

УДК 514.18

DOI: 10.32347/0131-579x.2024.106.221-240

аспірант **Посікера А. В.**,

posikera142@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3989-2704

д. т. н., професор **Скочко В. І.**,

vladimir.and.friends@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1709-2621

аспірант **Широков А. О.**,

a.shirokov@bxp.com.ua, ORCID: 0009-0008-0602-7083

Спірідонов В. Г.,

spiridonov0505@gmail.com, ORCID: 0009-0003-4318-1833

Київський національний університет будівництва і архітектури

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГЛАДКОГО СПОЛУЧЕННЯ ФРАГМЕНТІВ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ ПОВЕРХОНЬ

У роботі розглянуто концепцію одного з підходів до моделювання гладкого з'єднання країв архітектурних оболонок, представлених у формі дискретних образів. Даний підхід ґрунтується на геометричному формоутворенні локальних сполучних дискретно представлених поверхонь, які за формою імітують характер деформування гнучких пружних тонкостінних оболонок. Процес моделювання їх форми передбачає системне визначення координат вузлів сполучних дискретно представлених поверхонь, на основі розв'язання рівнянь рівноваги статико-геометричного методу прикладної геометрії. При цьому необхідно застосовувати інструменти теорії параметризації для формування дискретних аналогів апроксимаційних різницевих операторів (рівнянь) і відповідних обчислювальних шаблонів для вузлів сіток дискретних образів, якими необхідно гладко сполучати краї заданих фрагментів архітектурних оболонок. Побудова вищезазначених апроксимаційних операторів відбувається шляхом зв'язування координат суміжних вузлів на основі виключення з рівнянь їх рівноваги компонентів векторів зовнішнього формоутворюючого навантаження. Таким чином утворюються нові рівняння рівноваги, які власне й визначають положення усіх вузлів та форму шуканих фрагментів гладкого сполучення архітектурних оболонок. Простота, наочність та універсальність даного підходу дозволяє без ускладнень узагальнити його застосування по відношенню не лише до регулярних, але й нерегулярних сіток дискретних образів.

Ключові слова: гладке зшивання; архітектурні оболонки; дискретні образи; регулярні сітки; нерегулярні сітки; сітчасті структури геометричне формоутворення; рівновага вузлів; статико-геометричний метод.

Постановка проблеми. На сьогоднішній день все більше архітекторів, конструкторів та інженерів при проектуванні вдаються до застосування базових принципів зеленого будівництва та сталого розвитку. Це передбачає дотримання високих стандартів енергоефективності та ресурсозбереження. Окрім того, вищезгадані принципи та стандарти, як правило, вбачають використання інструментів сучасних архітектурних стилів, таких як деконструктивізм, органічна архітектура, параметрична архітектура, арт деко та біонічна архітектура. В рамках цих стилів досить розповсюдженими є плавні форми та оболонкові огорожувальні конструкції (при чому не лише у конструкціях покриттів, а й стінових конструкціях, і в тому числі світлопрозорих), які конструктивно реалізуються переважно на основі металевих, залізобетонних та дерев'яних каркасів. Таким чином, моделі огорожувальних конструкцій відповідних будівель найчастіше проектуються як дискретні сітчасті структури. Окрім того, плавні сполучення огорожувальних конструкцій (особливо по відношенню до непрозорих конструкцій) дозволяють значною мірою покращити форм фактор будівель, зменшити кількість містків холоду та знизити кількість тепловтрат у частині трансмісійної теплопередачі. Це в свою чергу дає змогу підвищити рівень енергоефективності будівель та водночас досягнути вищих екологічних та економічних показників на стадії експлуатації.

Відтак, розвиток інструментальної бази методів та підходів до геометричного моделювання плавного сполучення архітектурних форм є дуже актуальною та практичною проблематикою зі значним потенціалом практичного застосування.

Ціль статті. Детально проаналізувати наявну інструментальну базу для моделювання оболонок, як дискретно представлених поверхонь. Дослідити перспективи розвитку одного із підходів до моделювання гладкого з'єднання країв дискретних образів архітектурних оболонок, що базується на параметричному зв'язуванні координат їх вузлів шляхом вилучення з рівнянь рівноваги компонентів зовнішніх формоутворюючих навантажень. Запропонувати єдиний механізм побудови дискретних апроксимаційних операторів, що буде застосовним як для регулярних, так і нерегулярних сіток, й даватиме змогу імітувати характер геометрії гнучких тонкостінних оболонок.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Геометричне моделювання архітектурних оболонок за допомогою методів прикладної геометрії передбачає створення їх неперервних або дискретних образів-аналогів у вигляді поверхонь чи складних просторових сітчастих структур. Коли мова йде про побудову неперервних образів архітектурних оболонок, то очікується, що результатом моделювання стане деяка функціональна залежність (функція), записана у явній, неявній, або параметричні формі [1]. Однак, коли мова йде про побудову дискретних образів, то вбачається, що процес моделювання полягатиме у пошуку деякої скінченної множини

точок, які належать, або близькі до шуканої архітектурної оболонки. Слід зауважити, що процес дискретного геометричного моделювання, як правило передбачає розв'язання певної множини рівнянь, кількість яких відповідає кількості координат шуканих вузлів. При цьому мають бути чітко визначені крайові та початкові умови моделювання, які переважно представлені координатами вузлів опорних контурів та точок, а також початковими значеннями координат усіх вузлів.

Відповідно, для отримання неперервних функціональних образів архітектурних оболонок застосовують аналітичні підходи та методи, а також інструментами кінематичної побудови.

Для отримання дискретних образів, вдаються до застосування методів прикладної дискретної геометрії. Найбільш системно ці методи були описані та проаналізовані у роботах [2, 3, 4, 5].

У світлі того, що на сьогоднішній день робота переважної більшості архітектурних конструкцій в процесі виконання конструктивних обчислень на міцність та стійкість піддається чисельному моделюванню [6, 7, 21] й потребує попереднього формування дискретних розрахункових моделей, все більш широкого застосування набувають саме дискретні методи геометричного формоутворення. Загалом, дискретне геометричне формоутворення є задачею зворотною до комплексного чисельного моделювання компонентів напружено-деформованого стану конструктивних елементів архітектурних оболонок й у більшості випадків має забезпечувати подальше дотримання усіх нормативних вимог до конструктивної надійності цих оболонок. А тому, розрахункові геометричні моделі, отримані на основі дискретного геометричного формоутворення зі значно вищою ймовірністю працюватимуть так, як це вбачається проектувальниками, а ні ж ті, що були отримані на основі попереднього ескізування без застосування інструментів системних розрахунків. Справа в тому, що зазначені методи геометричного моделювання у своїй переважній більшості базуються на фізичних особливостях роботи відповідних конструкцій, безпосередньо на диференціальних закономірностях що визначають їх напружено-деформований стан, або на скінченно-різницевих аналогах цих закономірностей, запозичених з методу скінченних різниць (МСР).

