

УДК 621.396.001.2

DOI: 10.32347/0131-579x.2024.106.82-95 к. т. н., доцент **Гнітецька Т.В.**
gnitetsk@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9682-6488

к. п. н., доцент **Гнітецька Г.О.**
gnitetsk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2864-3142

студент **Русецький М.Ю.**
maksrysetskiyzno@gmail.com

студентка **Шульга А.В.**
anna.shulha20@gmail.com

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ СТРУКТУРИ ФАЗОВИХ ПОТОКІВ СИСТЕМИ РЕССЛЕРА

В статті досліджується геометрична структура фазових потоків динамічної системи Ресслера, математична модель якої представлена системою нелінійних диференціальних рівнянь. При певних значеннях керуючих параметрів система Ресслера демонструє хаотичну поведінку. В статті аналізується вплив точок рівноваги системи на процес переходу до хаотичного атрактора та досліджується формування його геометричної структури. Дослідження проводились з використанням теорії стійкості Ляпунова для точок рівноваги системи. В процесі досліджень були віднайдені точки рівноваги системи та проведено їх аналіз на стійкість. Використання методу лінеаризації у визначених точках рівноваги системи дозволило зробити якісну оцінку поведінки системи. Проаналізовано напрямки стискання та розтягування об'ємів фазового простору в околі кожної з отриманих точок рівноваги, що дозволило визначити передумови процесу переходу до хаотичного атрактора та виокремити області початкових умов, при яких фазові траєкторії спрямовуються на хаотичний атрактор або відходять від нього. Розглянуто формування геометричної структури атрактора як результат сукупної взаємодії деформацій фазового об'єму, викликаного точками рівноваги системи. Оскільки в процесі дослідження системи Ресслера аналітичного рішення не було знайдено, використовувались чисельні методи інтегрування. Математичні обчислення проводились із застосуванням пакету для інженерних та наукових розрахунків MATLAB. В результаті проведення серії інтегрувань були побудовані фазові портрети системи Ресслера у тривимірному фазовому просторі для різних початкових умов. Таким чином, були візуалізовані перехідні процеси

в системі, що дозволило визначити характерні області початкових умов та оптимізувати їх вибір.

Проведені дослідження є продовженням роботи [1] і направлені на більш широке використання властивостей детермінованого хаосу в прикладних задачах.

Ключові слова: динамічні системи; хаотична динаміка; атрактор; фазовий простір; фрактальна геометрія.

Постановка проблеми. Для багатьох динамічних систем аналіз геометричної структури фазового простору дозволяє прогнозувати поведінку системи впродовж тривалого часу при різних початкових умовах. Особливий інтерес при дослідженні фазового простору викликають динамічні системи здатні демонструвати хаотичну поведінку. Рух на хаотичному атракторі у фазовому просторі представляється сукупністю фазових кривих, яка характеризується фрактальною розмірністю. В більшості робіт розглядають хаотичний атрактор та рух на ньому як певну особливість системи. В наших роботах ми намагаємось дослідити саме геометричну структуру атрактора, чому він має саме таку будову, які фактори вплинули на його форму, розглянути поведінку фазових кривих в околі хаотичного атрактора. Тобто, фактично розглянути перехідні процеси, які супроводжують процес виходу фазової кривої на хаотичний атрактор, та в подальшому нескінченний рух на ньому. В якості інструмента дослідження було обрано теорію стійкості Ляпунова для точок рівноваги системи. Для дослідження використовувалась лінеаризація нелінійної системи в околі знайдених точок рівноваги, що дозволило зробити якісну оцінку поведінки системи та знайти локальні напрямки стискання та розтягування фазових об'ємів.

Ціль статті. Ціллю даної статті є дослідження геометричної структури фазових потоків динамічної системи Ресслера, математична модель якої представлена системою нелінійних диференціальних рівнянь. Для досягнення поставленої цілі планується шляхом визначення точок рівноваги системи та дослідження їх на стійкість провести якісну оцінку поведінки системи Ресслера [2] та оцінити вплив точок рівноваги на формування геометричної структури атрактора. Для підтвердження зробленої якісної оцінки виконаємо серію інтегрувань системи з побудовою її фазових портретів у тривимірному фазовому просторі та проведемо аналіз перехідних процесів при різних початкових умовах для визначення факторів, що впливають на формування геометричної структури хаотичного атрактора.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Нелінійні системи, здатні демонструвати хаотичну поведінку, знаходять своє застосування в ряді прикладних задач, зокрема в задачах кодування та захисту інформації [3-

б), в медицині [7,8], ін. Фрактальна геометрія широко використовується для кодування та передачі зображень зі зменшенням обсягів використаної пам'яті, розпізнавання образів, створенні різноманітних фактур в комп'ютерній графіці [9, 10]. Тому дослідження детермінованого хаосу та його властивостей має велике прикладне значення.

