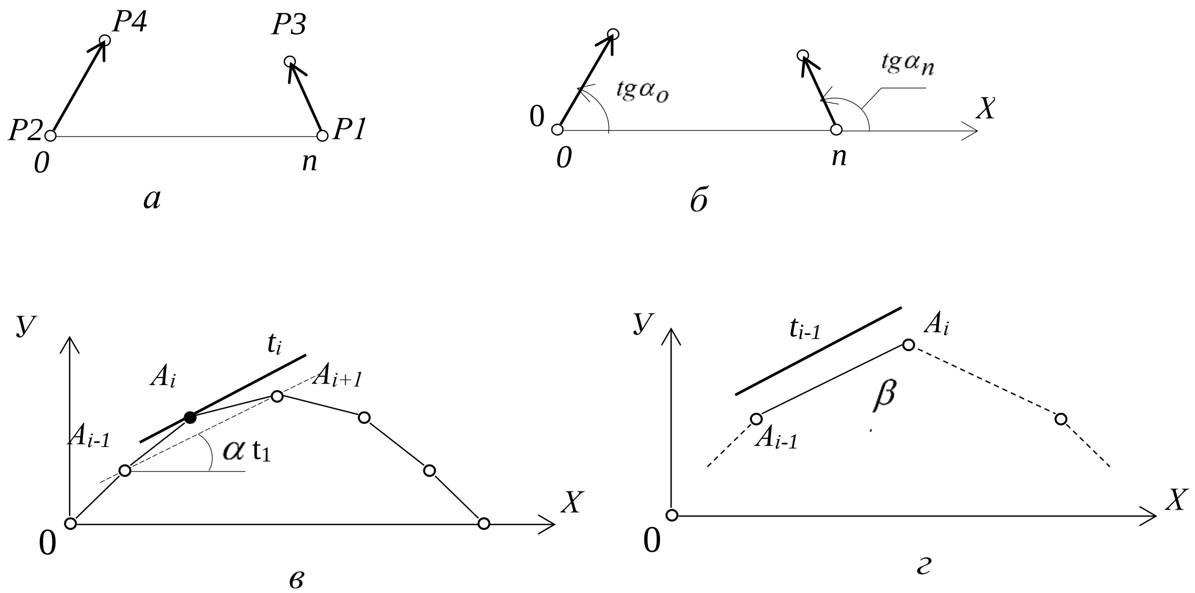

Рис. 2. Завдання дотичних у початковій та кінцевій точках, а також можливі варіанти завдання дотичних у проміжних точках

$$tg\beta = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \tag{8}$$

У цьому випадку будемо мати похибку еквівалентну похибці дискретного моделювання неперервної кривої і вона буде наближатися до нуля при необмеженому зменшенні кроку дискретизації. Оскільки статико-геометричний метод передбачає складання системи рівнянь рівноваги вузлів (3) або (5), то рівняння (7), (8) необхідно включити до цієї системи. У такому випадку, можна взяти число невідомих зусиль P_i, яке буде дорівнювати числу заданих кутів дотичних.

3. Завдання кривини у початковій та кінцевій точках, координати вузлів можуть бути відомими та невідомими. Для дискретної рівноланкової кривої кривина у вузлі A_i прямо пропорційна модулю зовнішнього зусилля, прикладеного до цього вузла:

$$\chi = \frac{kP_i}{\ell^2}, \tag{9}$$

де P_i – модуль зовнішнього зусилля, прикладеного до A_i вузла; k – коефіцієнт пропорційності; ℓ – довжина ланки дискретної рівноланкової кривої;

Тому завдання кривини будь-якому вузлі дискретної кривої (це також стосується початкового та кінцевого вузлів), рівноцінно завданню модуля зовнішнього зусилля у цих вузлах.

4. Завдання кривин у проміжних вузлах дискретної рівноланкової кривої (завдання графіку розподілу зовнішнього навантаження між вузлами).

5. Завдання кривини та дотичних у вузлах дискретної рівноланкової кривої.

Слід зауважити, що існує велика кількість можливих комбінації перерахованих вище геометричних умов, яку можна об'єднати в одну таблицю 1.

