

д. т. н., професор **Пилипака С.Ф.**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID: 0000-0002-1496-4615

к. т. н., доцент **Кресан Т.А.**,
tanyakresan@i.ua ORCID: 0000-0002-8280-9502

аспірант **Хропост В.І.**,
hropost97@ukr.net ORCID: 0000-0001-9363-3955

к. т. н., доцент **Грищенко І.Ю.**,
irgr@yahoo.com ORCID: 0000-0002-1000-9805

Національний університет біоресурсів і природокористування України
к. т. н. **Демчук І.О.**

okira@i.ua ORCID: 0000-0001-9566-2194

ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

КЕРУВАННЯ ЗГИНАННЯМ ТОРСІВ ЗМІНОЮ ЗАЛЕЖНОСТІ КУТА ПІДЙОМУ ЙОГО РЕБРА ЗВОРОТУ

Просторову криву можна задати двома натуральними рівняннями: залежністю кривини і залежністю скруту від довжини її дуги. Якщо таку криву прийняти за ребро звороту торса, то його згинанням можна керувати зміною скруту кривої, оскільки кривина при цьому не змінюється. Однак на практиці таке згинання здійснити важко, оскільки не існує простого переходу від натуральних рівнянь просторової кривої до параметричних. Такий перехід потребує чисельних методів розв'язування системи диференціальних рівнянь. Можна по іншому підійти до розв'язання цього питання, а саме замінити залежність скруту від довжини дуги кривої залежністю кута підйому теж від довжини дуги кривої. В такому випадку формули переходу від натуральних рівнянь до параметричних значно спрощуються і в окремих випадках не потребують чисельного інтегрування.

У статті використано саме такий підхід для конструювання торсів. Наведено параметричні рівняння торса в загальному вигляді, у якого ребром звороту є просторова крива, задана залежностями кривини і кута підйому від довжини своєї дуги. Показано, що зміною закономірності кута підйому можна керувати процесом згинання торса. При цьому знайдено вираз першої квадратичної форми, до якої не входить залежність кута підйому ребра звороту, а тільки залежність його кривини. Це свідчить про те, що можна по різному трансформувати ребро звороту, тобто згинати торс, і при цьому перша квадратична форма залишається незмінною. Наведено відомий приклад згинання торса-гелікоїда дискретною зміною кута підйому його ребра звороту. Продемонстровано також згинання торса-гелікоїда зміною кута підйому ребра звороту за лінійним законом. Для цього було застосовано чисельні

методи. Отриманий торс уже не є торсом однакового нахилу твірних. Також наведено приклад згинання торса, у якого кривина і кут підйому ребра звороту є змінними залежностями від довжини дуги. Вони підібрані так, що дозволяють отримувати проміжні положення торса при його згинанні за допомогою рівнянь у кінцевому вигляді. Наведено приклади, здійснено візуалізацію отриманих результатів.

Ключові слова: крива; залежність; торс; дуга; ребро; згинання.

Постановка проблеми. Просторова крива вважається заданою, якщо відомі два натуральних рівняння: залежності кривини k і скруту σ від довжини дуги s : $k=k(s)$ і $\sigma=\sigma(s)$. Щоб побудувати цю криву в декартовій системі координат, потрібно перейти до параметричних рівнянь. Для цього використовується кінематика супровідного тригранника Френе. При його русі по кривій для поточного значення довжини дуги s існує вектор ω миттєвої осі обертання тригранника. Його проекції на орти тригранника визначаються за допомогою кінематичних рівнянь Ейлера [1]:

$$\begin{aligned}\omega_\tau &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi; \\ \omega_n &= \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi; \\ \omega_b &= \psi' \cos \theta + \varphi',\end{aligned}\tag{1}$$

де φ, ψ, θ – кути Ейлера.

