УДК 519.21
DOI: 10.32347/0131-579x.2024.106.156-167

к. ф-м. н. доцент **Наголкіна З.І.**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
к.ф-м.н. доцент **Філонов Ю.П.**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
Київський національний університет будівництва і архітектури

МАЛІ ВИПАДКОВІ ЗБУРЕННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

У даній роботі розглядається рівняння теплопровідності з малим випадковим збуренням. Таке рівняння при деяких припущеннях може бути інтерпретоване як математична модель реального процесу передачі тепла в випадково неоднорідному середовищі. Нехай u (t, x) температура деякого тіла в момент часу t в точці з узагальненою координатою x. Тобто $u_t(x)$ *−розподіл температур і є неперервною функцією від x. Будемо розглядати цю функцію, як елемент гільбертова нескінченно вимірного простору H. Це можливо, якщо, наприклад, ввести відповідну норму. Більш того, якщо розглядати простір Соболева з відповідною нормою, то можна врахувати і граничні умови. Але в цій роботі ми обмежимось задачею з початковими умовами, тобто задачею Коші в відповідному просторі. Таким чином рівняння теплопровідності можна розглядати, як рівняння з необмеженим оператором A(t) в гільбертовому просторі H з областю визначення щільно вкладеною в цей гільбертів простір* $D_A \subset H$, *причому* D_A *не залежить від t. Теорія детермінованих рівнянь такого типу розвинена в роботах [1], [2]. Там же розглянуті властивості еволюційних операторних сімей в залежності від розташування відповідної резольвенти оператора A(t). Саме оцінка* $\|U(t,s)x\| \le exp\alpha(t-s)\|x\|$ *в нормі гільбертового простору є ключовою при доведенні існування єдиного розв'язку стохастичного диференціального рівняння з необмеженим оператором знесення в формі Іто. Мале випадкове збурення такого рівняння можливо описувати в деяких випадках, як стохастичне диференціальне рівняння типу Іто з необмеженим знесенням і малим параметром при дифузійному члені. Стохастичне диференціальне рівняння з малим збуренням при дифузійному члені розглядається за допомогою стандартної методології розкладу в ряд по малому параметру. Для стохастичного рівняння з обмеженим нелінійним*

коефіцієнтом знесення в просторі R^nце було зроблено в [3]. При виконанні стандартних умов існування єдиного розв'язку рівняння Іто в роботі отримані в явному вигляді функції, що є відповідними наближеннями розкладу розв'язку рівняння в ряд по степеням малого параметра. Дана оцінка залишкового члена цього ряду. При цьому всі оцінки отримані в середньому квадратичному в відповідних нормах гільбертового простору.

Ключові слова: стохастичне рівняння; рівняння в частинних похідних; умовне середнє; малий параметр; резольвента оператора; стохастична еквівалентність; вимірність; випадковий процес; еволюційний оператор; простір Гільберта; дифузійний процес; інтегральне рівняння; початкове значення; нерівність Гронуола; функціональний простір; нелінійні коефіцієнти.

Постановка проблеми. Розглядається рівняння теплопровідності в випадково неоднорідному середовищі. Вважаємо, що вплив випадковості враховується у вигляді аддитивного випадкового доданку. Нехай u(t,x) є температура деякого тіла, де t- час, а x - узагальнена координата. В кожний момент часу функція $u_t(x)$ описує розподіл температур і є неперервною від x. Вважаємо, що ця неперервна функція є елементом дійсного сепарабельного гільбертового простору H. Тоді диференціальний оператор, як функція від часу є необмеженим оператором в гільбертовом просторі, і весь процес теплопровідності з малим випадковим збуренням і заданим початковим розподілом температур може моделюватись, як задача Коші для стохастичного диференціального рівняння Іто в гільбертовому просторі H з необмеженим коефіцієнтом знесення і малим параметром при дифузійному члені. Згідно з традиційним методом дослідження впливу малого параметра на розвязок рівняння обидві його частини розкладають в ряд Тейлора по степеням малого параметру і прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях. Так отримані коефіцієнти називають наближеннями. Можливість розкладу функції в ряд Тейлора обумовлена її диференційованістю к раз. Проте проблема полягає в необмеженності коефіцієнта знесення. Тобто він може бути диференційований тільки на підмножині $D_A \subset H$. Для того, щоб диференціювання було можливим, треба розглянути стохастичне рівняння в дещо іншій формі, пов'язаній з еволюційною сім'єю операторів, які існують і сильно неперервно диференційовані в усьму просторі H [4]. Розклад в ряд за малим параметром розв'язку стохастичного диференціального рівняння з обмеженими нелінійними коефіцієнтами в просторі R^n було розглянуто в роботі [3]. Там же було отримано рівняння для відповідних наближень.