МСР можна водночас віднести як до методів дискретної прикладної геометрії, так і до методів чисельного моделювання. Він ґрунтується на застосуванні дискретної апроксимації рівнянь у часткових похідних із заміною диференціальних операторів їх дискретними аналогами з деякою визначеною похибкою [7, 19, 20]. Зокрема, у задачах прикладної геометрії найбільший інтерес представляє моделювання плоских та просторових кривих, поверхонь та об'ємних тіл (повнотілих геометричних об'єктів) різної форми [4]. Узагальнена формула, що визначає скінченно-різницевого співвідношення для апроксимації диференціального оператора довільного k -го порядку має вид:

$$\begin{aligned}
(\partial^k y / \partial x^k)_i &\approx \Delta^k y_i / \Delta x_i^k = (\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i) / h_x^k = \\
&= (-1)^k \cdot \sum_{j=0}^k [(-1)^j \cdot C_k^j \cdot y_{i+j}] / h_x^k, \quad (i = \overline{1, l-1}; l \geq 1, \Delta^0 y_i = y_i), \quad (1)
\end{aligned}$$

де компоненти C_k^j визначаються за формулою:

$$C_k^i = k! / (i! \cdot (k-i)!). \quad (2)$$

Наприклад, для деякої функції $y = \zeta(x)$ похідні 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків, при умові, що крок дискретизації по осі абсцис є сталим і рівним h , у формі скінченно-різницевих співвідношень мають наступний вигляд:

$$\partial y / \partial x \approx (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2 \cdot h, \quad (i = \overline{1, n-1}); \quad (3)$$

$$\partial^2 y / \partial x^2 \approx (y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1}) / h^2, \quad (i = \overline{1, n-1}); \quad (4)$$

$$\partial^3 y / \partial x^3 \approx (-y_{i-2} + 2 \cdot y_{i-1} - 2 \cdot y_{i+1} + y_{i+2}) / 2 \cdot h^3, \quad (i = \overline{2, n-2}); \quad (5)$$

$$\partial^4 y / \partial x^4 \approx (y_{i-2} - 4 \cdot y_{i-1} + 6 \cdot y_i - 4 \cdot y_{i+1} + y_{i+2}) / h^4, \quad (i = \overline{2, n-2}). \quad (6)$$

Коли мова йде про будівлі та споруди, більшість локальних частин архітектурних оболонок являють собою фрагменти гладких поверхонь, які мають відомі аналітично отримані функції або диференційний опис їх фізичної роботи, що робить методи дискретної апроксимації за допомогою скінченно-різницевих операторів надзвичайно актуальними і дієвими [4, 5, 7]. У таких випадках робота дискретних фрагментів оболонки описується диференційними рівняннями у часткових похідних, де диференційні оператори замінюються їх дискретними аналогами з певною похибкою. Розв'язання отриманих скінченно-різницевих рівнянь дозволяє віднайти усі внутрішні зусилля, деформації та переміщення, однак при умові, що форма оболонок уже є апріорно заданою інформацією. При цьому, як уже наголошувалося, розв'язок завжди є наближенням із тією чи іншою точністю. Загальні можливості апроксимації за допомогою скінченних різниць докладно описані у працях [5, 7].

Так як мова у даній роботі йде про гладке зшивання поверхонь за допомогою дискретно представлених двовимірних образів (сіток), характер деформації яких відповідає тонкостінним пружним оболонкам, буде корисним зазначити, що диференційне рівняння згину тонких пластин (рівняння Софі Жермен [22]) із циліндричною жорсткістю D та під дією поперечного розподіленого зусилля p , має наступний вид:

$$\partial^4 w / \partial x^4 + 2 \cdot \partial^4 w / (\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4 w / \partial y^4 = p / D \quad \text{або} \quad \nabla^4 w = p / D. \quad (7)$$

Тут $w = \zeta(x, y)$ – функція прогину, що виникає під дією поперечного розподіленого зусилля p , яке діє паралельно координатній осі Oz ; ∇^4 – бігармонічний оператор, що має форму:

$$\nabla^4 = \partial^4 / \partial x^4 + 2 \cdot \partial^4 / (\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4 / \partial y^4. \quad (8)$$

Рівняння (6) у скінченно-різницевій формі приймає наступний вигляд, за умови, що крок дискретизації сталий та рівний h у обох напрямках розбиття (тобто і у напрямку осі Ox , і Oy):

$$\left(\begin{array}{l} 20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + \\ + 2 \cdot (w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}) + \\ + w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2} \end{array} \right) = \frac{p \cdot h^4}{D}. \quad (9)$$

На жаль, застосування рівнянь (7) та (9) обмежені тим, що дія навантаження має бути лише нормальною до поверхні пластини, а сама пластина, за визначенням є фрагментом площини. Тож, для обчислення прогинів, цю пластину необхідно суміщати або розташовувати паралельно з координатною площиною xOy . Відтак, навіть для визначення деформованого стану пластин, ці рівняння є обмежено придатними, не говорячи вже про чисельне моделювання напружено-деформованого стану довільних криволінійних просторових оболонок.

В той же час, МСР має ряд інших суттєвих обмежень, пов'язаних зі складнощами дискретного диференціювання та вимогами до геометрії крайових опорних контурів, які накладаються на застосування самих різницевих співвідношень. Відтак, у випадках, коли форма оболонки має передбачувані конструктивні рішення у вигляді просторового каркасу, набагато більш доцільно застосовувати методи формоутворення на основі механічних принципів роботи відповідних конструкції.

Одним із найбільш ефективних та розвинених методів прикладної дискретної геометрії, який ґрунтується на фізичному уявленні про роботу конструкцій каркасів оболонок як механічних систем, є статико-геометричний метод (СГМ) [2, 4, 5, 8, 9, 10], розроблений професором С. М. Ковальовим і розвинений його учнями й послідовниками. СГМ дозволяє описати стан статичної рівноваги усіх вільних (незакріплених) вузлів дискретного образу на основі наперед заданої топології сітчастої структури, крайових умов (представлених закріпленими вузлами, які не можуть змінювати своє положення в просторі під час моделювання), наперед заданих або визначених значень зовнішніх зосереджених вузлових формоутворюючих навантажень \bar{P}_i , а також шляхом прийняття гіпотези про те, що довжини усіх ланок (стрижнів або ниток у механічному сенсі) $\delta_{i,j}$ прямо пропорційні абсолютним значенням внутрішніх зусиль $R_{i,j}$, що виникають під дією на модель зовнішніх навантажень P_i :

$$\delta_{i,j} = R_{i,j} / k_{i,j}. \quad (10)$$

Індекси i та j відповідають деяким i -му та j -му вільним вузлам моделі, сполучених ланкою. Як правило, коефіцієнти пропорційності $k_{i,j}$, а також початкові значення зовнішніх навантажень P_i задаються сталими і не змінюються у процесі моделювання, будучи початковими умовами моделювання [4].

Математичне вирішення задачі формоутворення моделі за СГМ полягає у складанні системи рівнянь статичної рівноваги для усіх вільних вузлів з подальшим їх розв'язанням відносно невідомих координат. Кожне рівняння рівноваги представляє собою векторну рівність сил \bar{P}_i , що діють на кожен вільний вузол, а також внутрішніх зусиль $\bar{R}_{i,j}$, які виникають у стрижнях/ланках моделі внаслідок зовнішнього впливу сил \bar{P}_i :

$$\sum_{j=1}^n \bar{R}_{i,j} = \bar{P}_i. \quad (11)$$

Проекціюючи векторні складові рівняння (11) на координатні осі, отримуються рівняння рівноваги у координатній формі. У скороченій формі після деяких спрощень, якщо умовно позначити координати вузлів (x , y та z) літерою s , відповідні рівняння рівноваги можуть бути записані так:

$$\left(-\sum_{j=1}^n k_{i,j} \right) \cdot s_i + \sum_{j=1}^n (k_{i,j} \cdot s_j) = P_{i_s}. \quad (12)$$

При формоутворенні дискретно представленого образу серед усіх варіантів розподілу зусиль може існувати такий, при якому усі коефіцієнти пропорційності $k_{i,j}$ рівні між собою:

$$k_{i,j} = k = const. \quad (13)$$

В цьому випадку рівняння (10) набуває наступної, ще більш спрощеної, форми:

$$-n \cdot s_i + \sum_{j=1}^n s_j = P_{i_s} / k. \quad (14)$$

Така форма дозволяє значно скоротити обчислювальну складову процесу формоутворення дискретного образу, незалежно від його вимірності. Для більшої наочності, рівняння (12) і (14) можуть бути представлені у формі обчислювальних шаблонів, що зображені на рис. 1 та рис. 2 відповідно.