З диференціальної геометрії відомо [2]), що $\omega_\tau = \sigma$; $\omega_n = 0$ і $\omega_b = k$. Після підстановки цих значень у (1) і розв'язавши відносно φ', ψ' і θ' , одержимо:

$$\frac{d\psi}{ds} = \sigma \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \sigma \cos \varphi; \quad \frac{d\varphi}{ds} = k - \sigma \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \theta}.\tag{2}$$

Навіть для найпростішого випадку коли k і σ – сталі величини (тобто задана крива – гвинтова лінія), диференціальні рівняння (2) не вдається проінтегрувати. Отже залежності $\varphi=\varphi(s)$, $\psi=\psi(s)$ і $\theta=\theta(s)$ потрібно шукати чисельним інтегруванням. Саму ж напрямну криву знаходять подальшим чисельним інтегруванням відомих виразів [3]:

$$\begin{aligned}x &= \int (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) ds; \\ y &= \int (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) ds; \\ z &= \int \sin \varphi \sin \theta ds.\end{aligned}\tag{3}$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існують інші підходи до побудови просторових кривих, розглянуті в працях [4 – 6] і на поверхні [7]. В праці [8] запропоновано перехід від рівнянь $k=k(s)$ і $\beta=\beta(s)$, де β – кут підйому кривої, до параметричних:

$$\begin{aligned}
 x &= \int \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) \cos \beta ds; \\
 y &= \int \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) \cos \beta ds; \\
 z &= \int \sin \beta ds.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Для деяких залежностей $k=k(s)$ і $\beta=\beta(s)$ параметричні рівняння (4) вдається проінтегрувати, тобто отримати їх в кінцевому вигляді.

Формулювання цілей та завдання статті. Розробити аналітичний спосіб згинання торса деформацією ребра звороту, заданого залежностями його.

Основна частина. При $\beta=const$ параметричні рівняння (4) опишуть криву укусу із сталим кутом підйому. Крива укусу із сталою кривиною $k=const$ є гвинтовою лінією сталого кроку. Розглянемо побудову кривої із сталою кривиною і лінійною залежністю зростання кута підйому $\beta=a \cdot s$, де a – стала величина. Після підстановки цих залежностей у (4) і часткового інтегрування отримаємо:

$$\begin{aligned}
 x &= \int \cos as \cos \left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{a} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} s \right) \right] \right) ds; \\
 y &= \int \cos as \sin \left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{a} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} s \right) \right] \right) ds; \\
 z &= -\frac{\cos as}{a}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

В результаті чисельного інтегрування рівнянь (5) було побудовано криву для $k=1$ і $a=0,04$ при зміні дуги s в межах $s=0 \dots 15$ (рис. 1).

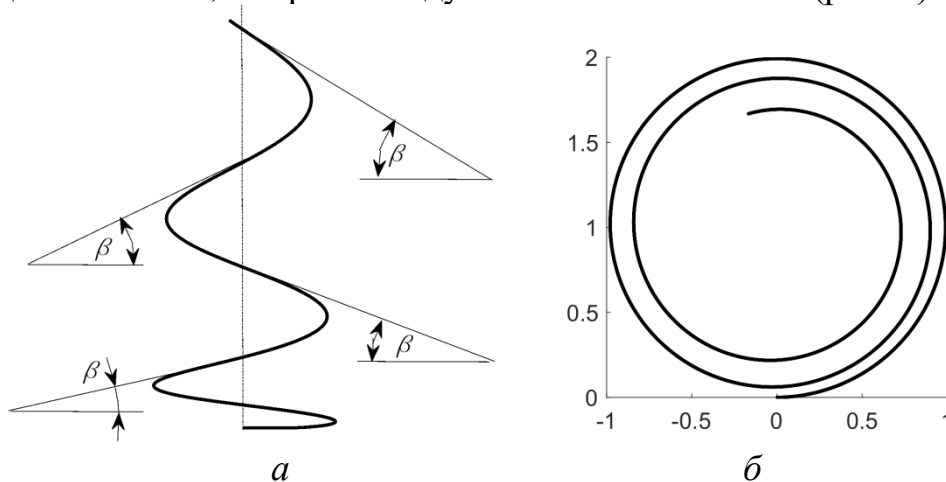


Рис. 1 Проекції кривої сталої кривини і з лінійним законом зростання кута підйому:
 а) фронтальна проекція; б) горизонтальна проекція

На рис. 1, a видно, що кут підйому кривої β зростає по мірі збільшення її висоти. Візьмемо просторову криву (4) в ролі ребра звороту і складемо параметричні рівняння торса в загальному вигляді. Напрямні косинуси прямолінійної твірної знайдемо диференціюванням рівнянь (4). Отриманий таким чином вектор є одиничним, оскільки крива описана у функції довжини дуги s . Параметричні рівняння торса запишуться:

$$\begin{aligned} X &= \int \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) \cos \beta ds + u \cos \beta \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ Y &= \int \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) \cos \beta ds + u \cos \beta \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ Z &= \int \sin \beta ds + u \sin \beta, \end{aligned} \quad (6)$$

де u – друга змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від точки на ребрі звороту.