Основна частина. Проведемо дослідження геометричної структури фазових потоків динамічної системи з хаотичною поведінкою на прикладі системи диференціальних рівнянь Ресслера:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(y+z) \\ \frac{dy}{dt} &= x + a*y \\ \frac{dz}{dt} &= a + z*(x-b)\end{aligned}\tag{1}$$

Відомо, що при параметрах $a=1/5$ і $b=5$ в системі виникає хаотичний атрактор [2]. Оскільки аналітичного розв'язку цієї системи не було знайдено, проводилося чисельне інтегрування (1) методом Рунге-Куты 5 порядку з використанням пакету для інженерних та наукових розрахунків MATLAB.

Спочатку були віднайдені точки рівноваги системи. Для цього значення похідних прирівнювались нулю.

$$\begin{aligned}-(y+z) &= 0 \\ x + a*y &= 0 \\ a + z*(x-b) &= 0\end{aligned}$$

В результаті обчислень було виявлено, що досліджувана система при заданих параметрах має дві точки рівноваги.

Перша точка рівноваги з координатами (x,y,z) :

$$\begin{aligned}x &= 0.0080128411245775442247211765277524 \\ y &= -0.040064205622887721123605882638762 \\ z &= 040064205622887721123605882638762\end{aligned}\tag{2}$$

Друга точка рівноваги з координатами (x,y,z) :

$$\begin{aligned}x &= 4.9919871588754224557752788234722 \\ y &= -24.959935794377112278876394117361 \\ z &= 24.959935794377112278876394117361\end{aligned}\tag{3}$$

На рис. 1 показано атрактор Ресслера та положення обчислених точок рівноваги відносно нього у фазовому просторі. Як видно з малюнка, перша точка рівноваги лежить в області атрактора, а друга знаходиться за його межами. Розглянемо вплив такого розташування точок рівноваги на

формування геометричної будови атрактора та проаналізуємо вплив стійкості точок рівноваги на формування басейну атрактора. Басейном атрактора є область притягування фазових траєкторій з початковими умовами, які приводять до їх попадання на хаотичний атрактор.

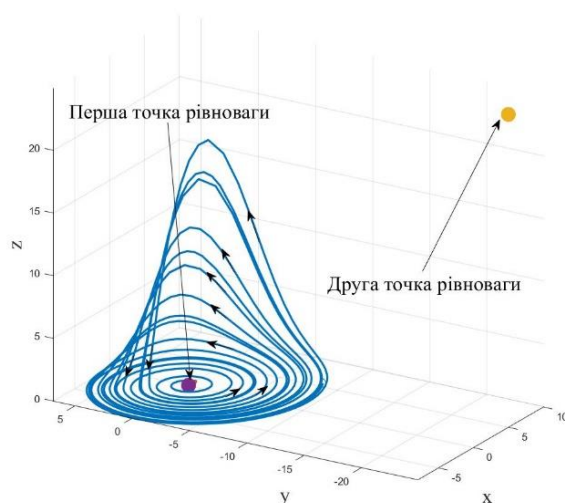


Рис.1 Зображення атрактора Ресслера та положення обчислених точок рівноваги у фазовому просторі

Для вирішення поставленої задачі проведемо дослідження точок рівноваги системи на стійкість, використовуючи теорію стійкості Ляпунова. Для цього проведемо лінеаризацію системи для кожної з отриманих точок рівноваги.

Для проведення лінеаризації системи на першому етапі було отримано Якоб'ян системи:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1/5 & 0 \\ z & 0 & x-5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Для локальної лінеаризації системи в околі цих точок рівноваги підставляємо значення отриманих координат в (4) у результаті чого отримуємо матриці лінеаризації.

Для першої точки рівноваги з координатами (2) матриця лінеаризації A системи рівнянь (1) прийме наступні значення:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ 0.040064205622887721123605882638762 & 0 & -4.9919871588754224557752788234722 \end{bmatrix}$$

Знаходимо власні значення матриці A , як корені вікового рівняння. В результаті обчислень було отримано три корені:

$$l_1 = 0.096130662686061952449394586299605 - 0.99534109183976459920658048995899i$$

$$l_2 = 0.096130662686061952449394586299605 + 0.99534109183976459920658048995899i$$

$$l_3 = -4.9842484842475463606740679960715$$

Два з цих коренів є комплексно спряженими з додатньою дійсною частиною, що свідчить про розтягування фазового об'єму від першої точки рівноваги в напрямках осей e_1 та e_2 локальної лінеаризованої системи координат та обертання, оскільки є комплексна складова [11]. Третій корінь l_3 має від'ємне значення, що свідчить про стискання фазового об'єму до точки рівноваги в напрямку e_3 .