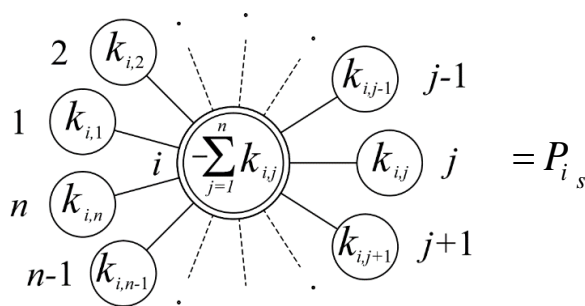


Рис. 1 Обчислювальний шаблон еквівалентний рівнянню (12)

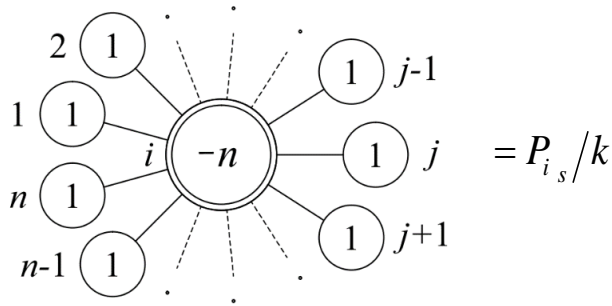


Рис. 2 Обчислювальний шаблон еквівалентний рівнянню (14)

Цікавим є те, що у ряді випадків існує можливість віднайти аналітичні форми запису функцій, неперервні графіки яких проходять через вузли отриманих на основі СГМ дискретних образів, являючись їхнім неперервним аналогом. Відповідні дослідження продемонстровані у працях, присвячених розвитку інструментів математичного апарату числових послідовностей [11, 12, 13].

СГМ є деякою мірою методом спорідненим із МСР, оскільки форма його рівнянь є близькою до тотожностей, що одержуються шляхом скінчено-різницевої апроксимації диференціальних рівнянь. Однак, в області їх застосування є переважно різною.

Для підвищення універсальності СГМ дослідники інколи вдаються до запозичення деяких принципів та інструментів МСР.

Один із дуже показових підходів до такого запозичення було продемонстровано у роботах Бурчака І. Н. [14, 15]. Зокрема у дослідженні [14], спираючись на доведення, представлене у [9], було відмічено, що рівняння рівноваги деякого вузла плоскої ламаної, що дискретно моделює форму зігнутої осі деякої пружної рейки змінного перерізу має вид:

$$-y_{i-2} + 4 \cdot y_{i-1} - 6 \cdot y_i + 4 \cdot y_{i+1} - y_{i+2} = 0, \quad (15)$$

який співпадає (із протилежними знаками при усіх коефіцієнтах) із рівнянням рівноваги вузла розтягнутої пружної нитки при умові впливу на неї лінійно-розподіленого вертикального навантаження. При цьому, рівняння (15) представляє собою скінченного різницеву апроксимацію кубічної параболи [9]:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3, \quad (16)$$

адже саме кубічна парабола є найпростішою кривою, побудованою на основі функції степеневих поліномів, що може мати точку плавного перегину, а це є однією з найважливіших властивостей сплайнів, які в свою чергу активно використовуються для побудови інтерполяційних кривих інструментами систем автоматизованого проектування (САПр). Сплайни та локальні (кускові) поверхні є дуже вагомим інструментом, оскільки саме вони дозволяють проектувальникам у форматі графічних рішень на рівні ескізування сполучати практично будь-які поверхні, що інтерпретують майбутні архітектурні форми.

Окрім того, у дослідженні [14] було запропоновано застосовувати здійснювати параметризацію умов формоутворення дискретно представлених поверхонь. Зокрема, було запропоновано вдаватися до зв'язування параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження для отримання аналогів скінченного різницевого рівняння рівноваги як регулярних, так і нерегулярних вузлів. Зосередимося на цьому підході більш детально.

Основна частина. Однак, перш ніж перейти до аналізу умов параметризації, необхідно детальніше пояснити природу рівняння (15). Для цього звернемося до початкового поняття фізичного сплайну [23]. Перед появою САПр, архітектори та інженери, виконуючи креслення на кульманах, користувалися так званими сплайнами – довгими тонкими рейками з дерева, металу або будь-якого іншого матеріалу, які могли гнутися та, протягом достатнього часу знаходячись у стані пружної деформації, слугувати лекалом для проведення плавних кривих ліній. Точки сплайну фіксувалися за допомогою підвішування до них свинцевих доважків. Ці ж доважки дозволяли управляти формою сплайну, дозволяючи досягти умов проходження його тіла крізь необхідні точки. Користуючись сплайнами можна було сполучити інші фрагменти прямих та кривих ліній. Якщо розглядати фізичний сплайн як тонку рейку, що гнеться у координатній площині xOy , то визначення згинального моменту $M(x)$ у ній може описуватися законом Бернуллі – Ейлера:

$$M(x) = E \cdot I \cdot \left[\frac{1}{R(x)} \right], \quad (17)$$

де E – модуль пружності (Юнга), I – геометричний момент інерції, $R(x)$ – радіус кривизни кривої, що співпадає з деформованою віссю рейки. При цьому, якщо деформації є незначними за величиною, можна з деяким допущенням замінити $R(x)$ на $1/[\partial^2 y(x)/\partial x^2]$, де $y(x)$ – деформована вісь рейки (сплайну). Тоді рівняння (15) набуде вигляду^

$$M(x) = E \cdot I \cdot \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]. \quad (18)$$

Замінюючи часткову похідну у формулі (18) на скінченно-різницево співвідношення (4), а також після спрощення, вона прийме наступну форму:

$$y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1} = \frac{h^2}{E \cdot I} \cdot M(x_i). \quad (19)$$

У зв'язку із тим, що доважки по суті еквівалентні простим опорам (оскільки в процесі визначення внутрішніх сил опорні реакції також прикладаються до рейки як зосереджені зусилля), функція $M(x)$ між точками закріплення доважків та точками фіксації змінюється за лінійним законом. Це означає, що для будь-якого i -го значення згинального моменту

$M_i=M(x_i)$, якщо аналізувати ці значення з деяким сталим кроком h має виконуватися наступна рекурентна залежність:

$$M_i = (M_{i-1} + M_{i+1})/2. \quad (20)$$

Цю ж залежність можна переписати у формі рівняння, спростивши наступним чином:

$$M_{i-1} - 2 \cdot M_i + M_{i+1} = 0. \quad (21)$$

Запишемо тепер рівняння типу (19) для $(i-1)$ -го, i -го та $(i+1)$ -го вузлів дискретно представленого сплайну:

$$y_{i-2} - 2 \cdot y_{i-1} + y_i = \frac{h^2}{E \cdot I} \cdot M_{i-1}, \quad (22)$$

$$y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1} = \frac{h^2}{E \cdot I} \cdot M_i, \quad (23)$$

$$y_i - 2 \cdot y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^2}{E \cdot I} \cdot M_{i+1}. \quad (24)$$

