УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2024.106.192-200
к. т. н., доцент, **А.В. Несвідомін,**
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718
д. т. н., професор, **С.Ф. Пилипака,**
s.pylypaka@nubip.edu.ua, ORCID 0000-0002-1496-4615,
к. т. н, доцент, **В.М. Бабка,**
babkavitaliy@ukr.net, ORCID 0000-0003-4971-4285,
к. т. н, доцент, **І.Ю. Грищенко,**
irgr@yahoo.com, ORCID 0000-0002-1000-9805,

Національний університет біоресурсів і природокористування України

СФЕРИЧНИЙ АНАЛОГ ЦИКЛОЇДИ

У сфери і площини є певні властивості, які їх об’єднують. У них Гауссова кривина у всіх точках стала: для сфери має додатне значення, а для площини – нульове. У зв’язку із цим всі плоскі фігури можуть ковзати у площині, а сферичні – по поверхні сфери. Зображення, побудоване на обмеженій ділянці сфери може наближатися до плоского при необмеженому зростанні її радіуса. Цю ідею використовував відомий вчений-механік В.В. Добровольський для проведення аналогії між плоскими і сферичними механізмами. Вчений-математик, швейцарець за походженням Л.І. Фусс досліджував прообраз еліпса на сфері, який в його працях отримав назву «сферичний еліпс». Прообразом прямої на площині на сфері є велике її коло, тобто коло, яке проходить через її діаметр. Якщо пряма на площшині незамкнена, то на сфері – замкнена. У своїх працях В.В. Добровольський дає визначення сферичним аналогам деяких плоских фігур – трикутника, чотирикутника, паралелограма. Він широко використовував стереографічну проекцію, яка дозволяє перетворювати плоскі зображення у сферичні із збереженням певних властивостей.

Як відомо, циклоїда на площині утворюється слідом точки кола, яке котиться по прямій лінії. Отже, сферичним прообразом циклоїди має бути сферична крива, яка є слідом кочення кола по великому колу сфери. Ідея полягає в тому, що плоским перерізом сфери є коло. Якщо таке коло торкається великого кола і буде при цьому по ньому перекочуватися, то всі його точки лежатимуть на сфері. З цього випливає, що окрема точка кола при його коченні буде описувати криву, тобто сферичну циклоїду, яка повністю лежатиме на сфері. Для побудови сферичної центроїди запропоновано застосувати тригранник Дарбу. За аналогом центроїд у площині побудовано подовжену і укорочену центроїди. Показано, що запропонований підхід дозволяє будувати і інші сферичні криві. Отримано параметричні рівняння кривих, в тому числі сферичних циклоїд, а також *сферичних прообразів гіпо- і епоциклоїд. З допомогою засобів комп'ютерної графіки показано, що отримані криві лежать на поверхні сфери. За аналогією із плоскими зображеннями знайдено умови, за яких ці криві є замкненими, тобто точка після проходження заданого числа віток повертається у вихідне положення.*

Ключові слова: Гауссова кривина; комп'ютерна графіка; сферичний аналог циклоїди.

Постановка проблеми. Вивченням властивостей циклоїди займалося багато вчених. Зокрема, «перевернута» арка циклоїди є кривою найшвидшого спуску матеріальної точки (брахістохроною); довжина однієї арки циклоїди дорівнює чотирьом діаметрам твірного кола (теорема Рена); еволютою циклоїди буде конгруентна циклоїда. Крім того, у неї є і інші властивості, які мають велике значення для фізики і техніки. Наприклад у циклоїдальному маятнику вантаж, підвішений до нитки, яка поперемінно огинає дві пів арки циклоїди, теж рухається по циклоїді. Період коливань такого маятника не залежить від амплітуди коливань на відміну від інших маятників. В довідковій літературі і в інтернеті можна знайти як параметричні її рівняння, так і рівняння в декартових координатах. Стосовно сферичної циклоїди, то таке поняття існує і стосується сферичного маятника. Воно більше відноситься до механіки, ніж до геометрії. А втім властивості циклоїди можуть бути перенесені на її сферичний аналог, що зумовлює актуальність досліджень в даному напрямі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Стосовно механіки сферичних механізмів здійснено дослідження в праці [1]. В працях геометричного характеру йдеться про відшукання на поверхні сфери кривих із заданими властивостями. Зокрема, це криві, що описуються рівняннями у функції довжини власної дуги [2, 3]. Відшуканню ізометричних сіток на поверхні сфери присвячені роботи [4 – 6]. Апроксимацію сфери неперервною стрічкою розгортної поверхні розглянуто в праці [7].