Знайдемо першу квадратичну форму поверхні. Частинні похідні поверхні (6) будуть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= (\cos \beta - u\beta' \sin \beta) \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) - u\sqrt{k^2 - \beta'^2} \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= (\cos \beta - u\beta' \sin \beta) \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) + u\sqrt{k^2 - \beta'^2} \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ \frac{\partial Z}{\partial s} &= \sin \beta + u\beta' \cos \beta. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \cos \beta \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \cos \beta \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ \frac{\partial Z}{\partial u} &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2 = 1; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial s} = 1; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s} \right)^2 = 1 + u^2 k^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Перша квадратична форма запишеться:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fduds + Gds^2 = du^2 + 2duds + (1 + u^2k^2)ds^2. \quad (10)$$

До квадратичної форми (10) не входить залежність $\beta = \beta(s)$. Це означає, що при будь-якій залежності $\beta = \beta(s)$ рівняння (6) описують згинання одного і того ж торса. При цьому залежність $k = k(s)$ залишається незмінною, тобто незмінною залишається кривина ребра звороту в залежності від довжини дуги.

Приклади. Параметричні рівняння (6) дають можливість будувати торси – згинання однієї і тієї ж поверхні при різних залежностях $\beta = \beta(s)$ і незмінній залежності $k = k(s)$.

Приклад 1. Спочатку розглянемо найпростіший випадок – $k = \text{const}$ і $\beta = \text{const}$. Згідно рівнянь (6) після інтегрування отримуємо параметричні рівняння торса-гелікоїда в кінцевому вигляді:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\cos \beta}{k} \sin \frac{ks}{\cos \beta} + u \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\ Y &= -\frac{\cos \beta}{k} \cos \frac{ks}{\cos \beta} + u \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\ Z &= s \sin \beta + u \sin \beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Зважаючи на те, що кривина гвинтової лінії стала, як і кривої на рис. 1, то ці криві можуть бути ребром звороту двох торсів, які згинаються один на одного при умові, що кривини рівні. На рис. 2 побудовані торси гелікоїди за рівняннями (11) для різних кутів підйому ребра звороту при його довжині 15 лінійних одиниць. При $\beta = 0$ рівняння (11) описують розгортку.

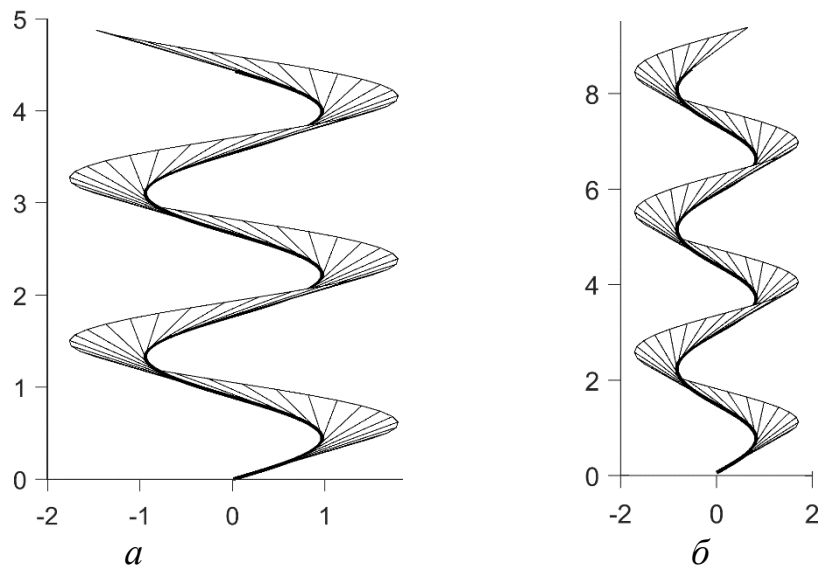


Рис. 2. Фронтальні проєкції торсів гелікоїдів, які згинаються один на одного, зміною кута підйому ребра звороту:

- а) кут підйому $\beta = 17^\circ$; б) кут підйому $\beta = 34^\circ$

Приклад 2. Побудуємо торс, для якого ребром звороту є крива сталої кривини із лінійним законом зростання кута підйому (рис. 1). Для його

побудови необхідно застосовувати чисельні методи, з допомогою яких за рівняннями (5) будується ребро звороту. Інтенсивність зміни кута $\beta = a \cdot s$ залежить від величини сталої a . На рис. 3 побудовані торси для різних значень сталої a .

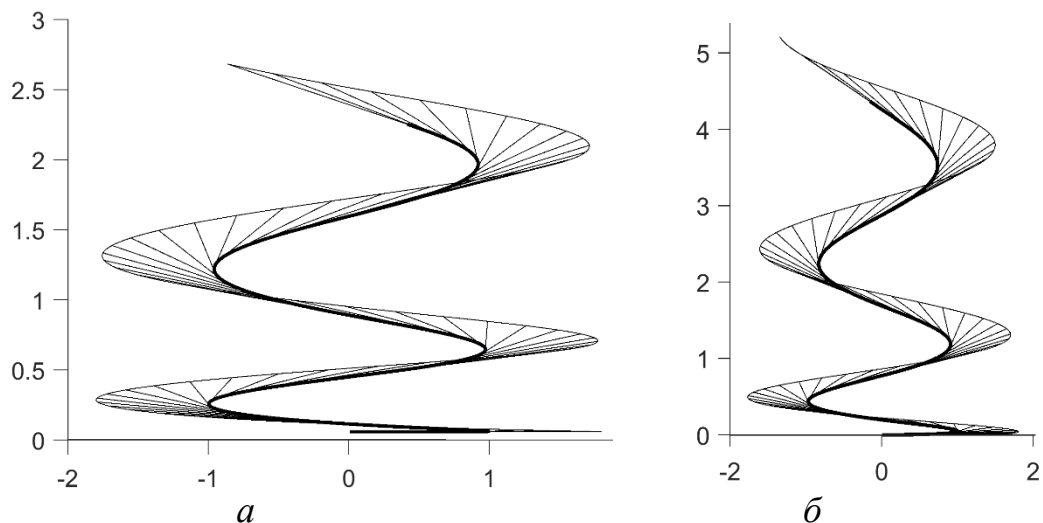


Рис. 3. Фронтальні проєкції торсів гелікоїдів, які згинаються один на одного, із лінійним зростанням кута підйому ребра звороту:
 а) $\beta = 0,02s$; б) $\beta = 0,04s$

При довжині ребра звороту 15 лінійних одиниць кут підйому β у верхній точці становить 0,3 рад. (рис. 3,а) і 0,6 рад. (рис. 3, б), тобто 17° і 34° . Всі зображені торси можуть бути зігнуті один на одного, оскільки кривина їх ребер звороту стала і рівна. Процес згинання в першому випадку (рис. 2) і в другому (рис. 3) носить різний характер. Для першого випадку згинання торса відбувається одночасно по всій поверхні з однаковою інтенсивністю, а в другому – поступово. Торс, зображений на рисунку 2,а, може бути продовженням торса, зображеного на рисунку 3,а. Кут підйому, який зростає від нуля до 17° (рис. 3, а), далі буде сталим (рис. 3, а). Те ж само стосується торсів на рис. 2, б і 3, б.