Особливість цієї роботи полягає в можливості одержання аналогічних результатів саме для рівняння з необмеженим коефіцієнтом знесення.

Ціль статті. Визначити можливості розвинення в ряд по малому параметру розв'язку стохастичного диференціального рівняння з необмеженим оператором знесення і малою дифузією в нескінченно вимірному гільбертовому просторі. Дослідження відповідних членів розвинення, що можна інтерпретувати як наближення розв'язку з відповідною точністю. Оцінка залишкового члена розвинення в ряд Тейлора в нормах відповідного простору, що надає можливість обмеження певною кількістю членів розкладу.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Методи теорії збурень було започатковано в задачах теоретичної фізики, у випадку наявності малого параметру і у разі нехтування яким існував точний розв'язок. Особливо це важливо для динамічних систем в стані неврівноваженості. Саме тоді незначне, мале відхилення може призвести до суттєвих зрушень всієї системи. На цьому шляху відоме розвинення в ряд по малому параметру, яке є числом Кнудсена. В роботі [5] розвинення в ряд по малому параметру в рівняння Больцмана дало можливість отримати у вигляді нульового наближення розподіл Максвела. В роботі [3] розглядалось стохастичне диференціальне рівняння з нелінійними обмеженими коефіцієнтами з малим параметром при дифузійному члені в просторі R^n. В цій роботі було застосовано метод теорії збурень, а саме розклад в ряд за малим параметром розв'язку цього рівняння. В даній роботі застосування цього метода поширюється на рівняння з необмеженим оператором знесення і малим параметром при дифузійному члені.

Основна частина. Розглянемо рівняння теплопровідності з малим випадковим збуренням вигляду

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(\varepsilon, u, \omega) \tag{1}$$

і задачу Коші для нього $u\,(0,x) = \varphi(\mathrm{x})$

$u\,(t,x)$ − розподіл температур $t \in [0,T]$ − час, $f(\varepsilon,u,\omega)$ –адитивний член, що характеризує наявність зовнішнього випадкового впливу. При цьому ε -малий параметр, $\omega \in \Omega$. -елемент простору елементарних подій. Функція $u\,(t,x)$ при кожному t є неперервна функція по $x \in \mathrm{X}$ з двічі інтегрованим квадратом. Будемо вважати, що $u\,(t)$ належить нескінченно вимірному гільбертовому простору H. А випадкове збурення визначається стандартним білим шумом. Тоді в гільбертовому просторі H рівняння (1) може інтерпретуватися як стохастичне диференціальне рівняння у вигляді Іто з необмеженим оператором знесення $A(t)$. Це є диференціальний оператор другого порядку, визначений на двічі неперервно диференційованих функціях $u\ (x)$. Тобто область визначення цього оператора $D_A \subset H$ щільно вкладена в Н. Рівняння в Н, що відповідає (1) має вигляд.