Вважаючи товщину та фізико-механічні властивості сплайну на досліджуваному фрагменті сталими, виразимо значення моментів M_{i-1} , M_i та M_{i+1} з формул (22) – (24) та підставимо до (21) після усіх математичних спрощень отримаємо

$$y_{i-2} - 4 \cdot y_{i-1} + 6 \cdot y_i - 4 \cdot y_{i+1} + y_{i+2} = 0, \quad (25)$$

що, за виключенням знаків при коефіцієнтах, повністю відповідає тотожності (15). Записуючи рівняння типу (25) для усіх вільних вузлів дискретно представленого сплайну, та розв'язуючи їх відносно невідомих координат, ми отримаємо набір точок, положення яких забезпечить гладке сполучення заданих опорних точок, що є або зафіксованими, або затиснутими доважками.

Аналогічну ідею зв'язування параметрів, але вже із зовнішніми формоутворюючими концентрованими вертикальними зусиллями P_z було запропоновано застосовувати по відношенню до вузлів дискретно представлених поверхонь, побудованих на основі СГМ. Наприклад для дискретно представлених поверхонь, побудованих на основі сітки II-го типу з чотирикутною чарункою було запропоновано вдаватися до зв'язування параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження наступною рекурентною тотожністю:

$$4 \cdot P_{z_{i,j}} - P_{z_{i-1,j}} - P_{z_{i+1,j}} - P_{z_{i,j-1}} - P_{z_{i,j+1}} = 0. \quad (26)$$

Будуючи по принципу формули (12) рівняння рівноваги п'яти суміжних вузлів:

$$-4 \cdot z_{i,j} + z_{i+1,j} + z_{i-1,j} + z_{i,j+1} + z_{i,j-1} = \frac{P_{z_{i,j}}}{k}, \quad (27)$$

$$-4 \cdot z_{i-1,j} + z_{i-2,j} + z_{i,j} + z_{i-1,j+1} + z_{i+1,j-1} = \frac{P_{z_{i-1,j}}}{k}, \quad (28)$$

$$-4 \cdot z_{i,j-1} + z_{i,j} + z_{i,j-2} + z_{i-1,j-1} + z_{i+1,j-1} = \frac{P_{z_{i,j-1}}}{k}, \quad (29)$$

$$-4 \cdot z_{i,j-1} + z_{i,j} + z_{i,j-2} + z_{i-1,j-1} + z_{i+1,j-1} = \frac{P_{z_{i,j-1}}}{k}, \quad (30)$$

$$-4 \cdot z_{i,j+1} + z_{i,j} + z_{i+1,j+1} + z_{i,j+2} + z_{i-1,j+1} = \frac{P_{z_{i,j+1}}}{k}, \quad (31)$$

а потім виражаючи з цих рівнянь значення вертикальних зусиль P_z і підставляючи їх до тотожності (26), отримаємо рекурентне рівняння для опису стану статичної рівноваги дискретно представлені поверхні, яка гладко проходить через задані точки та опорний контур. При цьому коефіцієнти цього рівняння із оберненими знаками відповідають коефіцієнтам, отриманим в результаті скінченно-різницевої апроксимації бігармонічного рівняння Софі Жермен (7):

$$\left(\begin{array}{l} -20 \cdot z_{i,j} + 8 \cdot (z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1}) + \\ -2 \cdot (z_{i-1,j-1} + z_{i+1,j-1} + z_{i-1,j+1} + z_{i+1,j+1}) - \\ -(z_{i-2,j} + z_{i+2,j} + z_{i,j-2} + z_{i,j+2}) \end{array} \right) = 0. \quad (32)$$

Процес утворення рівняння (30) на основі параметричної тотожності (24) проілюстровано у формі послідовних математичних операцій над обчислювальними шаблонами СГМ на рис. 3.

Варто звернути увагу на те, що рівняння (24), яке відображає принцип зв'язування параметрів, може бути застосоване не лише для випадків, коли вузли дискретно представлені поверхні переміщуються (прогинаються) уздовж координатної осі Oz під дією зовнішніх векторних навантажень, які мають лише компоненту P_z (при умові, що сітка має регулярне розбиття зі сталим кроком h), але й для загальних випадків, коли зовнішні навантаження мають усі три векторних компонента у просторі:

$$\bar{P}_{i,j} = P_{x_{i,j}} \cdot \bar{e}_x + P_{y_{i,j}} \cdot \bar{e}_y + P_{z_{i,j}} \cdot \bar{e}_z. \quad (33)$$

У такому випадку, якщо вдатися до скороченого позначення координат вузлів (x , y та z) літерою s (як це було зроблено для рівностей (12) – (14)), рівняння (26) набуває вигляду:

$$4 \cdot P_{s_{i,j}} - P_{s_{i-1,j}} - P_{s_{i+1,j}} - P_{s_{i,j-1}} - P_{s_{i,j+1}} = 0. \quad (34)$$