Формулювання цілей та завдання статті. Розробити аналітичний спосіб побудови сферичних аналогів циклоїди, гіпо- та епіциклоїди.

Основна частина. Плоским перерізом кулі є коло. Властивістю сферичної поверхні є те, що це коло можна як завгодно пересувати по поверхні і воно всіма своїми точками належатиме ній. Якщо уявити, що в процесі переміщення кола по ньому одночасно рухається точка, то слід точки опише певну траєкторію на сфері. В цьому і полягає ідея побудови сферичної циклоїди. Оскільки аналогом прямої на сфері є велике коло, то сферичну циклоїду будуватимемо, як траєкторію точки кола, яке котиться по екватору без ковзання, залишаючись на поверхні сфери. Для побудови застосуємо тригранник Дарбу. На рис. 1,а його вершина знаходиться в точці A, орт нормалі $\overline{N}$, який йде від центра сфери, орти $\overline{T}$ і $\overline{P}$ утворюють дотичну до сфери площину. Тригранник будемо рухати по паралелі, яка проходить через точку A, тому орт $\overline{T}$ буде дотичним до цієї паралелі, а орт $\overline{P}$ – дотичним до меридіана.

На рис. 1, б тригранник на поверхні зображено таким чином, що орт $\overline{T}$ спрямований на спостерігача і проекціюється в точку. Відступивши на відстань AO_o вздовж орта нормалі, проведемо перпендикулярно до нього січну площину, яка вданому випадку проекціюється в пряму лінію. Вона перетне сферу по колу радіуса r. Будемо рухати тригранник разом із колом по паралелі в напрямі, позначеному літерою V. Нехай за умовою коло може повертатися навколо нормалі в точці O_o. В такому випадку воно може перекочуватися без ковзання по паралелі R_o (рис. 1,б). Точка кола опише сферичну криву, яка за означенням може бути сферичною циклоїдою при $\varphi=0$. Ми розглядаємо загальний випадок, з якого будуть отримані часткові, в тому числі при $\varphi=0$.

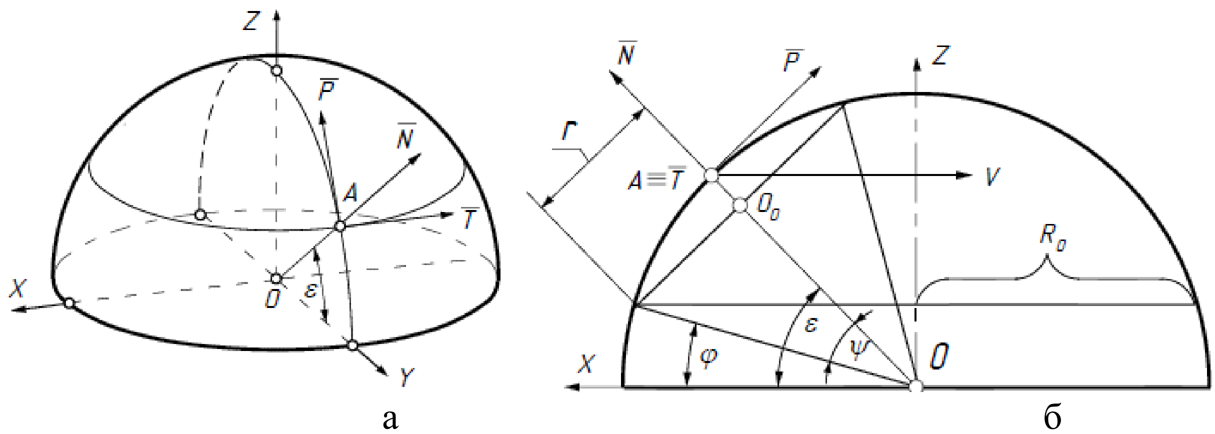


Рис. 1. Графічні ілюстрації до побудови сферичної циклоїди за допомогою тригранника Дарбу:
а) тригранник Дарбу, утворений ортами $\overline{\boldsymbol{T}}$, $\overline{\boldsymbol{P}}$, $\overline{\boldsymbol{N}}$ в точці A паралелі, вздовж якої рухається;
б) розміщення кола радіуса r в системі тригранника з позначенням кутів