$$du = A(t)u(t) + \varepsilon B\big(t, u(t)\big)dw(t) \quad (2)$$

$$u(0) = \varphi(\mathrm{x}) = u_0 \in D_A.$$

Незбурене рівняння класичного вигляду є:

$$du = A(t)u(t) + B\big(t, u(t)\big)dw(t) \quad (3)$$

$$u(0) = \varphi(\mathrm{x}) = u_0 \in D_A.$$

Коефіцієнт $B\big(s, u(s)\big) \in \wp$. $\wp -$ простір операторів Гільберта - Шмідта в Н з нормою $\sigma^2(\mathrm{B}) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \|\mathrm{B}\varphi_{\kappa}\|^2$, задовольняє стандартним умовам ліпшицевості і лінійної обмеженості

$$\sigma^2(B(s,\mathrm{x}) - B(s,\mathrm{y})) \leq \mathrm{K}_1\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|^2 \quad (4)$$

$$\sigma^2\big(B(s,\mathrm{x})\big) \leq \mathrm{K}_2\|\mathrm{x}\|^2 + \mathrm{K}_3 \quad (5)$$

Де σ^2 - норма оператора Гільберта - Шмідта в Н. Нехай замкнений оператор $A(t)$ задовольняє певним умовам, при яких він породжує сильно неперервну сім'ю еволюційних операторів $u(t) = \mathrm{U}(t, t_0)u_0$. ЩІ умови накладаються на резольвенту оператора $A(t)$. Тоді стохастичне рівняння (2) можна розглядати як неоднорідне, і його розв'язок має вигляд

$$u(t) = \mathrm{U}(t, t_0)\, u_0 + \int_0^t U(t,s)B\big(s, u(s)\big)dw(s) \quad (6)$$

Теорія таких стохастичних рівнянь розглянута в роботі [4].

Сильно неперервна двопараметрична сім'я операторів $\mathrm{U}(t, t_0)$, яка породжується єдиним розв'язком $du = A(t)u(t)$, $u_0 \in D_A$, називається розрішаючим оператором цього рівняння. Теорія таких операторних сімей – однопараметричних, які називаються полугрупами і двопараметричних розглянута в [1]. При виконанні певних умов на резольвенту оператора А еволюційна сильно неперервна сім'я $\mathrm{U}(t, t_0)$ має оцінку

$$\|\mathrm{U}(t, t_0)\, u_0\| \leq e^{\alpha(t - t_0)}\|u_0\| \quad (7)$$

в нормі гільбертового простору Н. Користуючись схемою мультиплікативних представлень Далецького – Торттера в роботі [3] доведено, що єдиний розв'язок рівняння (2) з точністю до стохастичної еквівалентності може бути представлений у вигляді (6). Наявність малого збурення треба розглядати як малий параметр в стохастичному рівнянні (2). І відповідно розв'язок збуреного рівняння можно представити у вигляді:

$$u^{\varepsilon}(t) = \mathrm{U}(t, t_0)\, u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s) B\big(s, u^{\varepsilon}(s)\big) dw(s) \quad (8)$$

Згідно з класичною теорією збурення будемо вважати що розв'язок збуреного рівняння можна представити у вигляді формального степеневого ряду по степеням малого параметру ε.

$$u^{\varepsilon}(t) = u^{(0)}(t) + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + \cdots \ldots \varepsilon^k u^{(k)}(t) + R_{k+1} \quad (9)$$

Головний член – точний розв'язок незбуреної задачі $u^0(t)$ – так зване 0-наближення. Наступні члени $u^k(t)$ визначаються послідовними ітераціями і виражаються через попередні наближення. Розглянемо цю ітераційну процедуру. Знайдемо $u^{(k)}(t)$. Для цього в ліву частину рівняння (8) підставимо розклад (9), а в правій розкладемо коефіцієнт $B\big(s, u^{\varepsilon}(s)\big)$ в ряд Тейлора по степеням ε в околі $\varepsilon = 0$ і відповідно прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При цьому необхідно, щоб існували неперервні частинні похідні до порядку $(k+1)$ включно по x операторнозначної функції $B(s, \mathrm{x})$ і задовольняли умовам, аналогічним (4),(5). Тобто $\frac{\partial^{\kappa} B(s,\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}^{\kappa}} \in \wp$.