Таблиця 1

<table>
<tr><th rowspan="2">Закони розподілу зовнішніх зусиль, P_i</th><th colspan="4">Задані геометричні умови</th></tr>
<tr><th>N п/п</th><th>Крайові умови</th><th>N п/п</th><th>Умови в проміжних точках</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$P=0$, $P=const$, $P = ax+b$, $P=a_0+a_1S_1+a_2S^2+...+a_mS$ де S – довжина дискретної рівноланкової кривої</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">x_0y_0, x_n,y_n</td><td>1</td><td>—</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x, y (координати точки)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">x_0y_0, x_n,y_n + дотичні (t_1, t_2)</td><td>3</td><td>N_i точки</td></tr>
<tr><td>4</td><td>t, (дотична)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">x_0y_0, x_n,y_n + кривина (χ_1, χ_2)</td><td>5</td><td>χ ,(кривина)</td></tr>
<tr><td>6</td><td>x, y + дотична в ній</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">x_0y_0, x_n,y_n + дотична (t_1, t_2) x_0y_0, x_n,y_n</td><td>7</td><td>x, y + кривина в ній</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Дотична + кривина в точці</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Дотична + x, y + кривина</td></tr>
</table>

* Якщо задається дотична, то можна вказувати лише номер точки, не задаючи її координати

* Номер точки задається лише у тих випадках, коли якась умова вже задана

Таким чином, складність задачі буде залежати від вихідних умов, точніше, від числа геометричних параметрів що відомі, і враховуючи які, необхідно побудувати дискретну рівноланкову криву, яка буде уособлювати результат розв'язання конкретної практичної задачі.

Висновки та перспективи досліджень. Спираючись на дані, наведені у таблиці 1, можна стверджувати, що всі задачі, які можуть виникнути у процесі конструювання дискретної рівноланкової кривої статико-геометричним методом, підпадають під можливі комбінації геометричних умов. У зв'язку з великою різноманітністю варіантів, підрахунок параметрів буде цілком індивідуальним.

Оскільки, всі зусилля у вузлах будуть завжди пропорційні довжинам ланок, то у процесі вирішення будь-якої практичної задачі, де потрібно сконструювати дискретну криву, завжди на початковому етапі будемо складати систему рівнянь рівноваги вузлів для координат *x, y*, типу (3), враховуючи законтурні вузли. Їх завдання необхідне для можливості задавати дотичні у початковій та кінцеві точках. Далі до цієї системи будуть додаватись рівняння, які будуть аналогами додаткових геометричних умов і рівняння, які будуть дискретними аналогами натуральних рівнянь. Останні враховують властивість, що закон розподілу зусиль зовнішнього навантаження є аналогом розподілу кривини при умові формування кривої

Таким чином, можна зробити наступні висновки:

1. Координати вузлів ДРК визначаються при вирішенні системи рівнянь рівноваги вузлів (3) або (5). У найпростішому випадку, число рівнянь системи відповідає числу невідомих координат вузлів, для всіх вузлів (включаючи законтурні) складаються рівняння рівноваги, які включають однойменні координатні складові зовнішніх зусиль.

2. Урахування додаткових вихідних умов вабить появу додаткових рівнянь, що будуть описувати ці умови. У зв'язку з чим, буде порушена вищеописана рівновага. Яку можна відновити за рахунок вільних параметрів зовнішніх зусиль, прикладених до вузлів.

Дослідження та аналіз задачі побудови дискретної рівноланкової кривої за заданими крайовими умовами показали, що можна вивести єдиний алгоритм підрахунку параметрів у випадку проходження такої кривої через точку чи декілька точок, координати яких задані.

Кожний вузол дискретної рівноланкової лінії належіть кривій, порядок якої залежіть від функції розподілу зовнішнього навантаження між вузловими точками кривої. Чим складніше функція розподілу навантаження, тим більша кількість точок однієї кривої визначають її форму, тим складніший розрахунковий шаблон буде використовуватися. На складність шаблону впливає кількість початкових умов, яких необхідно дотримуватися при побудові дискретної рівноланкової кривої.

Література

1. *Захарова Т.М.* Узагальнены параметричны рывняння просторовиз кривих у функції натурального рівняння / Міжвідомчий науково-технічний збірник «*Прикладна геометрія та інженерна графіка*». Київ : КНУБА, 2016. Вип. 93. С. 28 – 32.
2. *Ковалов С.*М., Ковтун О.М. Формування рівноланкової дискретно поданої кривої з заданою кривиною / Міжвідомчий науково-технічний збірник «*Прикладна геометрія та інженерна графіка*». Київ : КНУБА, 2000. Вип. 67. С. 33 – 35.