Запишемо параметричні рівняння кола радіуса r в системі тригранника. Для цього потрібно знайти відстань AO_o:

$$AO_0 = AO - OO_0 = R - \sqrt{R^2 - r^2}\ . \qquad (1)$$

Коло розташоване в дотичній площині, яка зміщена в протилежну сторону орта $\overline{T}$ від його вершини на відстань (1). Із врахуванням цього параметричні рівняння кола в системі тригранника запишуться:

$$T = r\cos\alpha; \qquad P = r\sin\alpha; \qquad N = \sqrt{R^2 - r^2} - R, \qquad (2)$$

де α – незалежна змінна – кут повороту точки кола навколо орта $\overline{N}$.

Запишемо параметричні рівняння сфери, вздовж паралелі якої буде рухатися тригранник Дарбу:

$$X = R\cos\varepsilon\cos\gamma; \qquad Y = R\cos\varepsilon\sin\gamma; \qquad R\sin\varepsilon\,, \tag{3}$$

де *ε, γ* – криволінійні координати, якими є кути, що задають величину меридіана і паралелі відповідно.

Паралель на сфері буде задана рівняннями (3) при *ε=const*. При цій умові знайдемо похідні рівнянь (3) по змінній *γ*, які задають вектор дотичної до паралелі. Після приведення його до одиничного ми отримаємо проекції орта $\overline{T}$:

$$\overline{T}:\ \{-\sin\gamma \qquad \cos\gamma \qquad 0\} \tag{4}$$

Орт нормалі $\overline{N}$ збігається із радіус-вектором точки на поверхні сфери, тому його проекції отримаємо із рівнянь (3) після скорочення їх на *R*:

$$\overline{N}:\ \{\cos\varepsilon\cos\gamma; \qquad \cos\varepsilon\sin\gamma; \qquad \sin\varepsilon\} \tag{5}$$

Проекції третього орта $\overline{P}$ отримаємо із векторного добутку векторів (5) і (4):

$$\overline{P}:\ \{-\sin\varepsilon\cos\gamma; \quad -\sin\varepsilon\sin\gamma; \qquad \cos\varepsilon\} \tag{6}$$

Щоб перейти від рівнянь кола в триграннику Дарбу до їх рівнянь в нерухомій системі координат, потрібно скористатися проекціями або напрямними косинусами векторів (4), (5), (6):

$$\begin{aligned} x &= -T\sin\gamma - P\sin\varepsilon\cos\gamma + N\cos\varepsilon\cos\gamma; \\ y &= T\cos\gamma - P\sin\varepsilon\sin\gamma + N\cos\varepsilon\sin\gamma; \\ z &= T\cdot 0 + P\cos\varepsilon + N\sin\varepsilon. \end{aligned} \quad, \tag{7}$$

Для того, щоб остаточно отримати рівняння кола на поверхні сфери, потрібно в (7) підставити вирази (2) і зробити паралельне перенесення системи координат в потрібну точку сфери, тобто додати до рівнянь (7) відповідні рівняння сфери (3). Після виконання цих дій і наступних спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} x &= -r\cos\alpha\sin\gamma + \left(\sqrt{R^2 - r^2}\cos\varepsilon - r\sin\varepsilon\sin\alpha\right)\cos\gamma; \\ y &= r\cos\alpha\cos\gamma + \left(\sqrt{R^2 - r^2}\cos\varepsilon - r\sin\varepsilon\sin\alpha\right)\sin\gamma; \\ z &= r\cos\varepsilon\sin\gamma + \sqrt{R^2 - r^2}\sin\varepsilon. \end{aligned} \tag{8}$$