На рис. 2 продемонстровано серію фазових траєкторій отриманих в процесі інтегрувань при початкових умовах обраних поблизу першої точки рівноваги. Стрілками показано напрямок формування траєкторій фазових кривих у результаті стискання фазового об'єму e_3 . Проявляється також закручування траєкторій в площині осей e_1 та e_2 за рахунок впливу комплексної складової коренів l_1 та l_2 при наближенні до першої точки рівноваги.

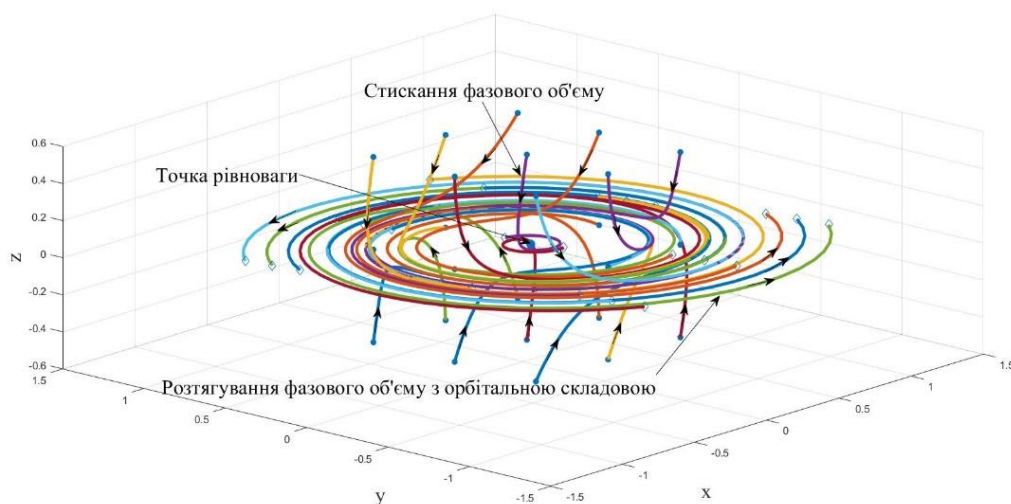


Рис.2 Зображення фазових траєкторій в околі першої точки рівноваги системи Ресслера

На рис. 3 зображено узагальнену структуру фазових потоків в околі першої точки рівноваги в координатах e_1 , e_2 , e_3 лінеаризованої системи та форму поверхонь, на яких розміщуються фазові криві в процесі формування фазового портрету системи.

Для другої точки рівноваги з координатами (3) маємо матрицю лінеаризації зі значеннями:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ 24.959935794377112278876394117361 & 0 & -0.0080128411245775442247211765277524 \end{bmatrix}$$

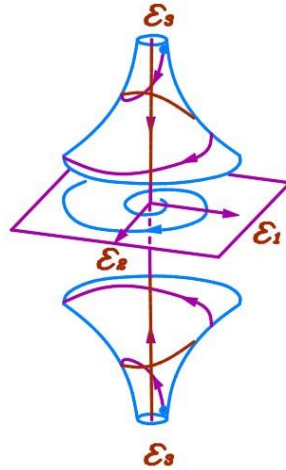


Рис. 3 Узагальнена структура фазових потоків в околі першої точки рівноваги в координатах лінеаризованої системи

Знаходимо власні значення матриці A , як корені вікового рівняння. В результаті було отримано три корені:

$$l_1 = 0.19199899462039866202658336587025$$

$$l_2 = -0.0000059178724881031256522711990025395 - 5.0949323350333428712041398058599i$$

$$l_3 = -0.0000059178724881031256522711990025395 + 5.0949323350333428712041398058599i$$

Один з цих коренів додатній, що у відповідності до теорії стійкості Ляпунова, свідчить про розтягування фазового об'єму в локальному напрямку e_1 , а от два других корені є комплексно спряженими з від'ємною дійсною частиною, що свідчить про закручування траєкторій в площині осей e_2 та e_3 з притягуванням до другої точки рівноваги.

На рис. 4 зображено фазовий портрет системи в околі другої точки рівноваги, як результат серії інтегрувань при початкових умовах обраних поблизу другої точки рівноваги.