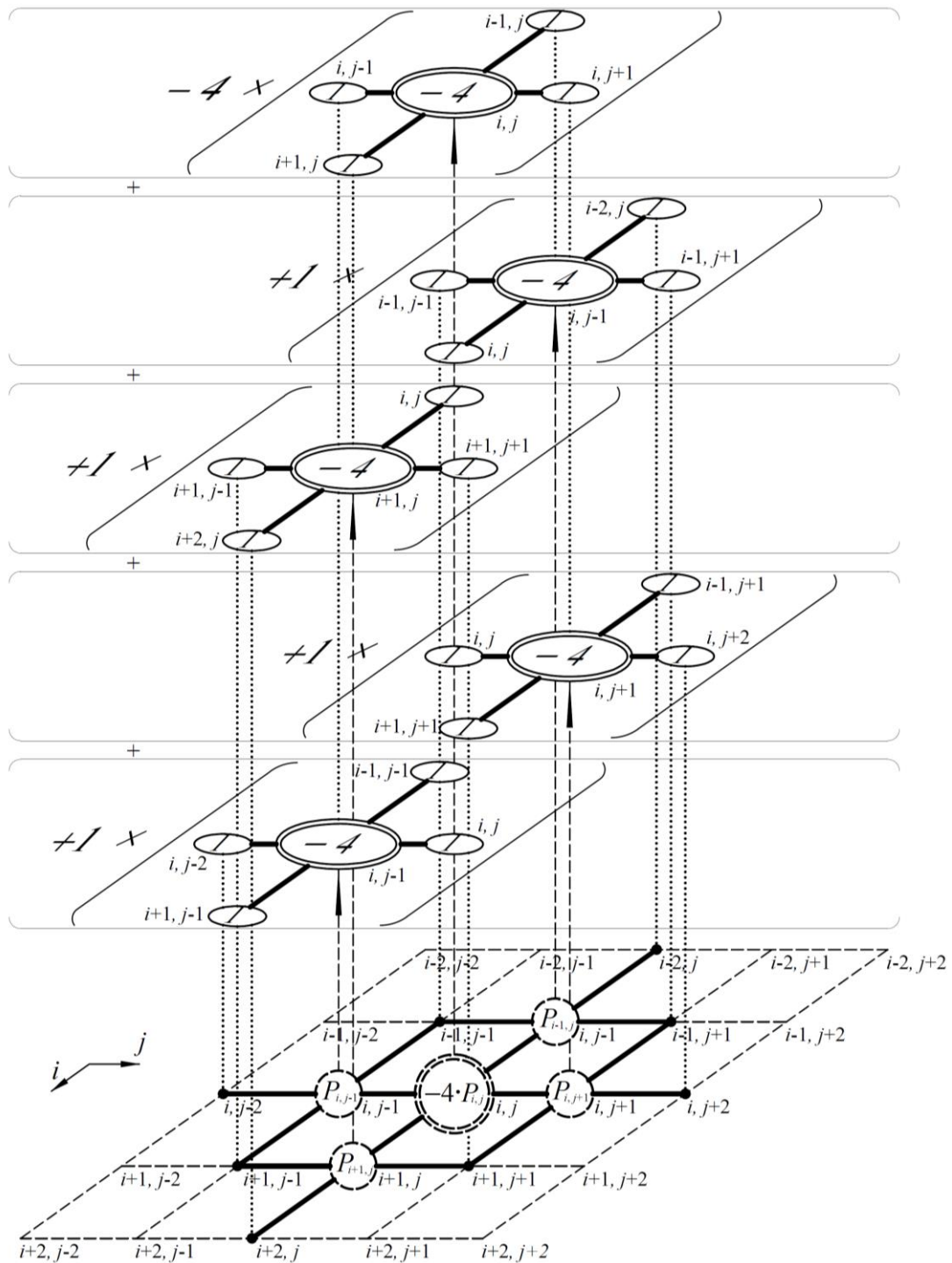


Рис. 3 Ілюстрація процесу утворення рівняння (30)
на основі параметричної тотожності (24)

Користуючись аналогічним спрощенням позначення можна переписати й рівняння (30):

$$\left(\begin{array}{l} -20 \cdot s_{i,j} + 8 \cdot (s_{i-1,j} + s_{i+1,j} + s_{i,j-1} + s_{i,j+1}) + \\ -2 \cdot (s_{i-1,j-1} + s_{i+1,j-1} + s_{i-1,j+1} + s_{i+1,j+1}) - \\ -(s_{i-2,j} + s_{i+2,j} + s_{i,j-2} + s_{i,j+2}) \end{array} \right) = 0. \quad (35)$$

Рівняння (34) та (35) загалом є тотожними, хоч перше виражає зв'язок між зовнішніми формоутворюючими навантаженнями на вузли, а друге – зв'язок між суміжними координатами, обумовлений параметричним зв'язком (34). Втім, рівняння (34) є більш важливим, оскільки пояснює природу застосованої параметризації. Фактично, рівняння (34) говорить про те, що для отримання гладкості оболонки, представленої дискретною поверхнею, необхідно, щоб у кожному вільному вузлі зовнішня сила P_s , яка діє на цей вузол, приймала середньозважене значення сил, що діють на усі суміжні із ним вузли. Цю умову можна легко проілюструвати переписавши рівняння (34) наступним чином:

$$P_{s_{i,j}} = (P_{s_{i-1,j}} + P_{s_{i+1,j}} + P_{s_{i,j-1}} + P_{s_{i,j+1}}) / 4. \quad (36)$$

Така форма запису відкриває цікаві перспективи для геометричного моделювання оболонок, інтерпретованих дискретно представленими поверхнями на основі нерегулярних сіток довільної топології. Зокрема, якщо припустити, що деякий довільний i -й вузол (зазначимо тут, що для нерегулярних дискретно представлених поверхонь втрачається сенс подвійної індексації вузлів і достатньо одного індексу) сполучається із n іншими вузлами (як вільними, так і фіксованими), то, слідуючи принципу зрівноваженості суміжних зусиль, для даного досліджуваного вузла має виконуватися наступне правило:

$$P_{s_i} = \left(\sum_{j=1}^n P_{s_j} \right) / n. \quad (37)$$

Перепишемо тепер правило (37) у спрощеній формі [17]:

$$-n \cdot P_{s_i} + \sum_{j=1}^n P_{s_j} = 0. \quad (38)$$

Очевидно, отримане рівняння також буде вести до зв'язування параметрів зовнішніх навантажень, але для дискретних образів із довільним нерегулярним сполученням вузлів. Принцип побудови рівнянь рівноваги вузлів нерегулярної сітки у відповідності до параметричної тотожності (38) продемонстровано на рис. 4.