Теорема. Нехай коефіцієнти рівняння (8) задовольняють умовам (4), (5), (7).І коефіцієнт $B(s, \mathrm{x})$ має $k+1$ обмежену неперервну частинну похідну по x, які є відповідно операторами Гільберта -Шмідта в H. Тоді розв'язок рівняння (8) допускає розклад в ряд по степеням ε , де функції $u^k(t)$ визначаються співвідношеннями типу (10-12), а залишковий член має оцінку

$$E\|R_{k+1}(t)\|^2 \le C\varepsilon^{2(k+1)}.$$

Розклад в ряд Тейлора коефіцієнта $B\big(t, u^{\varepsilon}(t)\big)$:

$$B\big(t, u^{\varepsilon}(t)\big) = B\left(s, u^{(0)}(t) + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + \cdots \ldots \varepsilon^k u^{(k)}(t)\right)$$

$$= B^{(0)} + \varepsilon B^{(1)} + \varepsilon^2 B^{(2)} + \varepsilon^3 B^{(3)} + \quad \ldots \ldots \ldots + R_{k+1}(B)$$

де $R_{k+1}(B)$ – залишковий член в розкладі в ряд Тейлора коефіцієнта рівняння $B\big(s, u^{\varepsilon}(s)\big)$ в ряд по степеням ε.

Коефіцієнти $u^k(t)$ при відповідних степенях ε мають вигляд:

$$u^{\varepsilon}(t) = \{\varepsilon = 0\} = u^{(0)}(t)$$

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}(t)}{\partial \varepsilon} = \{\varepsilon = 0\} = u^{(1)}(t)$$

$\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}(t)}{\partial \varepsilon^2}$=$\{\varepsilon = 0\} = 2u^{(2)}(t)$

$\frac{\partial^3 u^{\varepsilon}(t)}{\partial \varepsilon^3}$=$\{\varepsilon = 0\} = 6u^{(3)}(t)$

$\frac{\partial^k u^{\varepsilon}(t)}{\partial \varepsilon^k}$ =k! $u^{(k)}(t)$

Знайдемо коефіцієнти розкладу $B\big(t, u^{\varepsilon}(t)\big)$

$B^0 = B\big(s, u^{\varepsilon}(s)\big) = \{\varepsilon = 0\} = B\left(s, u^{(0)}(s)\right)$

$B^1 = \frac{\partial B}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial B}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}$ =$\{\varepsilon = 0\} = \frac{\partial B}{\partial u}\,u^{(1)}$

$B^2 = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 B}{\partial \varepsilon^2} = \frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial B}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\,\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2}$ =$\{\varepsilon = 0\} =$

$\frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\,(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}) + \frac{\partial B}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2}) = \frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\,(\,u^{(1)}\,)^2 + 2\,\frac{\partial B}{\partial u}u^{(2)}) =$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\,(\,u^{(1)}\,)^2 + 2\,\frac{\partial B}{\partial u}u^{(2)}\right]$$

$B^3 = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 B}{\partial \varepsilon^3} = \frac{1}{6}(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\,\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \frac{\partial B}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2}) = \frac{\partial^3 B}{\partial u^3}\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)^3 + \frac{\partial^2 B}{\partial u^2}2\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} +$

$\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial^3 u}{\partial \varepsilon^3} =$

$\frac{\partial^3 B}{\partial u^3}\left(u^{(1)}\right)^3 + \frac{\partial B}{\partial u}\,2u^{(2)} ++\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\,2u^{(1)}2u^{(2)} + \frac{\partial^2 B}{\partial u^2}u^{(1)}2u^{(2)} + \frac{\partial B}{\partial u}\,6u^3 =$

$$\frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 B}{\partial u^3}(u^1)^3 + 2\frac{\partial B}{\partial u}\,u^{(2)} + 6\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\,u^{(1)}u^{(2)} + 6\frac{\partial B}{\partial u}\,u^{(3)}\right]$$

Таким чином частинна похідна коефіцієнта $B\big(t, u^{\varepsilon}(t)\big)$ є функцією від попередніх ітерацій розв'язку, а саме

$\frac{\partial^k \mathrm{B}^{\varepsilon}(t, u^{\varepsilon}(t)\,)}{\partial \varepsilon^k} = \Phi(t, u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, + \cdots \ldots u^{(k-1)})$.