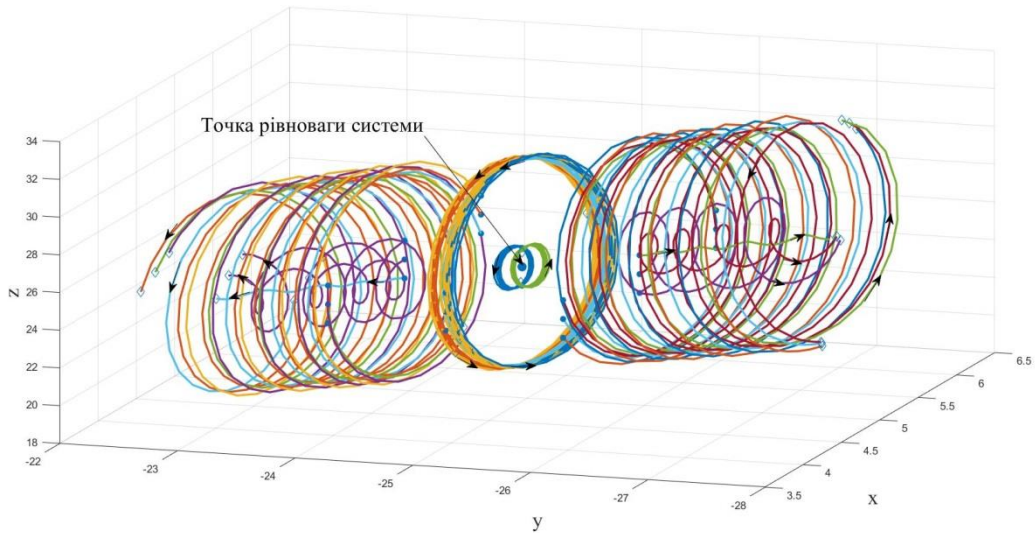


Рис.4 Зображення фазових траєкторій в околі другої точки рівноваги системи Ресслера

З рис. 4 видно також що положення системи координат локальної лінеаризованої системи e_1, e_2, e_3 поблизу другої точки рівноваги не співпадає з напрямками осей x, y, z . На рис.5 зображено узагальнену структуру фазових потоків в околі другої точки рівноваги в координатах лінеаризованої системи координат e_1, e_2, e_3 та форму поверхонь, на яких розміщуються фазові криві в процесі формування фазового портрету системи з урахуванням напрямків розтягування-стискання фазових об'ємів

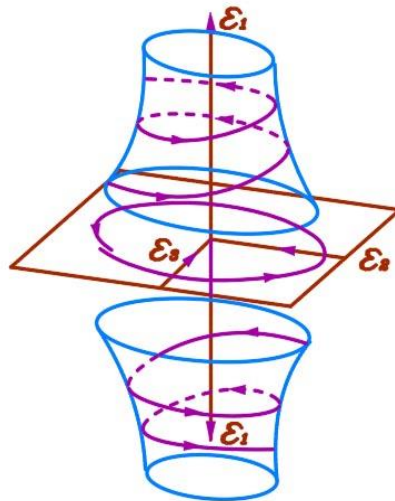


Рис. 5 Узагальнена структура фазових потоків в околі другої точки рівноваги в координатах лінеаризованої системи

Також можна зробити певні висновки про вплив другої точки рівноваги на формування меж басейна притягування хаотичного атрактора. На рис. 6 представлено зображення фазових траєкторій обчислених при

початкових умовах, вибраних в околі другої точки рівноваги системи Ресслера, при збільшеному часі інтегрування. Так з рис. 6 видно, що по різні боки від другої точки рівноваги у напрямку локальної осі e_1 з плином часу траєкторії або спрямовуються на хаотичний атрактор, підпадаючи в область дії першої точки рівноваги, або віддаляються від нього.

Тобто, друга точка рівноваги належить межі басейну притягування хаотичного атрактора.

За визначеними точками рівноваги системи та їх впливом на фазовий об'єм можна зробити прогноз про загальну структуру фазових потоків нелінійної системи. Він полягає у наступному. Основна частина хаотичного атрактора лежить поблизу першої точки рівноваги. Лінеаризація тільки локально описує процеси нелінійної системи. Формування геометрії атрактора обумовлено взаємодією деформацій фазового об'єму викликаного обома точками рівноваги. Так підняття фазової траєкторії з формуванням «мушлі» в просторі викликано суттєвішим впливом комплексної складової характеристичних коренів матриці лінеаризації для другої точки рівноваги.