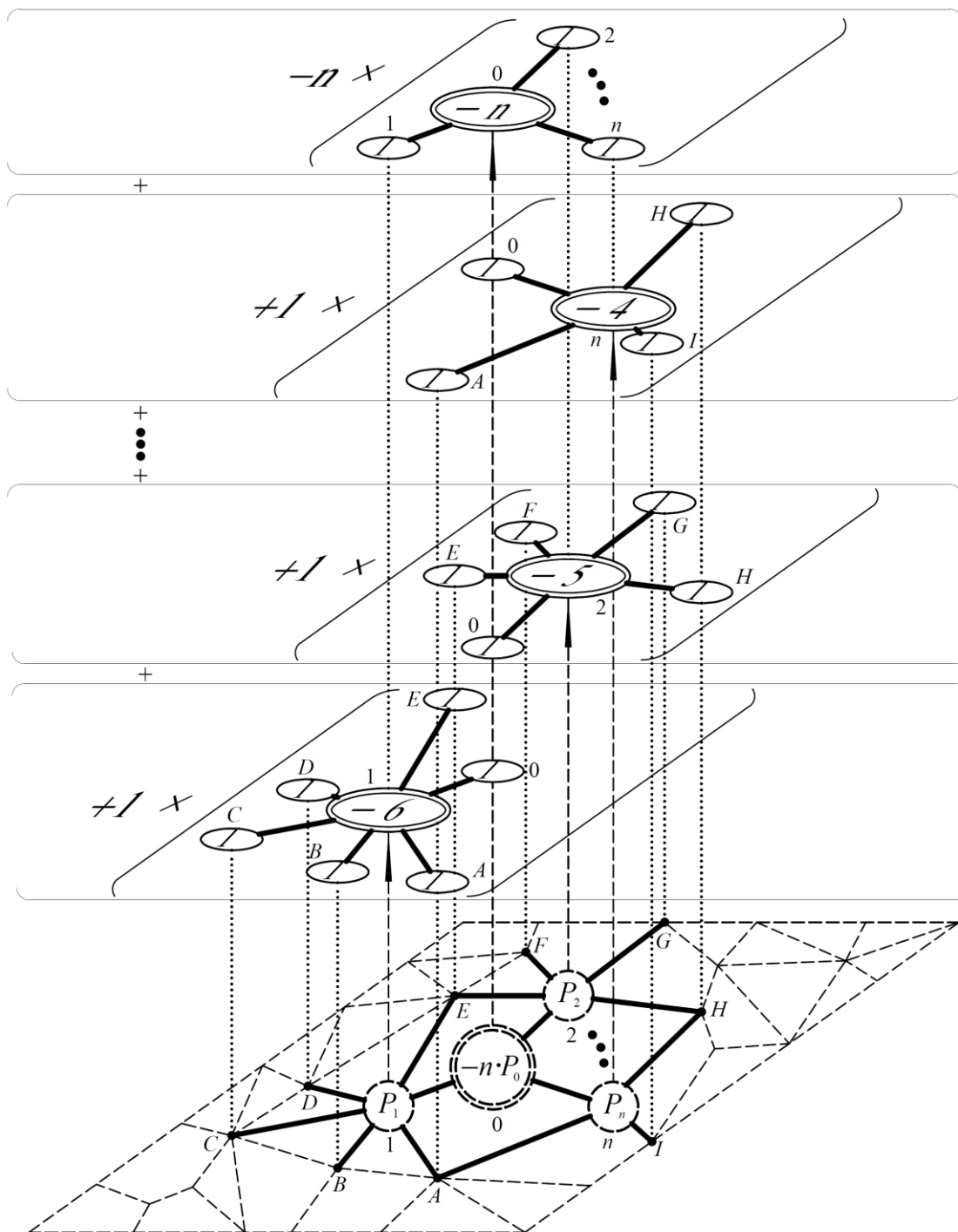


Рис. 4. Ілюстрація процесу утворення рівнянь рівноваги вузлів нерегулярної сітки на основі параметричної тотожності (35)

Окрім того, після зв'язування параметрів навантаження, отриманню рівнянь рівноваги може передувати побудова обчислювальних шаблонів, які є більш наочними та інтуїтивно простішими для сприйняття [18].

Варто додати також додати, що продемонстрований підхід до побудови дискретно представлених образів гладких поверхонь сполучення архітектурних оболонок може виявитися дуже універсальним та простим у застосуванні при умові належного забезпечення його алгоритмізації та програмної реалізації.

Окрім того, цікавим напрямком досліджень може стати виявлення диференціальних закономірностей між зовнішніми формоутворюючими навантаженнями та координатами вузлів моделей.

Так, наприклад, якщо розглядати рівняння (27) записане для узагальненого позначення координат:

$$-4 \cdot s_{i,j} + s_{i+1,j} + s_{i-1,j} + s_{i,j+1} + s_{i,j-1} = \frac{P_{s_{i,j}}}{k}, \quad (39)$$

то його ліву частину можна ототожнити із сумою других скінченних різниць другого порядку, які наближено відповідають другим похідним (за скінченно-різницеvim співвідношенням типу (3)) по i -му та j -му напрямкам індексування вузлів, вбачаючи, що дискретний образ містить лише регулярні вузли сітки II-го типу. Перепишемо рівняння (36) наступним чином:

$$(s_{i-1,j} - 2 \cdot s_{i,j} + s_{i+1,j}) + (s_{i,j+1} - 2 \cdot s_{i,j} + s_{i,j-1}) = \frac{P_{s_{i,j}}}{k}. \quad (40)$$

Використаємо вирази для отримання скінченно-різницеvim аналогів других похідних, запропоновані у [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial i^2} &\approx \frac{\Delta^2 s}{\Delta i^2} = \frac{(s_{i+1,j} - s_{i,j}) / [(i+1) - i] - (s_{i,j} - s_{i-1,j}) / [i - (i-1)]}{[(i+1) - i] / 2 + [i - (i-1)] / 2} = \\ &= (s_{i-1,j} - 2 \cdot s_{i,j} + s_{i+1,j}); \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial j^2} &\approx \frac{\Delta^2 s}{\Delta j^2} = \frac{(s_{i,j+1} - s_{i,j}) / [(j+1) - j] - (s_{i,j} - s_{i,j-1}) / [j - (j-1)]}{[(j+1) - j] / 2 + [j - (j-1)] / 2} = \\ &= (s_{i,j-1} - 2 \cdot s_{i,j} + s_{i,j+1}). \end{aligned} \quad (42)$$

Враховуючи вирази (38) та (39), рівняння (36) набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial i^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial j^2} \approx \frac{P_s}{k}. \quad (43)$$

Аналогічно, шляхом зворотної заміни скінченно-різницеvim виразів на часткові похідні 2-го порядку, може бути записане й рівняння (31). Спочатку запишемо його у наступному вигляді:

$$(P_{s_{i-1,j}} - 2 \cdot P_{s_{i,j}} + P_{s_{i+1,j}}) + (P_{s_{i,j+1}} - 2 \cdot P_{s_{i,j}} + P_{s_{i,j-1}}) = 0. \quad (44)$$

Проведемо заміну скінченно-різницеvim виразів на часткові похідні:

$$\frac{\partial^2 P_s}{\partial i^2} + \frac{\partial^2 P_s}{\partial j^2} \approx 0. \quad (45)$$

Для одержання диференційного аналогу для рівняння (32) можна піти зворотним шляхом. Для цього можна спочатку отримати диференційне рівняння рівноваги дискретно представлені поверхні, підставляючи рівняння (40) до рівняння (42):

$$k \cdot \left\{ \left[\partial^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial i^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial j^2} \right) / \partial i^2 \right] + \left[\partial^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial i^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial j^2} \right) / \partial j^2 \right] \right\} \approx 0,$$

$$\frac{\partial^4 s}{\partial i^4} + \frac{\partial^4 s}{\partial i^2 \partial j^2} + \frac{\partial^4 s}{\partial i^2 \partial j^2} + \frac{\partial^4 s}{\partial j^4} \approx 0,$$

$$\frac{\partial^4 s}{\partial i^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 s}{\partial i^2 \partial j^2} + \frac{\partial^4 s}{\partial j^4} \approx 0 \text{ або } \nabla^4 s \approx 0. \quad (46)$$

Перший і останній компоненти лівої половини рівності (46) можна замінити скінченно-різницевиими співвідношеннями типу (6):

$$\partial^4 s / \partial i^4 \approx (s_{i-2,j} - 4 \cdot s_{i-1,j} + 6 \cdot s_{i,j} - 4 \cdot s_{i+1,j} + s_{i+2,j}), \quad (47)$$

$$\partial^4 s / \partial j^4 \approx (s_{i,j-2} - 4 \cdot s_{i,j-1} + 6 \cdot s_{i,j} - 4 \cdot s_{i,j+1} + s_{i,j+2}). \quad (48)$$

Середній компоненти лівої половини рівності (46) визначається на основі скінченно-різницевих співвідношень типу (41) та (42) за наступною формулою:

$$2 \cdot \frac{\partial^4 s}{\partial i^2 \partial j^2} \approx 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 s}{\partial i^2} \right)_{j-1} - 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 s}{\partial i^2} \right)_j + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial i^2} \right)_{j+1} \right] =$$

$$= 2 \cdot \left[4 \cdot s_{i,j} - 2 \cdot (s_{i-1,j} + s_{i+1,j} + s_{i,j-1} + s_{i,j+1}) + \right. \\ \left. + s_{i-1,j-1} + s_{i+1,j+1} + s_{i+1,j-1} + s_{i-1,j+1} \right] = \quad (49)$$

$$= \left[8 \cdot s_{i,j} - 4 \cdot (s_{i-1,j} + s_{i+1,j} + s_{i,j-1} + s_{i,j+1}) + \right. \\ \left. + 2 \cdot (s_{i-1,j-1} + s_{i+1,j+1} + s_{i+1,j-1} + s_{i-1,j+1}) \right].$$

Підставивши скінченно-різницеві співвідношення (47), (48) та (49) до рівняння (46) одержимо наступну тотожність:

$$\left(\begin{aligned} &20 \cdot s_{i,j} - 8 \cdot (s_{i-1,j} + s_{i+1,j} + s_{i,j-1} + s_{i,j+1}) + \\ &+ 2 \cdot (s_{i-1,j-1} + s_{i+1,j-1} + s_{i-1,j+1} + s_{i+1,j+1}) + \\ &+ (s_{i-2,j} + s_{i+2,j} + s_{i,j-2} + s_{i,j+2}) \end{aligned} \right) = 0, \quad (50)$$

що відповідає рівнянню (35) із протилежними знаками коефіцієнтів.