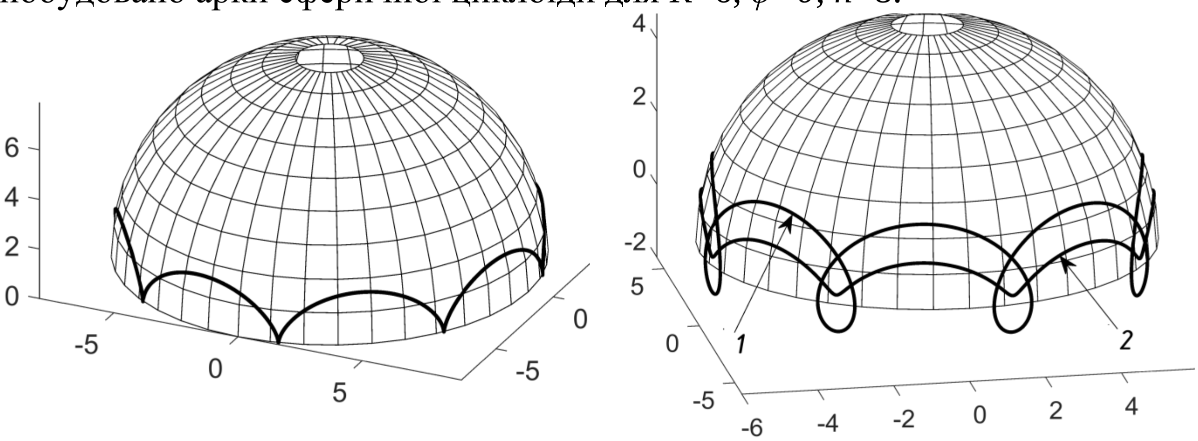
У рівняннях (8) присутні дві незалежні змінні: *γ* і *α*. Це означає, що вони описують множину кіл на поверхні сфери в напрямі паралелі при *ε=const*. Щоб отримати лінію, потрібно встановити взаємозв'язок між змінними *γ* і *α*. Очевидно, що він має бути лінійним, тому що при рівномірному русі тригранника по паралелі кочення кола по паралелі теж має бути рівномірним. Нехай *α=ω·γ*, де *ω·*– коефіцієнт пропорціональності. Взаємозв'язок між радіусом *R* сфери і радіусом *r* кола будемо знаходити за умови, що при проходженні тригранником паралелі величиною *γ=2π/n*, де *n* – число арок циклоїди вздовж паралелі, коло повинне зробити повний оберт і довжина цієї частини паралелі повинна дорівнювати довжині кола. Звідси можна написати рівність:

$$\frac{2\pi}{n}R_0 = 2\pi r, \qquad \text{звідки} \qquad r = \frac{R_0}{n} = \frac{R}{n}\cos\varphi\,. \tag{9}$$

При повороті тригранника на кут $\gamma=2\pi/n$ коло має повернутися на кут $\alpha=\omega\cdot\gamma=2\omega\cdot\pi/n$. Отже, довжина дуги кола, що відповідає цьому кутові, буде рівною $r\cdot\alpha=2r\cdot\omega\cdot\pi/n$. Довжина цієї дуги має бути рівною довжині кола $2\pi\cdot r$. Прирівнявши ці довжини між собою, знаходимо: $\omega=n$, тобто в рівняннях (8) $\alpha=n\cdot\gamma$. Для загального випадку (рис. 1,б) маємо:

$$\varepsilon = \varphi + \psi = \varphi + \operatorname{Arcsin}\frac{r}{R} = \varphi + \operatorname{Arcsin}\frac{\cos\varphi}{n}\,. \tag{10}$$

Таким чином, для загального випадку кочення кола по паралелі сфери за умови, що кількість арок, які описує точка кола, має бути цілим числом n і точка після їх проходження має попасти у вихідне положення, вихідними даними для рівнянь (8) є радіус сфери R, число арок $n=\omega$ і кут φ. Вираз кута α запишеться як $\alpha=\omega\cdot\gamma=n\cdot\gamma$, величина радіуса r визначиться із виразу (9), а кута ε – із виразу (10). За рівняннями (8) на рис. 2,а побудовано арки сферичної циклоїди для R=6, $\varphi=0$, n=8.