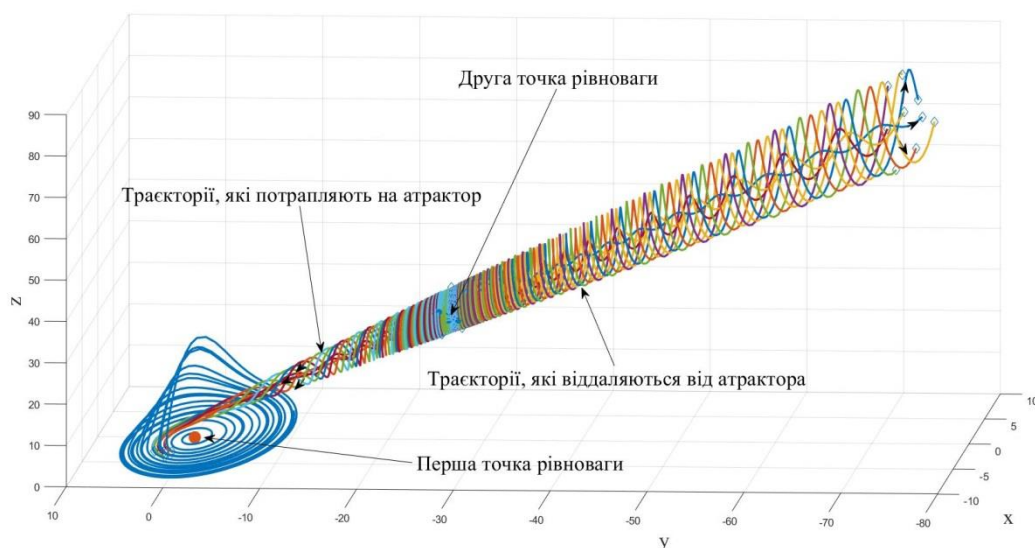
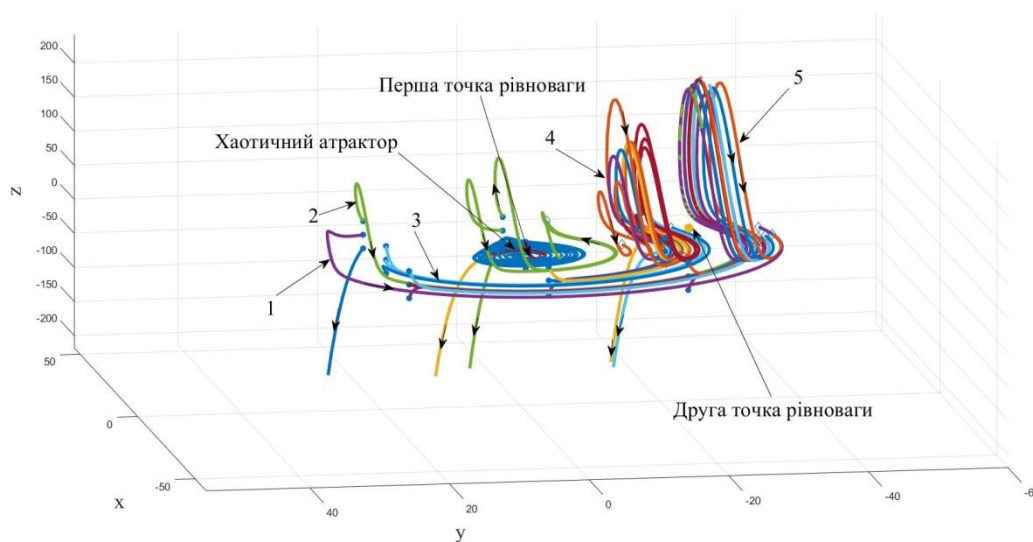


Рис. 6 Зображення фазових траєкторій в околі другої точки рівноваги системи Ресслера при збільшеному часі інтегрування

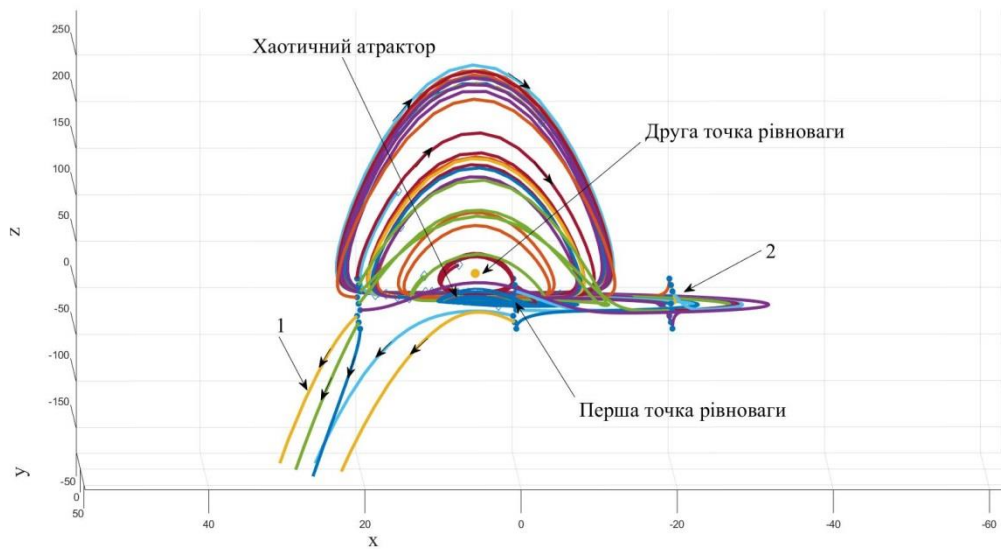
На рис. 7 показано характерні області початкових умов які демаркують басейн атрактора в фазовому просторі. Як видно з рис. 7, а при початкових умовах вибраних з області 5, що лежить за другою точкою рівноваги по відношенню до атрактора у напрямку осі e_1 , фазові траєкторії віддаляються від атрактора. При початкових умовах з області 4, тобто в околі другої точки рівноваги розташованої по напрямку e_1 ближче по відношенню до атрактора, фазові траєкторії закручуються наближаючись до атрактора з подальшим потрапленням на нього.