Прирівнюючи ліву частину рівняння у вигляді (9) і праву з розвиненим коефіцієнтом $B\big(t, u^{\varepsilon}(t)\big)$ в ряд Тейлора в околі $\varepsilon = 0$, отримаємо рівняння для відповідних наближень. Враховуючи властивості коефіцієнта B і його похідних, а також властивість розрішаючого оператора $\mathrm{U}(t, t_0\,)$, визначимо оцінки для відповідних наближень.

$$u^{\varepsilon}(t) = u^{(0)}(t) + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + \cdots \ldots \varepsilon^k u^{(k)}(t) + R_{k+1} =$$

$\mathrm{U}(t, t_0)u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s)B\big(s, u^{\varepsilon}(s)\big)dw(s)=$

$\mathrm{U}(t, t_0)u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s)(B^0 + \ \varepsilon B^1 + \varepsilon^2 B^2 + \varepsilon^3 B^3 \ldots)dw(s)$

$$u^{(0)}(t) = \mathrm{U}(t, t_0)u_0, \qquad (10)$$

$\|\mathrm{U}(t, t_0)u_0\| \le e^{\alpha(t-t_0)}\|u_0\|.$

$$u^1(t) = \int_0^t U(t,s)B^0\, dw(s) = \int_0^t U(t,s)(B\big(s, u^0(s)\big)\, dw(s) \quad (11)$$

$\mathrm{E}\|u^1(t)\|^2 = e^{\alpha(t-t_0)}\ \mathrm{E}\left\|\int_{t_0}^t B\left(s, u^{(0)}(s)\right) dw(s)\right\|^2 \le$

$$\le (K_2\|u_0\|^2 + K_3)(t - t_0)e^{\alpha(t-t_0)} \le \beta_1\|u_0\|^2 + \beta_2 \qquad (12)$$

$$u^2(t) = \int_0^t U(t,s)B^1 dw(s) = \int_0^t U(t,s)\frac{\partial B}{\partial u}\ u^1(s)dw(s) \qquad (13)$$

$u^3(t) = \int_0^t U(t,s)B^2 dw(s) = \int_0^t U(t,s)\frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\ (\partial u/\partial \varepsilon\ )^2 + 2\ \frac{\partial B}{\partial u}u^2)dw(s)$

Враховуючи властивість коефіцієнтів рівняння, а також оцінку розрішаючого оператора, можна показати для стохастичного інтеграла, обмеженість в середньо квадратичному в нормі відповідного гільбертового простору. Для першого наближення має місце (12). Аналогічно можна знайти оцінки і для наступних наближень

Оцінимо залишковий член ряду (9) $E\|R_{k+1}(t)\|^2$.

$$R_{k+1}(t) = u^{\varepsilon}(t) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^{(i)}(t)$$

$R_{k+1}(t) = \mathrm{U}(t, t_0\ )\, u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s)B\big(s, u^{\varepsilon}(s)\big)dw(s) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^{(i)}(t)$

Зробимо тотожнє перетворення рівняння, а саме

$R_{k+1}(t) = \mathrm{U}(t, t_0\ )\, u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s)(B\big(s, u^{\varepsilon}(s)\big) - B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^{(i)})\, dw(s)$

$+\ \varepsilon \int_0^t U(t,s)B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^{(i)}(s))\, dw(s) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^{(i)}(t)$

В результаті чого, скориставшись нерівністю для норми Коші-Буняковського, оцінимо два доданки

$$I_1 = 2E\left\|\varepsilon \int_0^t U(t,s)(B\big(s, u^{\varepsilon}(s)\big) - B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^{(i)})\, dw(s)\right\|^2$$

$$I_2 = 2E\left\|\mathrm{U}(t,t_0\,)u_0 + \varepsilon\int_0^t U(t,s)(B(s,\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i u^{(i)}(s))\,dw(s) - \sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i u^{(i)}(t)\right\|^2$$