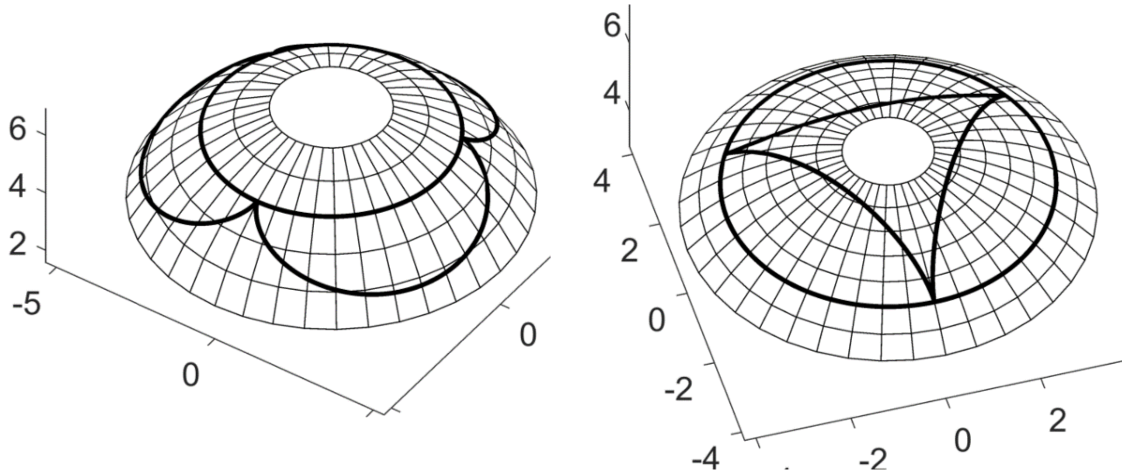
а *б*

Рис. 2. Сферичні циклоїди, побудовані на сфері R=6 за рівняннями (8):
а) циклоїда, яка має 8 арок (n=8);
б) подовжена – 1 та укорочена –2 циклоїди

Існує поняття подовженої та укороченої циклоїд, коли точка береться не на колі, яке котиться, а на його радіусі всередині або за межами кола. На рис. 2, *б* побудовано сферичні аналоги таких циклоїд за тими ж рівняннями, за якими будувалася циклоїда на рис. 2, *а*, тільки в одному випадку значення r збільшили (крива 1), а у іншому – зменшили (крива 2). Якщо ці циклоїди побудувати при коченні кола по екватору в нижній частині сфери, то вони будуть симетричними. Так само відбувається і на площині по відношенню до прямої лінії, по якій котиться коло. Якщо ж ми візьмемо іншу паралель сфери (не екватор), тобто при

$\varphi \neq 0$, то форма циклоїд по обидва боки паралелі буде різною. На рис. 3 побудовані циклоїди при $\varphi = \pi/3$ при коченні кола по різні сторони паралелі.

Такі криві на сфері будуть аналогами епіциклоїди (рис. 3, *а*) і гіпоциклоїди (рис. 3, *б*). Справа в тому, що коло на сфері при $\varphi \neq 0$ уже не є прообразом прямої на площині, а прообразом кола. Тому при перекочуванні рухомого кола по нерухомому (паралелі при $\varphi \neq 0$) зовнішнім чином кривою буде сферична епіциклоїда (рис. 3, *а*), а внутрішнім чином – сферична гіпоциклоїда (рис. 3, *б*). Вони за формою подібні до аналогічних кривих на площині.