Фазові траєкторії 1, 2 та 3 (рис. 7, а) з близькими початковими умовами демонструють суттєву різницю поведінки в часі. Тобто, фазові траєкторії 1 та 2 не притягуються до атрактора, а фазова траєкторія 3 потрапляє на атрактор. Отже між фазовими траєкторіями 2 та 3 проходить сепаратрисний контур, який є межею басейну притягування хаотичного атрактора. Визначення межі сепаратрисного контура в просторі потребує більш детальних досліджень. На рис. 7, б зображено той же фазовий портрет системи, але повернутий відносно осі z приблизно на 90 градусів.

З рис.7, б видно, що нижче площини обертального руху атрактора також можна визначити дві області. Область 1, яка в проекції знаходиться ближче до другої точки рівноваги, розташована під атрактором і відповідає початковим умовам тих фазових траєкторій, які відходять від атрактора. Фазові траєкторії з початковими умовами з області, що знаходиться ближче до першої точки рівноваги, спочатку підіймаються в напрямку стискання фазового об'єму в околі першої точки рівноваги, але сукупний вплив обертальних складових для першої та другої точок рівноваги призводить до виходу фазових траєкторії за межі хаотичного атрактора. Тоді як фазові траєкторії з області 2 яка знаходиться правіше першої точки рівноваги (рис. 7, б), потрапляють на атрактор, оскільки знаходяться під суттєвішим впливом стискання фазового об'єму в околі першої точки рівноваги, або покидають зону атрактора, якщо початкова умова лежить за межами сепаратрисного контура.



а



б

Рис.7 Загальна структуру фазових потоків системи Ресслера з виокремленням характерних областей початкових умов

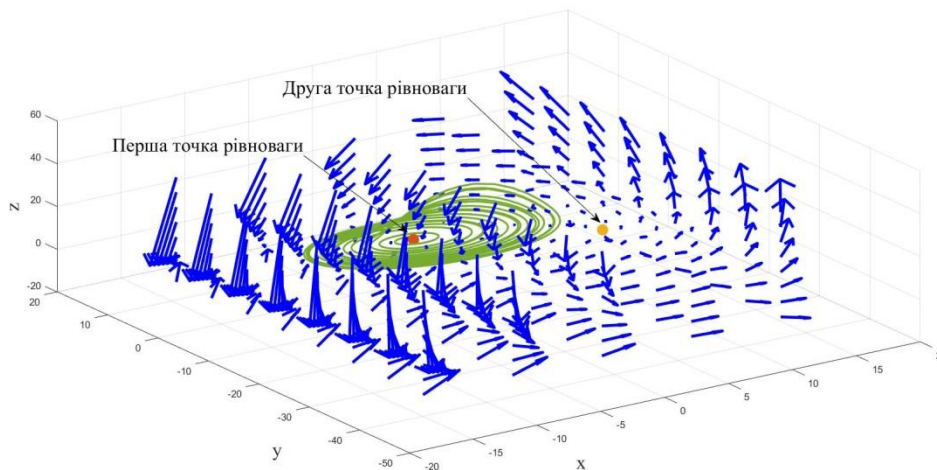


Рис.8 Зображення атрактора Ресслера з накладеним полем градієнта системи та точками рівноваги

На рис. 8 зображено аттрактор Ресслера з накладеним полем градієнта системи та точками рівноваги, що підтверджує зроблені раніше припущення.