3. *Ковтун О.М.* Конструювання дискретних точкових каркасів квізіканалових поверхонь за наперед заданими умовами: автореф. дис… канд. техн. наук : 05.01.01, Київ, 2003. 20 с.
4. *Мостовенко Ол-сій В., Анпілогова В.О.* Дискретна модель ланцюгової лінії / Міжвідомчий науково-технічний збірник «*Прикладна геометрія та інженерна графіка*». Київ : КНУБА, 2014. Вип. 92. С. 10 – 34.
5. *S. Ustenko. Geometric modeling of spatial curves given by curvature and torsion. Geom. Comp. Modeling 29, 86–90, 2011.*
6. Устенко І.В. Геометричне моделювання кривих ліній із кривиною, що змінюється синусоїдально / Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ : КНУБА, 2018. Вип. 94. С. 123-127. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/prgeoig_2018_94_22
7. *Serhiy Pylypaka1, Tetiana Kresan1, Oleksandra Trokhaniak, Iryna Taras, Ivan Demchuk* (2021). Parametric Equations of a Spatial Curve as a Function of Length of the Arc with Given Dependences of Curvature and Angle of Ascent / *Journal for Geometry and Graphics Volume 25 (2021), No. 2, 163–170. https://www.google.com.ua/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg25/j25h2pyly.pdf&ved=2ahUKEwjkwY_4s9SGAxWSHXcKHeZIAPwQFnoECC0QAQ&usg=AOvVaw1ee4htUd7t39lHhw7M3I1r*
8. *Burchard, H., Ayers, J., Frey, W., Sapidis, N.,* (1994). Designing FairCurves and Surfaces. SIAM, Philadelphia, USA, pp. 3 – 28.
9. *Saadet Zeynep Bacinoğlu1, Luka Piskorec , Toni Kotnik.* Curved.it: A design tool to integrate making with curved folding into digital design process / ITU A|Z. Vol 16. No 1. March 2019. Pp.11-27.
10. *Найдиш В.М.* Моделювання кривих ліній на основи дискретної інтерполяції / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 1990. Вип. 50. С. 13-17.
11. *Найдиш В.М., Щербина В.М.* Параболічний закон зміни кутів суміжності при загущенні ДПК / тези доповідей міжнародної наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання». Донецьк : ДонГТУ, 2000. С. 160-161.
12. Alexandru Dimca, Giovanna Ilardi, Piotr Pokora and Gabriel Sticlaru. Construction of Free Curves by Adding Lines to a Given Curve. *Results in Mathematics* (2024). Vol. 79 (2024). 1-31. https://doi.org/10.1007/s00025-023-02036-9
13. *Ботвіновська С.І.* Моделювання дискретного аналого єдиної гладкої плоскої кривої лінії / *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. Київ : КНУБА, 2019. Вип. 70. С. 86-98. https://www.google.com.ua/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/02/2019/201970.pdf&ved=2ahUKEwjF9KOx-d-GAxWXQvEDHcLuCCQQFnoECBYQAQ&usg=AOvVaw10VzgBeJG8P61b2F0I041a
14. *Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Золотова А.В., Лось С.О.* Формування дискретного ряду точок складених кривих ліній під дією

нормального навантаження / *Вісник Херсонського національного технічного університету.* 2017. № 3(62). Т.2. 352 с. - С. 278–284.

References

1. *Zakharova T.M.* Uzahalnenы parametrychnы гыvniannia prostorovyz kryvykh u funktsii naturalnoho rivniannia */ Mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk «Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika».* Kyiv : KNUBA, 2016. Vyp. 93. S. 28 – 32.
2. *Kovalov S.M., Kovtun O.M.* Formuvannia rivnolankovoi dyskretno podanoi kryvoi z zadanoiu kryvynoiu */ Mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk «Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika».* Kyiv : KNUBA, 2000. Vyp. 67. S. 33 – 35.
3. *Kovtun O.M.* Konstruiuvannia dyskretnykh tochkovykh karkasiv kvizikanalovykh poverkhon za napered zadanymy umovamy: avtoref. dys… kand. tekhn. nauk : 05.01.01, Kyiv, 2003. 20 s.
4. *Mostovenko Ol-sii V., Anpilohova V.O.* Dyskretna model lantsiuhovoi linii / Mizhvidomchyi *naukovo-tekhnichnyi zbirnyk* «Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika». Kyiv : KNUBA, 2014. Vyp. 92. S. 10 – 34.
5. *S. Ustenko.* Geometric modeling of spatial curves given by curvature and torsion. *Geom. Comp. Modeling* 29, 86–90, 2011.
6. *Ustenko I.V.* Heometrychne modeliuvannia kryvykh linii iz kryvynoiu, shcho zminiuietsia synusoidalno / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 2018. Vyp. 94. S. 123-127. Rezhym dostupu: http://nbuv.gov.ua/UJRN/prgeoig_2018_94_22.
7. *Serhiy Pylypaka1, Tetiana Kresan1, Oleksandra Trokhaniak, Iryna Taras, Ivan Demchuk* (2021). Parametric Equations of a Spatial Curve as a Function of Length of the Arc with Given Dependences of Curvature and Angle of Ascent / *Journal for Geometry and Graphics*. Volume 25 (2021), No. 2, 163–170. *https://www.google.com.ua/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg25/j25h2pyly.pdf&ved=2ahUKEwjkwY_4s9SGAxWSHXcKHeZIAPwQFnoECC0QAQ&usg=AOvVaw1ee4htUd7t39lHhw7M3I1r*
8. *Burchard, H., Ayers, J., Frey, W., Sapidis, N.,* (1994). Designing FairCurves and Surfaces. SIAM, Philadelphia, USA, pp. 3 – 28.
9. *Saadet Zeynep Bacinoğlu1, Luka Piskorec , Toni Kotnik.* Curved.it: A design tool to integrate making with curved folding into digital design process / ITU A|Z. Vol 16. No 1. March 2019. Pp.11-27.
10. *Naidysh V.M.* Modeliuvannia kryvykh linii na osnovy dyskretnoi interpoliatsii / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 1990. Vyp. 50. S. 13-17.
11. *Naidysh V.M., Shcherbyna V.M.* Parabolichnyi zakon zminy kutiv sumizhnosti pry zahushchenni DPK / tezy dopovidei mizhnarodnoi nauk.-prakt. konf. «Suchasni problemy heometrychnoho modeliuvannia». Donetsk : DonHTU, 2000. S. 160-161.