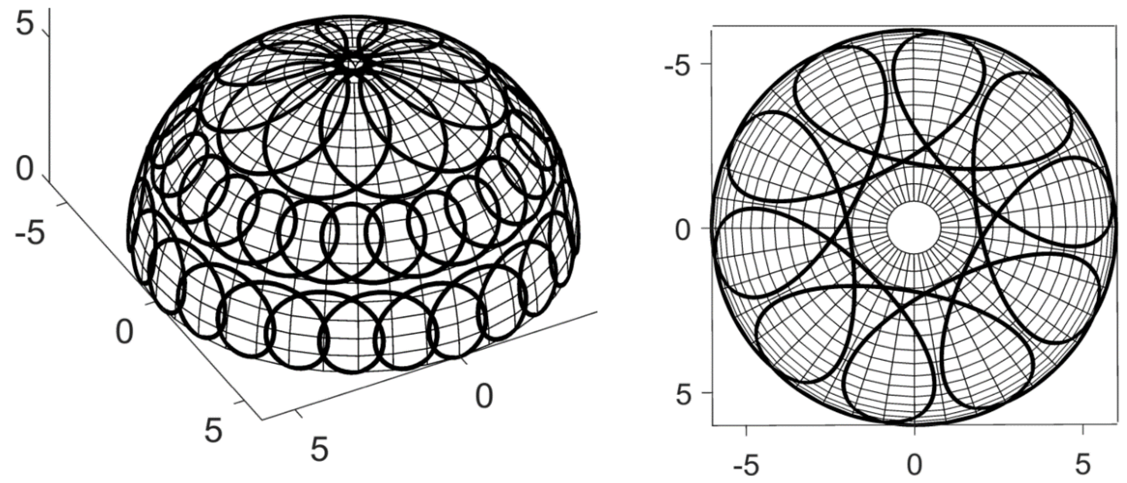
а

б

Р

ис. 3 Сферичні циклоїди, побудовані на сфері *R*=6 за рівняннями (8) при $n=3$ і $\varphi=\pi/3$:
а) сферична епіциклоїда; б) сферична гіпоциклоїда

За допомогою отриманих рівнянь (8) можна будувати і інші сферичні криві, якщо не дотримуватися встановлених зв'язків (9), (10) і $n=\omega$. Наприклад, на рис. 4 побудовано різні періодичні криві у формі візерунків.



а

б

Рис. 4 Криві на поверхні сфери у вигляді візерунків, побудовані за рівняннями (8) при n=ω:
а) аксонометричне зображення трьох кривих на сфері;
б) вигляд зверху однієї кривої на сфері

Конструювання кривих з допомогою кола в триграннику Дарбу можна розширити, якщо напрям його руху спрямувати не по плоскій, а по просторовій сферичній кривій.

Висновки. В механіці при конструюванні сферичних механізмів часто застосовують сферичні аналоги плоских відомих кривих. Для конструювання сферичних аналогів циклоїд, епі- і гіпоциклоїд запропоновано підхід на основі застосування тригранника Дарбу з твірним колом у його системі. Тригранник рухається вздовж паралелі сфери і коло в його системі перекочується по іншій паралелі без ковзання, весь час перебуваючи на поверхні сфери. Аналітично описано траєкторію точки кола і отримано відповідні параметричні рівняння. Якщо паралеллю, по якій котиться коло, є екватор, то утвореною кривою є сферична циклоїда. Для інших паралелей утвореними кривими будуть сферичні епі- і гіпоциклоїди.

Література

1. *Косіюк М.М., Кравчук В.С.* Кінематичний аналіз сферичного кривошипно-повзунного механізму / *Вісник Хмельницького національного університету*. № 6. 2019 (279). С. 7 – 11. Режим доступу: http://journals.khnu.km.ua/vestnik/?p=1929

2. *Пилипака Т.С.* Аналітичне конструювання просторових та сферичних кривих у функції власної дуги / *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків: ХДУХТ, 2008. Вип. 21. С. 100 – 105.

3. *Захарова Т. М., Пилипака С.Ф.*, Конструювання сферичних кривих у функції натурального параметра / *Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького.* Серія: Математика. Геометрія. Інформатика. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. Т. 1. С. 137 – 145.

4. *Кремець Т.С.* Конформне відображення написів на ізометричні сітки конуса та кулі / *Технічна естетика і дизайн*. Київ : Віпол, 2011. Вип. 9. С. 112 – 117.

5. *Кремець Т. С, Грищенко І.Ю., Несвідоміна О.В.* Віднесення кулі до ізометричних координат на основі сферичного відображення мінімальних поверхонь / *Сучасні проблеми моделювання*. 2016. Вип. 7. С. 74 – 80.

6. *Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Несвідоміна О.В.* Конструювання ізометричних сіток на поверхні кулі / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2018. Вип. 94. С. 82 – 87.

7. Пилипака С. Ф., *Грищенко І.Ю., Кресан Т.А.* Моделювання смуг розгортних поверхонь, дотичних до поверхні кулі / *Прикладні питання математичного моделювання.* 2018. № 1. С. 81 – 88.