Висновки та перспективи. У процесі дослідження визначено точки рівноваги системи Ресслера, проведено дослідження на їх стійкість у відповідності до теорії стійкості Ляпунова та оцінено їх вплив на формування геометричної будови хаотичного атрактора. Було досліджено фазові портрети системи Ресслера у тривимірному фазовому просторі та розглянуто перехідні процеси для різних областей початкових умов. Проаналізовано вплив положення точок рівноваги та їх стійкості на

формування меж басейну притягування хаотичного атрактора. Побудоване поле градієнтів системи Ресслера доповнило аналіз структури фазового простору, зроблений на основі дослідження точок рівноваги. Це дало можливість узагальнити отримані результати та отримати цілісну картину щодо процесів, які відбуваються у хаотичному аттракторі.

Дослідження властивостей детермінованого хаосу є перспективним для подальшого використання в прикладних задачах.

Література

1. Гнітецька Т.В., Гнітецька Г.О., Бондаренко Ю.В., Губар О.В. «Дослідження геометричної структури фазових потоків динамічної системи з хаотичною поведінкою» / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, №105, С. 81 - 93. 2024 doi: 10.32347/0131-579X.2023.105.81-93
2. Ibrahim K.M. *et al.*, «Chaotic behaviour of the Rossler model and its analysis by using bifurcations of limit cycles and chaotic attractors» *J. Phys.: Conf. Ser.* 1003 012099, 2018, doi :10.1088/1742-6596/1003/1/012099
3. Слободян М.О., Таранчук А.А., Гавронський В.Є. «Генерування широкопasmових хаотичних сигналів для прихованої передачі інформації в телекомунікаційних системах» / *Вісник Хмельницького національного університету*. Технічні науки Том 1, №4, (287). С 192-198. 2020. doi:10.31891/2307-5732-2020-287-4-192-198
4. Свинчук О.В., Барабаш О.В., та Олімпієва Ю.І, Ільїн «Застосування фрактальних функцій для шифрування даних в системах захисту інформації» / *Телекомунікаційні та інформаційні технології*. № 1(66) С.15-24 2020 doi:10.31673/2412-4338.2020.011524
5. Гнітецька Т.В. «Дослідження можливості використання гідравлічного випромінювача для передачі складних хаотичних сигналів з фрактальною будовою атрактора для кодування інформації» / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Праці Таврійський державний агротехнологічний університет. Т. 52. Вип .4. С.134-139. 2012.
6. Бобало Ю.Я., Галюк С.Д., Климаш М.М., Політанський Р.Л. Прикладне застосування теорії хаотичних систем у телекомунікаціях : монографія [*Technical sciences ISSN 2307-5732*] ; Нац. ун-т «Львів. політехніка». Львів : Коло, 2015. 178 с.
7. Мар'єнко Н.І., Степаненко О.Ю. «Фрактальний аналіз зображень у медицині та морфології: базові принципи та основні методики» / *Morphologia*. Том 15 № 3, С.196-206. 2021. doi: 10.26641/1997-9665.2021.3.196-206
8. Sandau K, Kurz H: «Modelling of vascular growth processes: a stochastic biophysical approach to embryonic angiogenesis» *J Microsc* ,V 175 pp. 205-213. 1994.

9. Щекань Н.П., Геометричні та алгебраїчні фрактальні методи в інформаційних технологіях обробки і аналізу потоків даних. (2024 18 квітня) [Електронний ресурс]. Доступно: <https://ir.kneu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/6d5332d1-7cbe-406f-b47a-2107887dc4c1/content>
10. Marius-F. Danca, N.V. Kuznetsov. «Matlab code for Lyapunov exponents of fractional order systems» / *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 28, No. 05, 1850067. – 14 p. 2018.
11. Хусаїнов Д. Я., Шатурко А. В. Основи нелінійної динаміки: Посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика». Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. 159 с.