12. *Alexandru Dimca, Giovanna Ilardi, Piotr Pokora and Gabriel Sticlaru*. Construction of Free Curves by Adding Lines to a Given Curve. *Results in Mathematics* (2024). Vol. 79 (2024). 1-31. https://doi.org/10.1007/s00025-023-02036-9.
13. *Botvinovska S.I.* Modeliuvannia dyskretnoho analoho yedynoi hladkoi ploskoi kryvoi linii / Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannia. Kyiv : KNUBA, 2019. Vyp. 70. S. 86-98.
https://www.google.com.ua/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/02/2019/201970.pdf&ved=2ahUKEwjF9KOx-d-GAxWXQvEDHcLuCCQQFnoECBYQAQ&usg=AOvVaw10VzgBeJG8P61b2F0I041a
14. *Botvinovska S.I., Kovalov S.M., Zolotova A.V., Los S.O.* Formuvannia dyskretnoho riadu tochok skladenykh kryvykh linii pid diieiu normalnoho navantazhennia */ Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu.* 2017. № 3(62). T.2. 352 s. S. 278–284.

Doctor of Technical Sciences, Professor **Botvynovska Svitlana**,
botvinovska.si@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1832-1342
Associate Professor **Alla Zolotova,**
zolotova.av@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8014-3834

Kyiv National University of Construction and Architecture

GENERAL PARAMETRIC ANALYSIS OF THE PROBLEM OF GEOMETRIC MODELING OF DISCRETE LEVEL CURVE BY STATIC-GEOMETRIC METHOD

Abstract. This paper presents a general parametric analysis of the problem of geometric modeling of discrete frames of curves with equal links of lines by a static-geometric method taking into account the given initial conditions. The study presents possible ways to take into account the geometric properties of curves of lines, their regularities, those that can arise during modeling of curves of lines. This paper presents a general parametric analysis of the problem of geometric modeling of discrete frames of curves with equal links of lines by a static-geometric method taking into account the given initial conditions. The study presents possible ways to take into account the geometric properties of curves of lines, their regularities, those that can arise during modeling of curves of lines.

It should be noted that all problems that can arise in the process of constructing a discrete equal-bank curve by a static-geometric method fall under different combinations of geometric conditions. Due to the large number of possible options for combining geometric conditions with each other, the calculation of parameters will be completely individual in each case of solving

the given practical problem, namely, when constructing discrete level-bank curves according to the given initial conditions.

The modeling of curves of lines according to the static-geometric method is based on the equilibrium of nodes of discrete represented curves due to the load applied to each node.

Since all the forces in the nodes will always be proportional to the lengths of the links, then in the process of solving any practical problem, where it is necessary to construct a discrete frame of the curve of the line, there will always be a single system of equations of equilibrium of nodes for finding the coordinates of x, y, given the constrictive nodes to which equations will be added, which will be analogues of additional geometric conditions and equations, which will be discrete analogues of natural equations. The latter take into account the property that the law of distribution of external load forces is analogous to the distribution of curvature under the condition of curve formation.

Keywords: static-geometric method; discrete equal-link curve; geometric modeling; parametric analysis; distribution of curvature of the curve