Reference

1. *Kosiiuk M.M., Kravchuk V.S.* Kinematychnyi analiz sferychnoho kryvoshypno-povzunnoho mekhanizmu / *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu*. № 6. 2019 (279). S. 7 – 11. Rezhym dostupu: http://journals.khnu.km.ua/vestnik/?p=1929
2. *Pylypaka T.S.* Analitychne konstruiuvannia prostorovykh ta sferychnykh kryvykh u funktsii vlasnoi duhy / *Heometrychne ta kompiuterne modeliuvannia*. Kharkiv: KhDUKhT, 2008. Vyp. 21. S. 100 – 105.
3. *Zakharova T. M., Pylypaka S.F.*, Konstruiuvannia sferychnykh kryvykh u funktsii naturalnoho parametra / *Naukovyi visnyk Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho*. Seriia: Matematyka. Heometriia. Informatyka. Melitopol: Vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho, 2014. T. 1. S. 137 – 145.
4. *Kremets T.S.* Konformne vidobrazhennia napysiv na izometrychni sitky konusa ta kuli / *Tekhnichna estetyka i dyzain*. Kyiv : Vipol, 2011. Vyp. 9. S. 112 – 117.
5. *Kremets T. S, Hryshchenko I.Iu., Nesvidomina O.V.* Vidnesennia kuli do izometrychnykh koordynat na osnovi sferychnoho vidobrazhennia minimalnykh poverkhon / *Suchasni problemy modeliuvannia*. 2016. Vyp. 7. S. 74 – 80.
6. *Pylypaka S.F., Hryshchenko I.Iu., Nesvidomina O.V.* Konstruiuvannia izometrychnykh sitok na poverkhni kuli / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. 2018. Vyp. 94. S. 82 – 87.
7. *Pylypaka S. F., Hryshchenko I.Iu., Kresan T.A.* Modeliuvannia smuh rozghortnykh poverkhon, dotychnykh do poverkhni kuli / *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. 2018. № 1. S. 81 – 88.

PhD, assistant professor **Andrii Nesvidomin**,
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718,
Doctor of Technical Science, Professor **Serhii Pylypaka**,
psf55@ukr.net, ORCID 0000-0002-1496-4615,
Ph.D., Associate Professor **Vitaliy Babka**,
babkavitaliy@ukr.net, ORCID 0000-0003-4971-4285,
Ph.D., Associate Professor **Iryna Hryshchenko**,
irgr@yahoo.com, ORCID 0000-0002-1000-9805,

National university of life and environmental sciences of Ukraine

SPHERICAL ANALOG OF CYCLOIDS

Spheres and planes have certain properties that unite them. For example, the Gaussian curvature is constant at all points: it has a positive value for the sphere, and zero for the plane. In this regard, all flat figures can slide in a plane, and spherical figures can slide on the surface of a sphere. An image built on a limited *area of the sphere can approach a flat one with unlimited growth of its radius. This idea was used by the famous mechanical scientist V.V. Dobrovolsky for an analogy between flat and spherical mechanisms. Scientist-mathematician, Swiss by origin L.I. Fuss studied the prototype of an ellipse on a sphere, which in his writings was called a "spherical ellipse." The prototype of a straight line on a plane on a sphere is its great circle, that is, a circle that passes through its diameter. If the straight line is not closed on the plane, then it is closed on the sphere. In his works, V.V. Dobrovolsky defines the spherical analogues of some flat figures - a triangle, a quadrilateral, a parallelogram. He widely used stereographic projection, which allows you to transform flat images into spherical ones while preserving certain properties.*

As you know, a cycloid on a plane is formed by the trace of a point of a circle that rolls along a straight line. Therefore, the spherical prototype of the cycloid should be a spherical curve, which is the trace of the rolling of a circle along the great circle of the sphere. The idea is that a flat section of a sphere is a circle. If such a circle touches a large circle and at the same time rolls along it, then all its points will lie on the sphere. From this it follows that a separate point of the circle during its rolling will describe a curve, i.e. a spherical cycloid, which will lie completely on the sphere. To construct a spherical centroid, it is proposed to use the Darboux trihedron. By analogy with the centroid in the plane, elongated and shortened centroids are constructed. It is shown that the proposed approach allows constructing other spherical curves. Parametric equations of curves, including spherical cycloids, as well as spherical prototypes of hypo- and epocycloids were obtained. With the help of computer graphics, it is shown that the obtained curves lie on the surface of the sphere. By analogy with flat images, conditions were found under which these curves are closed, that is, the point returns to its original position after passing a given number of branches.
Keywords: Gaussian curve; Computer Graphics; a spherical analog of a cycloid.