Приклад 3. Розглянемо приклад, коли кривина і кут підйому ребра звороту є змінними величинами. Вони вибрані таким чином, щоб рівняння (6) можна було повністю проінтегрувати. Залежності $k = k(s)$ і $\beta = \beta(s)$ мають наступний вигляд:

$$k = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{1 + a^2 s^2}; \quad \beta = \text{Arctg}(as). \quad (12)$$

Крива, задана натуральними рівняннями (12), розташована на циліндрі одиничного радіуса. Підстановка цих рівнянь з урахуванням похідної виразу кута β в рівняння (6) приводить до наступного результату:

$$\begin{aligned}
X &= \sin\left(\frac{\operatorname{Arcsinh} as}{a}\right) + \frac{u}{\sqrt{1+a^2s^2}} \cos\left(\frac{\operatorname{Arcsinh} as}{a}\right); \\
Y &= \cos\left(\frac{\operatorname{Arcsinh} as}{a}\right) - \frac{u}{\sqrt{1+a^2s^2}} \sin\left(\frac{\operatorname{Arcsinh} as}{a}\right); \\
Z &= \frac{\sqrt{1+a^2s^2}}{a} + \frac{uas}{\sqrt{1+a^2s^2}}.
\end{aligned}
\tag{13}$$

На рис. 4 за рівняннями (13) побудовані торси при різних значеннях сталої a .

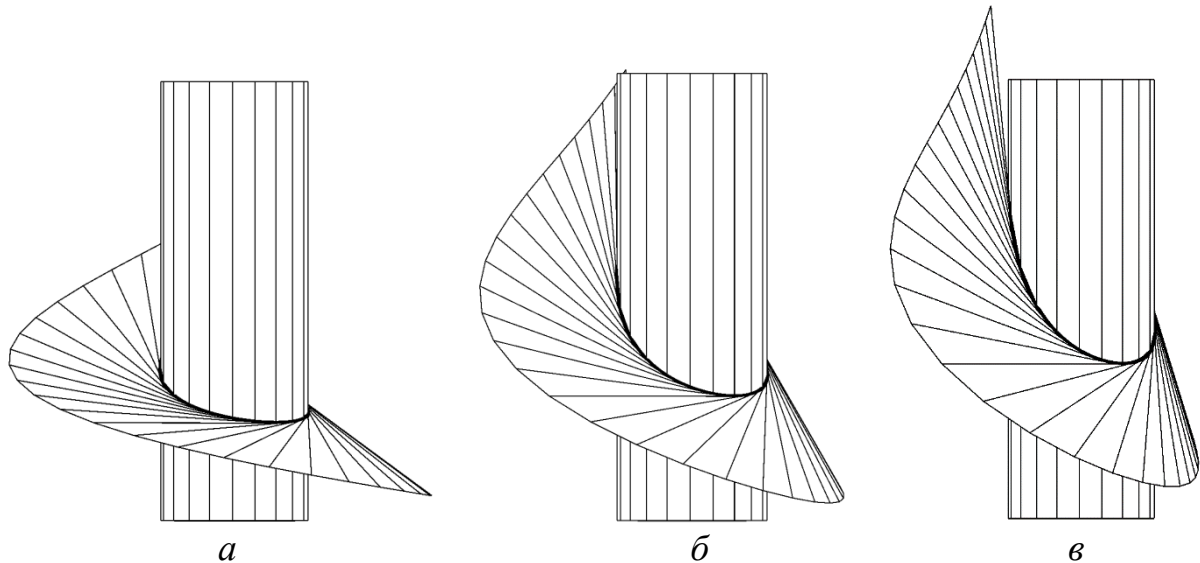


Рис. 4. Фронтальні проєкції торсів з ребром звороту на циліндрі, побудовані за параметричними рівняннями (13):
а) $a=0,3$; б) $a=0,6$; в) $a=0,9$

При згинанні торса, ребро звороту якого задане натуральними рівняннями (12), воно деформується, залишаючись на поверхні циліндра. Якщо задати іншу закономірність зміни кута підйому, то воно буде деформуватися по іншому.

Висновки. Управляти згинанням торса можна зміною скруту його ребра звороту, при цьому закономірність кривини у функції довжини дуги залишається незмінною. Однак перехід від натуральних рівнянь кривини і скруту ребра звороту до параметричних зв'язаний із складнощами інтегрування і практично не може бути доведений до кінцевого вигляду. Заміна натурального рівняння залежності скруту від довжини дуги на залежність кута підйому від цього ж параметра значно полегшує такий перехід. Для деяких випадків параметричні рівняння торсів можна отримати в кінцевому вигляді. Це дозволяє будувати його проміжні положення при згинанні без застосування чисельних методів.