Вочевидь, рівняння (43), (45) та (46) встановлюють диференціальні залежності між координатами вузлів та параметрично зв'язаними зовнішніми силами при формуванні дискретного образу, що інтерпретує пружну тонкостінну оболонку. Відповідні залежності можуть стати основою для подальших досліджень не лише регулярних сітчастих структур, але й нерегулярних, включаючи як планарні, так і непланарні з точки зору теорії графів дискретні образи.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Розглянутий підхід до формування дискретних образів дозволяє здійснювати

моделювання гладкого з'єднання країв дискретних образів архітектурних оболонок шляхом параметричного зв'язування координат їх вузлів. Запропоновано загальні принципи зв'язування параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження для вузлів як регулярних, так і нерегулярних сітчастих структур. Встановлено диференціальні залежності між координатами вузлів та зовнішніми силами, що прикладаються до цих вузлів в процесі формування дискретних образів пружних тонкостінних оболонок об'єктів архітектури.

Найбільший інтерес для подальших досліджень представляє встановлення такого способу параметризації дискретно представлених поверхонь, який би узгоджувався одночасно із продемонстрованими диференціальними залежностями як для регулярних, так і нерегулярних сітчастих структур. При цьому, необхідною є розробка ефективних алгоритмів швидкої побудови рівнянь рівноваги вузлів дискретних образів для можливості проведення достатньої кількості моделювань відповідних гладких поверхонь.

Література

1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. перераб. [под ред. Г. Гроше, и В. Циглера]. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 976 с.
2. *Ботвіновська С. І., Ковальов С. М., Золотова А. В.* Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями в дизайні та архітектурі. *Управління розвитком складних систем* Розділ «Інформаційні технології проектування». Київ : КНУБА. 2016. №. 25. С. 121– 126.
3. *Ботвіновська С. І.* Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об'єктів архітектури та дизайну. дис. ...доктора техн. наук. 05.01.01.Прикладна геометрія, інженерна графіка. Київ : КНУБА, 2018. 534 с.
4. *Скочко В. І.* Методи інтерпретаційного геометричного моделювання сітчастих структур та їх застосування. Дис. ... доктора техн. наук : 05.01.01. Київ : КНУБА, 2021. 590 с.
5. *Ковальов С. М., Ігумен М. С., Пустюльга С. И., Михайленко В. Є.* та ін / *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* Спеціальні розділи. Випуск 1 [за ред. В. Є. Михайленка]. Луцьк : Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. 256 с.
6. *Баженов В. А. , Сахаров О. С. , Мельниченко Г. Й., Чорний С. М.* Метод скінченних елементів у задачах будівельної механіки : навч. посібник. Київ : КНУБА, 1994. 368 с.
7. *Самарський А. А., Гулін А. В.* Чисельні методи. Москва : Наука. Гол. ред. фіз.-мат. літ., 1989. 432 с.

8. Ковальов, С. Н. Дискретна інтерполяція нелінійними операторами // *Прикладна геометрія та інженерна графіка* : зб. наук. праць. Київ : КНУБА, 2012. Вип. 89.
9. Ковальов, С. Н. Формування дискретних моделей поверхонь просторових архітектурних конструкцій. дис. ...доктора техн. наук. 05.01.01. Москва : МАІ. 1986. 348 с.
10. Ковальов С. М., Ботвіновська С. І. Формування дискретного каркаса зрівноваженої нерегулярної сітки дискретно представленої поверхні. *Управління розвитком складних систем*. 2020. № 42. С. 75 – 81. DOI: 10.32347/2412-9933.2020.42.75-81.
11. Пустюльга С. І., Самостян В. Р., Хомич А. А. Дискретне моделювання зрівноважених криволінійних сіток, з неперервним кроком вузлів суперпозицією по-двійних числових послідовностей. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2013. № 91. С. 219–225.
12. Пустюльга С. І., Самостян В. Р. Дискретне моделювання зрівноважених двовимірних сіток числовими послідовностями. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2009. № 82. С. 53–57.
13. Пустюльга С. І., Самчук В. П. Моделювання хвилястих дискретно представлених кривих на основі принципу супер-позиції. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2009. № 82. С. 197–202.
14. Бурчак І. Н. Геометричне моделювання сітчастих конструкцій та збірних оболонок з урахуванням деформації пружного вигину. Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Київ : КНУБА, 1988. 138 с.
15. Бурчак І. Н. Геометричний алгоритм формування мережі із збереженням її метричних властивостей / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 1988. Вип. 46. С. 91-92.
16. Воронцов О. В., Тулунова Л. О., Воронцова І. В. Дискретне моделювання поверхонь покриттів та оболонок будівельних споруд / *Building Innovations – 2019*: зб. наук. пр. за матеріалами II Міжнар. укр.-азерб. конф., 23 – 24 трав. 2019 р. Полтава : ПолтНТУ, 2019.
17. Посікера А.В., Скочко В.І., Плоский В.О., Кожедуб С.А. Моделювання дискретних фрагментів гладкого сполучення архітектурних оболонок покриття на основі нерегулярних сітчастих структур / *Міжнародна науково-практична конференція молодих вчених «Буд-Майстер-Клас-2022»: тези доп. (Conference Proceedings)*. Київ : КНУБА, 2022. С. 55-56.
18. Посікера А., Скочко В., Чернишев Д., Кожедуб С. Побудова обчислюваних шаблонів для опису рівноваги вузлів нерегулярних дискретних прообразів гладких поверхонь сполучення технічних форм / *Міжнародна науково-практична конференція молодих вчених «Буд-Майстер-Клас-2023»: тези доп. (Conference Proceedings)*. Київ : КНУБА, 2023. С. 45-46.
19. Годунов С. К., Рябенський В. С. Різницеві схеми (введення до теорії). Москва : Наука, 1977. 440 с.

20. *Скочко В. І.* Дискретна візуалізація плоских кривих, заданих функціями в неявній формі / *Містобудування та територіальне планування*. Київ : КНУБА, 2017. Вип. 64. С. 372-383.
21. *Oden J. T., Reddy J. N.* An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. New York London : John Wiley & Sons, 1976.
22. *Аменадзе Ю. А.* Теорія пружності. Підручник для університетів. 3-тє видання, доп. Москва : «Вища школа», 1976. 272 с. з. іл.
23. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The Theory of Splines and Their Applications. New York London : Academic Press, 1967.