Скористаємось ліпшицевістю (4) і властивістю (7) для еволюційної сім'ї $U(t,s)$ і нерівності Колмогорова для стохастичного інтегралу

$$I_1 \le К_4\int_0^t E\left\|u^\varepsilon(s) - \sum_{i=0}^k \varepsilon^i u^{(i)}(s)\right\|^2 ds = К_4\int_0^t E\|R_{k+1}(s)\|^2\, ds$$

Оцінимо I_2 користуючись відповідними наближеннями $u^{(0)}(t)$, $u^{(1)}(t), u^{(2)}(t)$ …… Скористаємось розвиненням в ряд Тейлора по степеням ε, враховуючи вигляд похідних у відповідному функціональному просторі.

$$u^\varepsilon(t) = \mathrm{U}(t,t_0)u_0 + \varepsilon\int_0^t U(t,s)\left(B^0 + \varepsilon B^1 + \varepsilon^2 B^2 + \cdots \varepsilon^k B^k + \varepsilon^{k+1}R_{k+1}(B)\right)dw(s)$$

$$= \mathrm{U}(t,t_0)u_0 + \varepsilon\int_0^t U(t,s)(B\left(s,u^0(s)\right)dw(s)$$

$$+\varepsilon^2\int_0^t U(t,s)\frac{\partial B}{\partial u}\,u^1(s)dw(s)$$

$$+\varepsilon^3\int_0^t U(t,s)\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\,(\partial u/\partial\varepsilon\,)^2 + 2\,\frac{\partial B}{\partial u}u^2\right)dw(s)\,\ldots$$

$$+\varepsilon^{k+2}\int_{t_0}^t U(t,s)R_{k+1}(B)dw(s)$$

$$\sum_{i=0}^k \varepsilon^i\, u^i = \mathrm{U}(t,t_0)u_0 +$$

$$\varepsilon\int_0^t U(t,s)(B\left(s,u^0(s)\right)dw(s) + \varepsilon^2\int_0^t U(t,s)B^1 dw(s) +$$
$$\varepsilon^3\int_0^t U(t,s)B^2 dw(s)\;\ldots\ldots..$$

Звідси, в виразі для I_2 скорочуються доданки, що виражають ітерації функції $u^\varepsilon(s)$ через розклад в ряд Тейлора коефіцієнта В околі точки $\varepsilon = 0$. Таким чином залишається тільки залишковий член розкладу коефіцієнта В:

$$I_2 = 2E\left\|\varepsilon^{k+2}\int_{t_0}^t U(t,s)R_{k+1}(B)dw(s)\right\|^2 \le \beta_3\varepsilon^{2k+4}$$

$$2E\left\|\Phi(t,u^{(0)},u^{(1)},u^{(2)},+\cdots\ldots u^{(k-1)})\right\|^2 \le \beta_3.$$

Маємо можливість застосувати нерівність Гронуола для оцінки залишкового члена в (9).

$$E\|R_{k+1}(t)\|^2 \le \beta_3\varepsilon^{2k+4} + К_4\int_0^t E\|R_{k+1}(s)\|^2\, ds$$

$R_{k+1} = u^{\varepsilon}(t) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i =$

$U(t, t_0\ ) u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s)(B(s, u^{\varepsilon}(s)) \pm B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i) dw(s) - \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{k}} \varepsilon^{\mathrm{i}} \mathrm{u}^{\mathrm{i}}.$

$R_{k+1}(t) = \mathrm{U}(t, t_0) u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s)(B(s, u^{\varepsilon}(s)) - B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i) dw(s) +$

$+ \varepsilon \int_0^t U(t,s) B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i) dw(s) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i$

$R_{k+1}(t) = u^{\varepsilon}(t) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i =$