Література

1. Бутенин Н.В., Луниц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Москва : Наука, 1985. 240 с.
2. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. Москва: Наука, 1949. 511 с.
3. Фиников С.П. Дифференциальная геометрия. Москва : Наука, 1961. 158 с.
4. Устенко С.А. Геометричне моделювання просторових кривих ліній, заданих кривиною та скрутом. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2011. Вип. 29. С. 86–90.
5. Захарова Т.М. Конструювання просторових кривих, що описуються рівняннями у функції довжини дуги, за допомогою супровідного тригранника вихідної кривої. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Т. 57. Мелітополь: ТДАТУ, 2013. С. 104 –112.
6. Petroula D. (2018). PH Curves with Non-Primitive Hodographs. *J. Geometry Graphics*, 22/2, 163-181.
7. Soukaina Ouarrab, Amina Ouazzani Chahdi, Malika Izid. (2020). Ruled Surface Generated by a Curve Lying on a Regular Surface and its Characterizations. *J. Geometry Graphics*. Vol. 24/2, 257–267.
8. Pylypaka, S., Kresan, T., Trokhaniak, O., Taras, I., Demchuk, I. (2021). Parametric Equations of a Spatlal Curve as a Function of Length of the Arc with Gleven Dependences of Curvature and Angleof Ascent. *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 25(2), 163-170. <https://publons.com/wos-op/publon/52467604/>

Ph. D., prof **Serhiy Pylypaka**,

s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID: 0000-0002-1496-4615

Ph. D., assoc. prof **Tetiana Kresan**,

tanyakresan@i.ua ORCID: 0000-0002-8280-9502

Postgraduate Student **Vyacheslav Hropost**,

hropost97@ukr.net ORCID: 0000-0001-9363-3955

Ph.D., assoc. prof. **Iryna Hryshchenko**,

irgr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-1000-9805

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

Ph. D. **Iryna Demchuk**

okira@i.ua ORCID: 0000-0001-9566-2194

Separate Division of the University, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, "Nizhynsk Agrotechnical Institute"

CONTROL OF THE BENDING OF THE TORSO BY CHANGING THE DEPENDENCE OF THE ANGLE OF RISING OF ITS BACK RIB

A spatial curve can be specified by two natural equations: the dependence of the curvature and the dependence of the twist on the length of its arc. If such a curve is taken as the edge of the torso turn, then its bending can be controlled by changing the curvature of the curve, since the curvature does not change. However, in practice, such bending is difficult to implement, since there is no simple transition from the natural equations of the spatial curve to the parametric ones. Such a transition requires numerical methods for solving a system of differential equations. It is possible to approach the solution of this question in a different way, namely to replace the dependence of the twist on the length of the arc of the curve with the dependence of the angle of elevation also on the length of the arc of the curve. In this case, the formulas for the transition from natural equations to parametric ones are greatly simplified and in some cases do not require numerical integration.

The article uses just such an approach for constructing torsos. The parametric equations of the torso in its general form are presented, in which the turning edge is a spatial curve, given by the dependence of the curvature and the angle of elevation on the length of its arc. It is shown that by changing the regularity of the angle of elevation, the process of bending the torso can be controlled. At the same time, the expression of the first quadratic form was found, which does not include the dependence of the angle of elevation of the turning edge, but only the dependence of its curvature. This indicates that it is possible to transform the back edge in different ways, that is, to bend the torso, and at the same time the first square shape remains unchanged. A well-known example of the bending of a helicoid torso by a discrete change in the elevation angle of its reverse rib is given. Torso-helicoid bending by changing the elevation angle of the turning rib according to the linear law is also demonstrated. Numerical methods were used for this. The resulting torso is no longer a torso of the same inclination of the generators. An example of bending of the torso is also given, in which the curvature and the angle of elevation of the turning rib are variable dependences on the length of the arc. They are selected in such a way that they allow obtaining intermediate positions of the torso during its bending with the help of equations in the final form. Examples are given, visualization of the obtained results is carried out.

Keywords: curve; association; torse; arc; arris; flection.