References

1. Hnitetska T.V., Hnitetska H.O., Bondarenko Yu.V., Hubar O.V. Doslidzhennia heometrychnoi struktury fazovykh potokiv dynamichnoi systemy z khaotychnoiu povedinkoiu / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, No 105, pp. 81 - 93. 2024 doi: 10.32347/0131-579X.2023.105.81-93 {in Ukrainian}
2. Ibrahim K.M. et al., Chaotic behaviour of the Rossler model and its analysis by using bifurcations of limit cycles and chaotic attractors *J. Phys.: Conf. Ser.*1003 012099, 2018, doi :10.1088/1742-6596/1003/1/012099 {in English}
3. Slobodian M.O., Taranchuk A.A., Havronskyi V.Ie. Heneruvannia shyrokosmuhovykh khaotychnykh syhnaliv dlia prykhovanoi peredachi informatsii v telekomunikatsiinykh systemakh / *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky*. Vol. 1, №4, (287). pp 192-198. 2020. doi:10.31891/2307-5732-2020-287-4-192-198 {in Ukrainian}
4. Svynchuk O.V., Barabash O.V., ta Olimpiieva Yu.I., Iu.Ilin O. Zastosuvannia fraktalnykh funktsii dlia shyfruvannia danykh v systemakh zakhystu informatsii / *Telekomunikatsiini ta informatsiini tekhnolohii* No 1(66) pp.15-24 2020 doi:10.31673/2412-4338.2020.011524 {in Ukrainian}
5. Hnitetska T.V. Doslidzhennia mozhlyvosti vykorystannia hidravlichnoho vyprominiuvacha dlia peredachi skladnykh khaotychnykh syhnaliv z fraktalnoiu budovoioiu atraktora dlia koduvannia informatsii / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Pratsi/ Tavriiskyi derzhavnyi ahrotekhnolohichniyi universytet*, t.52. №.4. pp.134-139. 2012. {in Ukrainian}
6. Bobalo Iu.Ia., Haliuk S.D., Klymash M.M., Politanskyi R.L. Prykladne zastosuvannia teorii khaotychnykh system u telekomunikatsiiax : monohrafiia. [Technical sciences ISSN 2307-5732] ; Nats. un-t «Lviv. politekhnika». – Lviv : Kolo, 2015. – 178 с. {in Ukrainian}

7. *Marienko N.I., Stepanenko O.Iu.* Fraktalny analiz zobrazhen u medytsyni ta morfolohii: bazovi pryntsyipy ta osnovni metodyky / *Morphologia*. Tom 15. No 3, S.196-206. 2021. doi: 10.26641/1997-9665.2021.3.196-206 {in Ukrainian}
8. *Sandau K, Kurz H:* Modelling of vascular growth processes: a stochastic biophysical approach to embryonic angiogenesis / *J Microsc* ,V 175 pp.205-213. 1994. {in English}
9. *Shchekan N.P.,* Heometrychni ta alhebraichni fraktalni metody v informatsiinykh tekhnolohiiakh obrobky i analizu potokiv dannykh. (2024 18 April) [Online]. Available : <https://ir.kneu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/6d5332d1-7cbe-406f-b47a-2107887dc4c1/content> {in Ukrainian}
10. *Marius-F. Danca, N.V. Kuznetsov.* Matlab code for Lyapunov exponents of fractional order systems / *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 28, No. 05, 1850067. – 14 p. 2018. {in English}
11. *Khusainov D. Ya., Shatyрко A. V.,* Osnovy neliniinoi dynamiky: Posibnyk dlia studentiv spetsialnosti "Prykladna matematika" K.: Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr "Kyivskiy universytet", 2017. 159 s. {in Ukrainian}.

Ph.D., assoc. prof. **Tetjana Hnitetska**
 gnitetsk@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9682-6488

Ph.D., assoc. prof. **Galyna Hnitetska**
 gnitetsk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2864-3142

student **Maksym Rusetskyi**
 maksrysetskiyzo@gmail.com

student **Anna Shulha**
 anna.shulha20@gmail.com

National Technical University of Ukraine Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic
 Institute (Kyiv, Ukraine)

STUDY OF THE GEOMETRIC STRUCTURE OF THE PHASE FLOWS OF THE RESSLER SYSTEM

The article examines the geometric structure of the phase flows of the Ressler dynamic system, the mathematical model of which is represented by a system of nonlinear differential equations. At certain values of the control parameters, the Ressler system exhibits chaotic behavior. The article analyzes the influence of system equilibrium points on the process of transition to a chaotic attractor and investigates the formation of its geometric structure. The research was conducted using the Lyapunov stability theory for the equilibrium points of the system. In the process of research, the equilibrium points of the system were found and their stability analysis was carried out. The use of the linearization method at the determined equilibrium points of the system made it possible to make a qualitative assessment of the system's behavior. The

directions of compression and expansion of the volumes of the phase space around each of the obtained equilibrium points were analyzed, which made it possible to determine the prerequisites of the process of transition to a chaotic attractor and to single out the areas of initial conditions under which the phase trajectories are directed to the chaotic attractor or depart from it. The formation of the geometric structure of the attractor is considered as a result of the combined interaction of deformations of the phase volume caused by the equilibrium points of the system. Since no analytical solution was found during the research of the Ressler system, numerical integration methods were used. Mathematical calculations were performed using the MATLAB package for engineering and scientific calculations. As a result of a series of integrations, phase portraits of the Ressler system were constructed in three-dimensional phase space for various initial conditions. Thus, transient processes in the system were visualized, which made it possible to determine the characteristic areas of the initial conditions and optimize their selection.

The conducted research is a continuation of the work [1] and is aimed at a wider use of the properties of deterministic chaos in applied problems.

Keywords: dynamic systems; chaotic dynamics; attractor; phase space; fractal geometry.