References

1. *Bronshtein I. N., Semendyaev K. A.* Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vuzov. Izd. pererab. [pod red. G. Groshe, i V. Tsiglera]. M. : Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1980. 976 s.
2. *Botvinovska S. I., Kovalov S. M., Zolotova A. V.* Geometrichne modelyuvannya poverkhon iz zadanyimi vlastyvostyamy v dyzayni ta arkhitekturi. *Upravlinnya rozvytkom skladnykh system* Rozdil «Informatsiyni tekhnologii proektuvannya». Kyiv : KNUBA. 2016. №. 25. S. 121–126.
3. *Botvinovska S. I.* Teoretychni osnovy formoutvorennya v dyskretnomu modelyuvanni ob'iektiv arkhitektury ta dyzaynu. dis. ...doktora tekhn. nauk. 05.01.01. *Prykladna heometriya, inzhenerna hrafika*. Kyiv : KNUBA, 2018. 534 s.
4. *Skochko V. I.* Metody interpretatsiynoho heometrychnoho modelyuvannya sitchastykh struktur ta yikh zastosuvannya. Dis. ... doktora tekhn. nauk : 05.01.01. Kyiv : KNUBA, 2021. 590 s.
5. *Kovalov S. M., Ihumen M. S., Pustyulga S. I., Mikhailenko V. Ye.* ta in. *Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika*. Spetsialni rozdily. Vypusk 1 [za red. V. Ye. Mikhailenka]. Lutsk : Redaktsiyno-vydavnychyy viddil LDTU, 2006. 256 s.
6. *Bazhenov V. A. , Sakharov O. S. , Melnichenko H. Y., Chorny S. M.* Metod skinchenykh elementiv u zadachakh budivelnoi mekhaniky : navch. posibnyk. Kyiv : KNUBA, 1994. 368 s.
7. *Samarskiy A. A., Hulin A. V.* Chyselni metody. Moskva : Nauka. Hol. red. fiz.-mat. lit., 1989. 432 s.
8. *Kovalov, S. N.* Dyskretna interpolyatsiya neliniynymi operatoramy // *Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika* : zb. nauk. prats. Kyiv : KNUBA, 2012. Vyp. 89.
9. *Kovalov, S. N.* Formuvannya dyskretnykh modelei poverkhon prostorovykh arkhitekturnykh konstruktsiy. dis. ...doktora tekhn. nauk. 05.01.01. Moskva : MAI. 1986. 348 s.
10. *Kovalov S. M., Botvinovska S. I.* Formuvannya dyskretnoho karkasa zrivnovazhenoi nerekulyarnoyi sitky dyskretno predstavlenoi poverkhni.

Upravlinnya rozvytkom skladnykh system. 2020. № 42. S. 75 – 81. DOI: 10.32347/2412-9933.2020.42.75-81.

11. *Pustyulga S. I., Samostyan V. R., Khomych A. A.* Diskretne modelyuvannya zrivnovazhenykh kryvoliniynykh sitok, z neperervnym krokom vuzliv superpozytsiyeyu po-dviynykh chyslovykh poslidovnostey. *Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 2013. № 91. S. 219–225.

12. *Pustyulga S. I., Samostyan V. R.* Diskretne modelyuvannya zrivnovazhenykh dvovymirnykh sitok chyslovymy poslidovnostyamy. *Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 2009. № 82. S. 53–57.

13. *Pustyulga S. I., Samchuk V. P.* Modelyuvannya khvylyastykh diskretno predstavlenykh kryvykh na osnovi pryntsypu super-pozytsii. *Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 2009. № 82. S. 197–202.

14. *Burchak I. N.* Heometrychne modelyuvannya sitchastykh konstruktsiy ta zbirnykh obolonok z urakhuvannyam deformatsii pruzhnoho vyhynu. Dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.01.01. Kyiv : KNUBA, 1988. 138 s.

15. *Burchak I. N.* Heometrychnyy alhorytm formuvannya merezhi iz zberezhennyam yii metrychnykh vlastyvostey / *Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 1988. Vyp. 46. S. 91-92.

16. *Vorontsov O. V., Tulupova I. V., Vorontsova L. O.* Diskretne modelyuvannya poverkhon pokryttiv ta obolonok budivelnnykh sporud / *Building Innovations*, 2019: zb. nauk. pr. za materialamy II *Mizhnar. ukr.-azerb. konf.*, 23 – 24 trav. 2019 r. Poltava: PoltNTU, 2019.

17. *Posikera A.V., Skochko V.I., Ploskyi V.O., Kozhedub S.A.* Modelyuvannya diskretnykh fragmentiv hladkoho spoluchennya arkhitekturnykh obolonok pokryttya na osnovi nerehulyarnykh sitchastykh struktur / *Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiya molodykh vchenykh «Bud-Mayster-Klas-2022»: tezy dop. (Conference Proceedings).* Kyiv : KNUBA, 2022. S. 55-56.

18. *Posikera A., Skochko V., Chernyshov D., Kozhedub S.* Pobudova obchyslyuvanykh shabloniv dlya opysu rivnovahy vuzliv nerehulyarnykh diskretnykh proobraziv hladkykh poverkhon spoluchennya tekhnichnykh form / *Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiya molodykh vchenykh «Bud-Mayster-Klas-2023»: tezy dop. (Conference Proceedings).* Kyiv : KNUBA, 2023. S. 45-46.

19. *Godunov S. K., Ryabenkiy V. S.* Riznytsevi skhemy (vvedennya do teorii). Moscow : Nauka, 1977. 440 s.

20. *Skochko V. I.* Diskretna vizualizatsiya ploskykh kryvykh, zadanykh funktsiyamy v nevyavniy formi [Tekst]. *Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya.* Kyiv : KNUBA, 2017. Vyp. 64. S. 372-383.

21. *Oden J. T., Reddy J. N.* An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements / New York London : John Wiley & Sons, 1976.

22. *Amenadze Yu. A.* Teoriya pruzhnosti. Pidruchnyk dlya universytetiv. 3-tye vydannya, dop. Moscow : «Vyshcha shkola». 1976. 272 s. z. il.

23. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The Theory of Splines and Their Applications. New York London : Academic Press, 1967.

PhD Student, **Posikera Andrii**,
posikera142@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3989-2704
Doctor of Technical Science, Professor **Skochko Volodymyr**,
vladimir.and.friends@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1709-2621
PhD Student, **Shirokov Andrii**,
a.shirokov@bxp.com.ua, ORCID: 0009-0008-0602-7083
Spiridonov Vadim,
spiridonov0505@gmail.com, ORCID: 0009-0003-4318-1833
Kyiv National University of Construction and Architecture

GEOMETRIC MODELING OF SMOOTH CONNECTING OF FRAGMENTAL DISCRETELY REPRESENTED SURFACES

The paper considers the concept of one of the approaches to modeling the smooth connection of the edges of architectural shells, presented in the form of discrete images. This approach is based on the geometric formation of local connecting discretely presented surfaces, which in shape imitate the nature of deformation of flexible elastic thin-walled shells. The process of modeling their shape involves the systemic determination of the coordinates of the nodes of connecting discretely presented surfaces, based on the solution of the equilibrium equations of the static-geometric method of applied geometry. At the same time, it is necessary to apply the tools of the theory of parameterization to form discrete analogs of approximation difference operators (equations) and corresponding computational templates for grid nodes of discrete images, which must be used to smoothly connect the edges of given fragments of architectural shells. The construction of the above-mentioned approximation operators occurs by connecting the coordinates of adjacent nodes based on the exclusion of the components of the vectors of the external form-forming load from the equations of their equilibrium. In this way, new equilibrium equations are formed, which actually determine the position of all nodes and the shape of the desired fragments of a smooth connection of architectural shells. The simplicity, clarity, and universality of this approach allows us to easily generalize its application to not only regular, but also irregular grids of discrete images.

Keywords: smooth connection; architectural shells; discrete images; regular grids; irregular grids; network structures; geometric morphogenesis; node balance; static-geometrical method.