$\mathrm{U}(t, t_0) u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s)(B(s, u^{\varepsilon}(s)) - B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i) dw(s) +$

$+ \quad \varepsilon \int_0^t U(t,s) B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i) dw(s) - \Big[U(t, t_0) u_0 + \varepsilon \int_0^t U(t,s)(B^0 + \varepsilon B^1 + \varepsilon^2 B^2 \ldots . \varepsilon^k B^k + R_{k+1}(B) dw(s)\Big] =$

$\varepsilon \int_0^t U(t,s)(B(s, u^{\varepsilon}(s)) - B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i) dw(s) + \varepsilon \int_0^t U(t, s R_{k+1}(B)) dw(s)$

$$R_{k+1}(t) = \ \varepsilon \int_0^t U(t,s)(B(s, u^{\varepsilon}(s)) - B\left(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i\right) dw(s) + \ \varepsilon \int_0^t U(t,s) R_{k+1}(B)) dw(s)$$

$$E\|R_{k+1}(t)\|^2 \leq 2E \left\| \varepsilon \int_0^t U(t,s)(B(s, u^{\varepsilon}(s)) - B(s, \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i u^i) dw(s) \right\|^2 + 2E \left\| \varepsilon \int_0^t U(t,s) R_{k+1}(B) dw(s) \right\|^2$$

$E\|R_{k+1}(t)\|^2 \leq 2\ \varepsilon \int_0^t e^{\alpha(t-s)} K_1 E\|R_{k+1}(s)\|^2 dw(s) + \beta \varepsilon^{k+1}$

$$\mathrm{E}\|\mathrm{R}_{\mathrm{k}+1}(\mathrm{t})\|^2 \leq \mathrm{C}\varepsilon^{\mathrm{k}+1}$$

Таким чином в залежності від точності наближення, яка регулюється оцінкою залишкового члену, можна скористатися певним наближенням, яке можливо отримати за ітераційною процедурою. Нульове наближення (10) - це невипадкова функція. Перше наближення має вигляд (11), друге - (13). Всі інші наближення, починачи з першого, випадкові процеси, середньо квадратичні оцінки яких можна отримати аналогічно (12).

Висновки та перспективи. Метод розвинення за малим параметром розв’язку стохастичного диференціального рівняння дає можливість при певних умовах гладкості функцій розповсюдити його на функціонали від розв’язку. Так для відповідного рівняння Колмогорова малий параметр в сохастичному рівнянні вигляду (8) буде породжувати квадрат цього параметру при дифузійному члені. Відповідні наближення в розвиненні стохастичного рівняння дадуть можливість при додаткових умовах диференціювання коефіцієнтів і функцій отримати відповідні розвинення розв’язку рівняння Колмогорова. А це дає можливість дослідити асимптотику розв’язку рівняння другого порядку в частинних похідних параболічного типу. Момент виходу випадкового процесу, що визначається диференціальним стохастичним рівнянням на границю деякої області описується фукціоналом від розв’язку цього рівняння [3]. В цьому випадку можна також застосувати відповідний метод розвинення за малим параметром і отримати результат у вигляді відповідних наближень з певною точністю.

Література

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва : Наука, 1968.
2. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.
3. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М. : Наука, 1979.
4. *Белопольская Я.И., Наголкина З.И*. О мультипликативных представлениях решений нелинйных стохастческих уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978. Сб. Вероятностные распределения в бесконечномерных пространствах. С. 22-36.
5. *Далецкий Ю.Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения. Успехи мат. наук, 1967, 22. Вып.4. С. 3-54.
6. *Гихман И.И., Скороход А.В*. Теория случайных процессов. М. : Наука, 1975. Т.3. 496 с.
7. *Фирцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. Наука, М., 1968.
8. *Наголкіна З.І, Філонов Ю. П.* Мультиплікативна апроксимація випадкового процесу. Прикладна геометрія і інженерна графіка. Київ, №100 (205-214).

References

1. *Kreyn S.G.* Lineynyie differentsialnyie uravneniya v banahovom prostranstve. Moskva : Nauka, 1968.
2. *Henri D.* Geometricheskaya teoriya polulineynyih parabolicheskih uravneniy.
3. *Venttsel A.D., Freydlin M.I.* Fluktuatsii v dinamicheskih sistemah pod deystviem malyih sluchaynyih vozmuscheniy. Moscow : Nauka, 1979.
4. *Belopolskaya Ya.I., Nagolkina Z.I.* O multiplikativnyih predstavleniyah resheniy nelinynyih stohastcheskih uravneniy. Kiev : In-t matematiki AN USSR, 1978. Sb. *Veroyatnostnyie raspredeleniya v beskonechnomernyih prostranstvah*. S. 22-36.
5. *Daletskiy Yu.L.* Beskonechnomernyie ellipticheskie operatoryi i svyazannyie s nimi parabolicheskie uravneniya. Uspehi mat. nauk, 1967, 22. Vyip.4. S. 3-54.
6. *Gihman I.I., Skorohod A.V.* Teoriya sluchaynyih protsessov. Moscow : Nauka, 1975. T. 3. 496 s.
7. *Firtsiger Dzh., Kaper G.* Matematicheskaya teoriya protsessov perenosa v gazah. Nauka, M., 1968.
8. *NagolkIna Z.I, FIlonov Yu. P*. MultiplIkativna aproksimatsIya vipadkovogo protsesu. Prikladna geometrIya I Inzhenerna grafIka. KiYiv, #100 (205-214).

Ph. D., assoc. Prof **Zoya Nagolkina**
zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176
Ph. D., assoc. Prof **Yuri Filonov**,
yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854
Kyiv National University of Construction and Architecture» (KNUCA)

SMALL RANDOM DISTURBANCE OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION

This work considers the heat conduction equation with a small random disturbance. Such an equation, under certain assumptions, can be interpreted as a mathematical model of the real process of heat transfer in a randomly heterogeneous medium. Let u(t,x) be the temperature of some body at the moment of time t at the point with the generalized coordinate x. That is, $u_t(x)$*-distribution of temperatures and is a continuous function of x. We will consider this function as an element of Hilbert's infinitely dimensional space H. This is possible if, for example, we introduce the appropriate norm. Moreover, if we consider the Sobolev space with the corresponding norm, then we can also take into account the boundary conditions. But in this work, we will limit ourselves to the problem with initial conditions, that is, the Cauchy problem in the corresponding space. Thus, the heat conduction equation can be considered as an equation with an unbounded operator*

A(t) in the Hilbert space H with the domain of definition densely embedded in this Hilbert space $D_A \subset H$, and D_A does not depend on t. The theory of deterministic levels of this type is developed in works [1], [2]. *There, the properties of evolutionary operator families depending on the location of the corresponding operator resolvent A(t) are considered. It is the estimate of $\|U(t,s)x\| \leq exp\alpha(t-s)\|x\|$ in the Hilbert space norm that is key in proving the existence of a unique solution of a stochastic differential equation with an unbounded collapse operator in the Ito form. A small random perturbation of such an equation can be described in some cases as a stochastic Ito-type differential equation with unlimited decay and a small parameter in the diffusion term. A stochastic differential equation with a small perturbation in the diffusion term is considered using the standard methodology of series expansion in a small parameter. This was done in* [3] *for a stochastic equation with a bounded nonlinear drift coefficient in R^n space. When the standard conditions for the existence of a unique solution of the Ito equation are met in the work, the functions are obtained in an explicit form, which are appropriate approximations of the expansion of the solution of the equation in a series by powers of a small parameter. The estimate of the residual term of this series is given. At the same time, all estimates are obtained in the mean square in the corresponding norms of the Hilbert space.*

Keywords: Stochastic equation; partial differential equation; conditional mean; small parameter; operator resolvent; stochastic equivalence; dimensionality; random process; evolutionary operator; Hilbert space; diffusion process; integral equation; initial value; Gronuol's inequality; functional space; nonlinear coefficients.